Ma o 62

[illegible] Marschall

Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

von

Dr. Theodor Wittstein,

Professor und Lehrer an der Königlichen Cadetten-Anstalt, der Königlichen Militair-Academie und der städtischen Handelsschule zu Hannover.

Erster Band.

Arithmetik und Planimetrie.

Hannover.

Hahn'sche Hofbuchhandlung.

1856.

BIBLIOTHECA
CIVITATIS
BABENBERGENSIS.

Druck von Fr. Culemann in Hannover.

Vorrede.

Der Verfasser übergiebt hier dem Publicum ein mathematisches Lehrbuch, welches genau nicht mehr und nicht weniger enthält als in den Unterrichtsstunden durchgenommen werden soll, diesen seinen Inhalt aber bis in die kleinsten Einzelheiten ausgearbeitet dem Schüler vorlegt. Das Lehrbuch hat zu seinem nächsten Zwecke, dem mathematischen Unterrichte an der hiesigen Königlichen Cadetten-Anstalt zur Grundlage zu dienen, und wie aus dieser Bestimmung des Buchs die besondere Einrichtung desselben hervorgegangen ist, das möge hier in der Kürze eine Erläuterung finden.

Als zugestanden darf ohne Zweifel vorausgesetzt werden, daß der mathematische Unterricht an einer Cadetten-Anstalt eben so wenig wie an jeder anderen allgemeinen Bildungsanstalt, z. B. einem Gymnasium oder einer höheren Bürgerschule, sich die Aufgabe stellen darf, die Schüler der Anstalt zu eigentlichen Mathematikern heranzubilden; denn wie wünschenswerth es auch ist, daß eine Armee einige eigentliche Mathematiker unter ihren höheren Officieren zählt, so ist diesem Bedürfniß immer schon durch eine kleine Zahl derselben, welche überall ohne Zuthun des Unterrichts entsteht, vollständig Genüge geschehen. In gleicher Weise kann aber auch die Aufgabe dieses Unterrichts nicht darin gesucht werden, eine gedächtnißmäßige Abrichtung der Schüler zu gewissen Fertigkeiten, welche die Mathematik zu ihrer Grundlage haben, allen anderen Rücksichten voranzustellen: eine Abrichtung, welche zwar wohl ge-

eignet sein mag glänzende Abgangs-Prüfungen zu Stande zu bringen, in denen Antwort auf Frage wie Schlag auf Schlag folgt, deren Inhalt jedoch sehr bald nach bestandener Prüfung so spurlos wieder aus den Köpfen verschwunden sein wird, daß an eine Einwirkung desselben auf die Praxis des künftigen Berufs nicht entfernt zu denken ist. Diesen beiden Extremen gegenüber soll vielmehr der oberste und höchste Zweck des mathematischen Unterrichts an jeder allgemeinen Bildungsanstalt in derjenigen Verstandes-Cultur gesucht werden, welche jedem Gebildeten für Beruf und Leben ein Bedürfniß ist und zu welcher die Mathematik ein so vorzügliches Hülfsmittel abgiebt, daß schon von den Griechen zur Zeit der höchsten Blüthe ihrer Cultur die Mathematik als die nothwendige Vorschule zur Weltweisheit betrachtet wurde. Die Ausbildung des Verstandes, oder der Fähigkeit, mit Präcision Begriffe und Schlüsse zu bilden, tritt bei dieser Auffassung der Sache allen anderen Rücksichten voran, und ich darf sogleich hinzusetzen, daß nach meinen Erfahrungen ein unter dieser Auffassung geleiteter Unterricht immer, so lange nur äußere Hemmnisse fern bleiben, unmittelbar auch seines Erfolges gewiß ist. Der Schüler lernt an den einfachen Objecten der Mathematik aus eigenen Kräften etwas machen und durch eigenes Nachdenken mit Leichtigkeit etwas hervorbringen; das weckt unmittelbar seine Lust und er gewinnt Interesse an der Beschäftigung, dergestalt, daß die Unterrichtsstunden immer unter allseitiger Freude und Lebendigkeit verfließen. Es dürfte wohl kaum Übertreibung sein, wenn man behaupten wollte, daß ein also unterrichteter Schüler in seinem spätern Leben den gesammten mathematischen Lehrstoff ohne Schaden vergessen dürfe, und der Erfolg werde dennoch bleiben. Denn dieser Erfolg besteht nicht in Kenntnissen oder Objecten, welche sich vorzeigen lassen; dagegen in der ganzen Art und Weise zu denken wird er bei einem Schüler jenes Unterrichts die ganze Lebenszeit hindurch seinen Einfluß geltend machen.

Neben jenem höchsten und obersten Zwecke des mathematischen Unterrichts muß nun allerdings, und namentlich auch in besonderer Rücksicht auf die Cadetten-Anstalt, noch ein zweiter Punkt namhaft gemacht werden, welchen hier gleichfalls der Unterricht berücksichtigen soll. Den künftigen Officier wird nicht selten die Praxis seines Berufs in Lagen bringen, wo er von einzelnen Lehren der Mathe-

matik unmittelbar Anwendung zu machen hat, und er soll die Fähigkeit besitzen, in solchen Fällen mit Leichtigkeit sich helfen zu können. Gewiß ist kein Gedächtniß der Welt im Stande, den gesammten Lehrstoff eines Unterrichtsfaches aus der Schule in die späteren Lebensalter treu und unversehrt hinüberzutragen, und es würde also ein vergebliches Bemühen sein, wollte man etwa für Fälle der angedeuteten Art lediglich auf die Überlieferungen des Gedächtnisses sich verlassen. Ja eine solche gedächtnißmäßige Übertragung kann ihrer Natur nach nur auf bestimmte Fälle sich erstrecken und deshalb vielleicht gerade in einem entscheidenden Falle, den zufällig der Unterricht überschlagen hatte, ihre Hülfe versagen. Dagegen was von dem Verstande einmal erfaßt und durchdrungen worden ist, das wird auch der Verstand jederzeit und selbst nach längeren Zwischenzeiten, nöthigenfalls unter Zuziehung überall zugängiger Hülfsmittel, zu reproduciren verstehen; und dasjenige Wissensgebiet, welches einer gewissenhaften verstandesmäßigen Betrachtung einmal zum Object gedient hat, wird auch an Stellen, welche bis dahin nicht zur Berührung gekommen sind, einer Fortsetzung solcher Betrachtung ohne Mühe sich bloßlegen. Darum muß ein Unterricht von der vorhin angedeuteten Weise zugleich auch der hier gestellten zweiten Forderung von selbst Genüge leisten, oder ein Unterricht, welcher die Ausbildung des Verstandes sich als höchstes Ziel vorsteckt, wird auch die Schüler in ihren späteren Lebensjahren bei allen Anwendungen, sobald diese nur nicht über die Höhe des Unterrichts hinausgehen, niemals im Stich lassen. Nur die eine Rücksicht dürfte hier noch genommen werden müssen, daß der Unterricht, welcher die künftige Anwendung im Auge haben will, nicht etwa die einzeln sich ihm darbietenden Probleme, sobald dieselben erledigt sind, sogleich verlassen darf um niemals darauf zurückzukommen, sondern vielmehr durch hinreichende Wiederholungen sich soll zu versichern suchen, daß die geforderte verstandesmäßige Durchdringung derselben von Seiten der Schüler auch wirklich allerseits stattgefunden hat. Aber auch diese Rücksicht erledigt sich von selbst vermöge der eigenthümlichen Structur der wissenschaftlichen Mathematik, welche keinen Satz beweisen kann, ohne auf vorhergegangene Sätze zurückzugehen, und keine Aufgabe lösen, ohne vorhergegangene Aufgaben zu Hülfe zu nehmen, und es bieten sich demnach die Anlässe zu Wiederholungen in so reicher

Zahl, daß eine angemessene Benutzung derselben die Ansetzung besonderer Wiederholungsstunden kaum mehr nothwendig erscheinen läßt.

Wie nun dem hier ausgesprochenen Grundsatze gemäß, daß als das oberste Ziel des mathematischen Unterrichts die Ausbildung des Verstandes zu setzen sei, ein Lehrbuch eingerichtet werden müsse, welches fortwährend dem Unterrichte zum Grunde gelegt werden soll, darüber hat mir meine bisherige Praxis verschiedene Fingerzeige an die Hand gegeben, die ich bei der Ausarbeitung des vorliegenden Lehrbuchs habe nutzbar zu machen gesucht. Vor allen Dingen habe ich geglaubt den Irrweg vermeiden zu müssen, welcher über die ersten und leichten Entwickelungen flüchtig hinweggeht, um möglichst bald bei Untersuchungen anzulangen und sich da des Breiteren zu ergehen, wo eigentlich nur der Mathematiker Interesse findet. Ein Lehrbuch von dieser Beschaffenheit kann offenbar für entschieden mathematische Köpfe sehr werthvoll sein; indessen da diese überall die Minderheit bilden, so wird durch ein solches Buch die Mehrzahl der Schüler bestimmt nicht für die Mathematik gewonnen. Der Schüler hat immer nur Interesse für das, was er wirklich begreift; er empfindet Langeweile, wo das Verständniß ihm nicht aufgehen will. Deshalb soll der Anfang einfach und klar genug hingestellt; deshalb sollen die Stufen des Fortschritts so klein gewählt werden, daß man sicher gehen kann, auch den schwächsten Schüler mitzuziehen, ohne ihn durch ein Übermaß von Ausführlichkeit zu ermüden; und Betrachtungen von einer zu abstracten Natur, denen nur Wenige folgen können, soll man lieber ganz meiden. Aus demselben Grunde ist denn auch hier auf die Ausarbeitung der Beweise besondere Sorgfalt verwandt worden, und das streng logische Fortschreiten von Schluß zu Schluß findet sich überall in den Vordergrund gestellt; womit allerdings nicht gesagt sein soll, daß nicht dennoch hier oder dort eine Schlußkette übersprungen und ein Resultat, welches sich durch die vorhergegangenen Entwickelungen schon voraussehen ließ, schroff hingestellt worden sei. Dagegen sind mathematische Formeln möglichst selten angewandt, und fast immer nur neben einer wörtlichen Übersetzung derselben in die deutsche Sprache, und Untersuchungen, welche nur den eigentlichen Mathematiker interessiren können, habe ich gänzlich ausgeschlossen, wie sehr man auch sonst gewohnt sein mag dieselben als dem „System" der Mathematik wesentlich zu betrachten. Denn ein System der

Wissenschaft*) und ein Lehrbuch für den Unterricht sind eben zwei verschiedene Dinge, und die größte Schwierigkeit in der Abfassung eines mathematischen Lehrbuchs besteht gerade darin, daß der Verfasser die Fähigkeit besitzen muß, des Mathematikers sich zu entkleiden und vollständig zu der Fassungskraft des Anfängers hinabzusteigen. Man wolle bei der Beurtheilung dieses Buchs, und besonders da, wo man etwa Lücken wahrzunehmen meint, diesen Punkt vor allen anderen im Auge behalten. Wo der Verfasser eines Lehrbuchs die genannte Fähigkeit sich nicht anzueignen vermocht hat, da wird sein Buch von der Mehrzahl der Schüler, weil sie es nicht verstehen, im günstigsten Falle unfehlbar nur als Object des Auswendiglernens betrachtet werden, und damit ist es um den guten Erfolg des Unterrichts geschehen.

Über die Behandlung der Einzelheiten bleibt mir hier wenig hinzuzufügen, wenn gleich dieselbe mehrfach von dem Herkömmlichen abweicht. Die harmonischen Proportionen in der Arithmetik sind hier der Geometrie wegen aufgenommen worden, in welcher heutiges Tages die Lehre von den harmonischen Punkten und Strahlen nicht wohl unberührt bleiben darf, und wie ungezwungen überdies die letztere sich dem bisherigen Inhalte der Planimetrie anschließen läßt, davon dürften die Überschriften hinreichend Zeugniß geben, welche den §§. 201 und 230 der Planimetrie vorgesetzt worden sind. Übrigens habe ich mich hier auf die wenigen Sätze beschränkt, welche schon Carnot für die Fundamentalsätze der Lehre von den Transversalen erklärt, und namentlich auch die harmonischen Eigenschaften des Kreises, als zu viel Zeit in Anspruch nehmend, ausgeschlossen. Bei den Logarithmen habe ich überall nur fünfstellige Tafeln vorausgesetzt, weil diese nach meiner Überzeugung für den Schulgebrauch vollkommen ausreichen. Eine zweckmäßige Schulausgabe solcher Tafeln scheint allerdings noch nicht zu existiren, und ich gedenke deshalb nach dem Abschlusse dieses Werks eine solche nachfolgen zu lassen. Übungs-Beispiele habe ich in der Arithmetik überall beigefügt, wo es mir angemessen schien dergleichen rechnen zu lassen; die Zahl derselben wird ein Lehrer nöthigenfalls

---

*) Ein System der Wissenschaft, und nicht ein Lehrbuch zum unmittelbaren Gebrauch in den Unterrichtsstunden, ist mein früher erschienenes „Lehrbuch der Arithmetik". Hannover 1846.

leicht aus den bekannten Sammlungen vermehren können. Dagegen fehlen hier Übungs-Beispiele zu geometrischen Constructionen. Es hat mir bis jetzt nicht gelingen wollen, in der beschränkten Zeit eines Unterrichts-Cursus die Schüler zu einer einigermaßen erheblichen Fertigkeit in der Anwendung der geometrischen Analysis zu bringen; und Aufgaben zu stellen ohne Vorausschickung einer Anleitung zur geometrischen Analysis, zu deren Auflösung also die Schüler auf ein Rathen und Tappen im Dunkeln sich angewiesen sehen würden, das erschien mir zu sehr wie eine Versündigung gegen die gute Methode, als daß ich mich ihrer hätte schuldig machen mögen. Ich werde diesen Mangel nachholen, sobald mir günstigere Erfahrungen werden zu Gebote stehen.

Es ist anfangs die Absicht gewesen das ganze Werk in Einem Bande auszugeben, damit der Schüler beim Gebrauch desselben jederzeit im Stande sei, bei den Verweisungen aus späteren Sätzen auf frühere, diese letzteren mit Hülfe des Buchs sich sogleich wieder zu vergegenwärtigen. Indessen wiederholte Anfragen während des Drucks ließen es zuletzt angemessen erscheinen, vorläufig Arithmetik und Planimetrie als ersten Band selbständig auszugeben. Als zweiter Band werden demnächst Trigonometrie und Stereometrie nachfolgen. In der äußeren Ausstattung wird man, wie ich hoffe, die bekannte Sorgfalt der verehrlichen Verlagshandlung wiedererkennen, welche mit dankenswerther Bereitwilligkeit die Wahl einer hinreichend großen und deutlichen Schrift genehmigte, damit das Buch auch von dieser Seite den Anforderungen an ein Schulbuch möglichst entsprechen möge.

Hannover im December 1855.

Inhalt.

Planimetrie.

Elementar-Mathematik.

Einleitung.

§. 1.

Die Mathematik ist die Wissenschaft, welche von den Größen handelt.

Sie zerfällt in die Arithmetik und die Geometrie. Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Zahlen, und die Geometrie ist die Wissenschaft von den Raumgrößen.

Sie wird ferner in die Elementar-Mathematik und die höhere Mathematik eingetheilt. Die Elementar-Mathematik umfaßt denjenigen Theil der Mathematik (sowol der Arithmetik als auch der Geometrie), welcher aus Rücksichten der allgemeinen Bildung auf Schulen gelehrt wird; die höhere Mathematik dagegen bildet die Beschäftigung des eigentlichen Mathematikers.

§. 2.

Die Mathematik behandelt ihren Stoff nach der sogenannten mathematischen Methode; nämlich in Erklärungen, Lehrsätzen und Aufgaben, denen vorangestellt werden Grundbegriffe, Grundsätze und Forderungssätze.

1) Eine Erklärung (Definition) giebt an, wie ein mathematischer Begriff aus anderen schon vorhergegangenen Begriffen zusammengesetzt wird.

Solche mathematischen Begriffe, welche nicht aus anderen schon vorhergegangenen Begriffen zusammengesetzt werden können, weil sie in der Reihe dieser Begriffe die ersten sind, heißen Grundbegriffe und werden ohne Erklärung als gegeben vorausgesetzt.

2) Ein Lehrsatz (Theorem) ist eine Aussage, welche aus einer Voraussetzung und einer Folgerung zusammengesetzt ist. Der Beweis giebt an, wie die Richtigkeit des Lehrsatzes aus der Richtigkeit anderer schon vorhergegangenen Lehrsätze hergeleitet wird.

Solche mathematischen Sätze, deren Richtigkeit nicht aus der Richtigkeit anderer schon vorhergegangenen Sätze hergeleitet werden kann, weil sie in der Reihe dieser Sätze die ersten sind, heißen Grundsätze (Axiome) und werden ohne Beweis als richtig zugestanden.

3) Eine Aufgabe (ein Problem) ist eine Forderung, welche aus einem Gegebenen und einem Gesuchten zusammengesetzt ist. Die Auflösung zeigt an, wie der Aufgabe durch Hülfe anderer schon vorhergegangenen Aufgaben Genüge geschehen kann.

Solche mathematischen Forderungen, denen nicht durch Hülfe anderer schon vorhergegangenen Aufgaben Genüge geschehen kann, weil sie in der Reihe der Aufgaben die ersten sind, heißen Forderungssätze (Postulate) und werden ohne Auflösung als ausführbar angenommen.

§. 3.

Die Mathematik setzt in allen ihren Theilen folgende Grundsätze über Größen als zugestanden voraus:

I. Jede Größe ist sich selbst gleich. Oder in Buchstaben ausgedrückt:

$$A = A.$$

II. Das Ganze ist größer als jeder seiner Theile. Oder:

Wenn $A = B + C$ ist,

so ist $A > B$, und ebenso $A > C$.

III. Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander gleich. Oder:

Wenn $A = B$, und $A = C$ ist,

so ist $B = C$.

IV. Gleiches zu Gleichem addirt, von Gleichem subtrahirt, mit Gleichem multiplicirt oder durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches. Oder:

Wenn $A = B$, und $C = D$ ist,

so ist
$$A + C = B + D,$$
$$A - C = B - D,$$
$$A . C = B . D,$$
$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}.$$

§. 4.

Die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Die Arithmetik soll von den Phöniciern, die Geometrie von den Aegyptern erfunden sein; doch findet sich bestimmte Kunde von der Mathematik erst bei den Griechen, zu denen Thales und Pythagoras im sechsten Jahrhundert vor C. G. diese Wissenschaft brachten. Besonders gelangte die Geometrie bei den Griechen zu hoher Blüthe, namentlich durch Euklides um 300 und Archimedes um 250 vor C. G.

Gleichzeitig mit den Griechen und unabhängig von denselben haben auch die Inder mit Erfolg Mathematik getrieben. Namentlich verdanken wir ihnen den Gebrauch unserer Ziffern.

Von den Griechen und den Indern gelangte die Mathematik zu den Arabern, welche zu der Zeit ihrer ausgedehntesten Herrschaft, ungefähr vom achten bis in das dreizehnte Jahrhundert nach C. G., mit Eifer den überlieferten Stoff sich aneigneten, ohne indessen die Wissenschaft selbst erheblich zu fördern.

Durch die Araber in Spanien und die Griechen des untergehenden byzantinischen Kaiserreichs kam endlich nach und nach die Kunde von der Mathematik zu den christlichen Völkern von West-Europa. Diese nahmen den von den Griechen eingeschlagenen Weg mit dem größten Erfolge wieder auf, und ihnen verdankt die Mathematik die gegenwärtige Höhe ihrer Ausbildung.

Bis in das sechzehnte Jahrhundert hatte die Wissenschaft den Umfang unserer heutigen Elementar-Mathematik kaum überschritten, ja in mancher Beziehung noch nicht einmal erreicht. Erst mit den Zeiten von Descartes (1596—1650), Leibnitz (1646—1716) und Newton (1642—1727) beginnt die eigentliche höhere Mathematik, welche bis auf den heutigen Tag im beständigen Fortschreiten begriffen ist.

Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Rechnung mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 1.

Erklärung. Unter der natürlichen Zahlenreihe versteht man die als bekannt vorausgesetzte Reihe

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

welche so weit man will fortgesetzt werden kann.

Das Intervall zwischen je zwei auf einander folgenden Zahlen dieser Reihe wird die Einheit genannt.

§. 2.

Erklärung. Die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe führen den Namen absolute ganze Zahlen.

Sie heißen absolute Zahlen im Gegensatz gegen die später folgenden algebraischen Zahlen, und ganze Zahlen im Gegensatz gegen die später folgenden Brüche.

§. 3.

Erklärung. Zur sichtbaren Bezeichnung von Zahlen dienen die Ziffern, oder in allgemeinen Untersuchungen die Buchstaben.

Unsere Ziffern stammen von den Indern, und sind durch die Araber zu uns gelangt. Den Griechen und Römern waren sie un-

bekannt. Der Gebrauch der Buchstaben dagegen, oder die sogenannte Buchstabenrechnung, ist neueren Ursprungs, und wurde durch Vieta (1540 — 1603) eingeführt.

§. 4.

Erklärung. Zwei Zahlen werden gleich genannt, wenn sie dieselbe Stelle in der Zahlenreihe einnehmen.

Unter einer Gleichung versteht man einen Ausdruck, welcher anzeigt, daß zwei Zahlen einander gleich sein sollen.

Z. B. die Gleichung $a = b$ bedeutet, daß die Buchstaben a und b die nämliche Stelle in der natürlichen Zahlenreihe anzeigen sollen.

§. 5.

Forderungssatz. Von einer gegebenen Zahl in der natürlichen Zahlenreihe einen Schritt vorwärts oder rückwärts zu machen.

§. 6.

Erklärung. Rechnen heißt: Von einer gegebenen Zahl in der Zahlenreihe auf eine vorgeschriebene Weise zu einer neuen Zahl übergehen. Diese letzte ist alsdann das Resultat der Rechnung.

Man unterscheidet drei Grundrechnungsarten: Addiren, Multipliciren und Potenziren, wozu sodann noch die Umkehrungen dieser Grundrechnungsarten kommen, nämlich: Subtrahiren, Dividiren, Wurzelausziehen und Logarithmiren.

Erste Grundrechnungsart. Addiren.

§. 7.

Erklärung. Addiren heißt: Von einer gegebenen Zahl in der Zahlenreihe so fortschreiten, wie eine zweite gegebene Zahl anzeigt.

Die beiden gegebenen Zahlen werden die Theile (Summanden) und die Zahl, zu welcher man gelangt, wird die Summe genannt.

Man bezeichnet eine Summe, wenn a der erste und b der zweite Theil derselben ist, durch $a + b$.

§. 8.

Aufgabe. Zu einer gegebenen absoluten ganzen Zahl a eine zweite gegebene absolute ganze Zahl b zu addiren.

Auflösung. Man schreite, von der Zahl a ausgehend, in der natürlichen Zahlenreihe um so viel Einheiten vorwärts wie die Zahl b anzeigt. So erhält man nach und nach

$$a + 1 + 1 + 1 + \ldots . (b \text{ mal})$$

und die Zahl, zu welcher man in der natürlichen Zahlenreihe schließlich gelangt, ist die gesuchte Summe.

Beispiel. $3 + 4 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7.$

§. 9.

Grundsatz. Wenn man die Ordnung der Theile einer Summe vertauscht, so bleibt die Summe unverändert.

Oder in Buchstaben ausgedrückt:

$$a + b = b + a.$$

Dieser Satz kann nicht bewiesen werden, weil noch kein anderer Satz vorhergegangen ist.

§. 10.

Lehrsatz. Zu einer Summe wird eine Zahl addirt, indem man diese Zahl zu einem beliebigen Theile jener Summe addirt.

In Buchstaben ausgedrückt:

$$(a + b) + c = (a + c) + b.$$

Beweis. Wenn man nach §. 8 die Summe $a + b$ wirklich ausführt, so hat man

$$a + b = a + 1 + 1 + 1 + \ldots . (b \text{ mal}).$$

Wird dazu die Zahl c addirt, so entsteht

$$(a+b) + c = a + 1 + 1 + 1 + \ldots (b \text{ mal}) + 1 + 1 + 1 + \ldots (c \text{ mal})$$

wofür man kürzer schreiben kann

$$(a+b) + c = a + 1 + 1 + 1 + \ldots . (b + c \text{ mal}).$$

Aber nach §. 9 ist $b + c = c + b$. Folglich darf man statt dieser letzten Gleichung auch schreiben

$$(a+b) + c = a + 1 + 1 + 1 + \ldots . (c+b \text{ mal})$$

und dies ist wieder gleichbedeutend mit

$$(a+b) + c = a + 1 + 1 + 1 + \ldots (c \text{ mal}) + 1 + 1 + 1 + \ldots (b \text{ mal})$$

oder

$$(a+b) + c = (a+c) + b$$

was zu beweisen war.

Beispiel. $(8+m) + 5 = 13 + m$.

Anmerkung. Man hätte im Lehrsatze auch schreiben können

$$(a+b) + c = (b+c) + a.$$

Denn man darf die Ordnung der Theile a und b vertauschen, ohne daß die Summe derselben sich ändert.

§. 11.

Zusatz. Zwei Summen werden addirt, indem man die Theile derselben in beliebiger Ordnung addirt.

$$(a+b) + (c+d) = a + b + c + d.$$

§. 12.

Erklärung. Eine absolute ganze Zahl wird größer als eine andere genannt, wenn sich eine dritte absolute ganze Zahl angeben läßt, welche zu der zweiten addirt eine der ersten gleiche Summe hervorbringt.

Die zweite heißt kleiner als die erste.

Man schreibt $a > b$ oder $b < a$, um anzuzeigen, daß a größer als b, oder b kleiner als a sei.

Z. B. man schreibt $12 > 7$ oder $7 < 12$.

§. 13.

Lehrsatz. Eine Summe absoluter ganzer Zahlen ist größer als jeder ihrer Theile.

$$a + b > a, \quad \text{und ebenso} \quad a + b > b.$$

Beweis. Im ersten Falle ist b eine Zahl, welche zu a addirt eine Summe gleich $a + b$ hervorbringt; folglich ist nach §. 12

$$a + b > a$$

was zu beweisen war. Ebenso im zweiten Falle.

Subtrahiren.

§. 14.

Erklärung. Subtrahiren heißt: Zu einer gegebenen Summe und einem gegebenen Theile den zweiten Theil suchen.

Die gegebene Summe wird der Minuend, der gegebene Theil der Subtrahend, und der gesuchte Theil die Differenz (der Rest) genannt.

Man bezeichnet eine Differenz, wenn a der Minuend und b der Subtrahend ist, durch $a - b$.

§. 15.

Zusatz. Werden Differenz und Subtrahend addirt, so ist die Summe beider gleich dem Minuend.

$$(a - b) + b = a.$$

Man macht von diesem Satze Gebrauch als Probe der Subtraction.

§. 16.

Aufgabe. Von einer gegebenen absoluten ganzen Zahl a eine zweite gegebene absolute ganze Zahl b zu subtrahiren.

Auflösung 1. Man schreite vom Minuend a aus, in der natürlichen Zahlenreihe um so viel Einheiten rückwärts wie der Subtrahend b anzeigt. Die Zahl, zu welcher man in der natürlichen Zahlenreihe dadurch gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Auflösung 2. Man schreite vom Subtrahend b aus, in der natürlichen Zahlenreihe um so viel Einheiten vorwärts, bis man zum Minuend a gelangt. Die Anzahl der zurückgelegten Einheiten ist die gesuchte Differenz.

Beispiel. Von 19 sei 8 zu subtrahiren, so findet man $19 - 8 = 11$. Probe: $11 + 8 = 19$.

§. 17.

Lehrsatz. Die Subtraction zweier absoluten ganzen Zahlen kann nur dann ausgeführt werden, wenn der Minuend größer als der Subtrahend ist.

Beweis. Gesetzt es sei der Minuend a nicht größer als der Subtrahend b, so würde man, nach Auflösung 1. der vorigen Aufgabe, vom Minuend a rückwärtsschreitend nicht so viel Schritte machen können, wie der Subtrahend b fordert, weil die natürliche Zahlenreihe rückwärts mit der Zahl 1 abbricht.

Oder man würde, nach Auflösung 2. der vorigen Aufgabe, vom Subtrahend b vorwärtsschreitend niemals zum Minuend a gelangen, weil der Minuend sich nicht vorwärts vom Subtrahend befindet.

Also würde in beiden Fällen die Rechnung sich nicht ausführen lassen, was zu beweisen war.

Beispiele. Ausführbar sind $12-5$, $21-20$, 2c.; dagegen nicht ausführbar $5-8$, $12-12$, 2c.

Zweite Grundrechnungsart. Multipliciren.

§. 18.

Erklärung. Multipliciren heißt: Eine gegebene Zahl so als Theil setzen, wie eine zweite gegebene Zahl anzeigt.

Die als Theil zu setzende Zahl heißt der Multiplicand; die Zahl, welche anzeigt, wie erstere als Theil gesetzt werden soll, der Multiplicator; beide mit einem gemeinschaftlichen Namen die Factoren; und die gesuchte Zahl das Product.

Man bezeichnet ein Product, wenn a der Multiplicand und b der Multiplicator desselben ist, durch $a.b$ oder ab.

Wenn ein Product aus einem Ziffern-Factor und einem Buchstaben-Factor besteht, z. B. $5a$, so pflegt man den ersteren voranzustellen und nennt ihn den Coefficienten des Buchstaben.

§. 19.

Aufgabe. Eine gegebene absolute ganze Zahl a mit einer zweiten gegebenen absoluten ganzen Zahl b zu multipliciren.

Auflösung. Man setze den gegebenen Multiplicand a so viel mal als Theil einer Summe, wie der gegebene Multiplicator b anzeigt. So erhält man

$$a.b = a + a + a + a + \ldots \text{ (} b \text{ mal)}$$

und die Zahl, zu welcher man durch Addition dieser Theile schließlich gelangt, ist das gesuchte Product.

Beispiel. $3.4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

§. 20.

Lehrsatz. Wenn Multiplicand und Multiplicator eines Products mit einander vertauscht werden, so bleibt das Product ungeändert.

$$a.b = b.a.$$

Beweis. Wenn man nach der vorigen Aufgabe das Product $a.b$ wirklich ausführt, so erhält man

$$a.b = a + a + a + a + \ldots \text{ (} b \text{ mal)}$$

oder, weil die Zahl a als die Summe von a Einen dargestellt werden kann,

$$\left.\begin{array}{l} a.b = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (} b \text{ mal)} \\ \quad\;\; + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \quad\;\; + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ \quad\;\;\; . \quad . \quad . \quad . \\ \quad\;\;\; . \quad . \quad . \quad . \\ \quad\;\;\; . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} (a \text{ mal})$$

Das so geschriebene Product enthält aber in jeder Horizontalreihe die Zahl b, und solcher Reihen stehen a unter einander; folglich kann man nach §. 11 diese Gleichung auch schreiben

$$a.b = b + b + b + \ldots \text{ (} a \text{ mal)}$$

und dies ist gleichbedeutend mit

$$a.b = b.a$$

was zu beweisen war.

Beispiel. Das Product 3.4 kann anschaulich dargestellt werden wie folgt

$$1 + 1 + 1 + 1$$
$$+ 1 + 1 + 1 + 1$$
$$+ 1 + 1 + 1 + 1.$$

Liest man dies in Verticalreihen, so hat man 3.4; liest man es aber in Horizontalreihen, so hat man 4.3. Folglich stellen 3.4 und 4.3 die nämliche Zahl dar.

§. 21.

Lehrsatz. Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Theil der Summe einzeln mit dieser Zahl multiplicirt.

$$(a + b) . c = ac + bc.$$

Beweis. Wenn man die Multiplication $(a + b) . c$ ausführt, so erhält man

$$(a + b) . c = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots . (c \text{ mal}).$$

Diese Gleichung kann man nach §. 11 umwandeln in

$$(a + b) . c = a + a + a + \ldots (c \text{ mal}) + b + b + b + \ldots (c \text{ mal})$$

und dies schreibt man kürzer

$$(a + b) . c = ac + bc$$

was zu beweisen war.

§. 22.

Zusatz. Eine Summe wird mit einer Summe multiplicirt, wenn man jeden Theil der einen Summe einzeln mit jedem Theile der anderen Summe multiplicirt.

$$(a + b) . (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Das Product der einen Summe mit einem einzelnen Theile der anderen Summe nennt man ein Partial=Product, und die Summe aller Partial=Producte bildet das Total=Product.

§. 23.

Lehrsatz. Zwei Producte, welche einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, werden addirt, wenn man die nicht gemeinschaftlichen Factoren beider addirt.

$$ac + bc = (a + b) . c.$$

Beweis. Wenn man die Multiplication $(a+b).c$ ausführt, so entsteht nach §. 21 wieder die Summe $ac+bc$. Folglich darf man für diese Summe auch jenes Product an die Stelle setzen, was zu beweisen war.

Beispiele. $12a+9a=21a$, $3b+b=4b$, $ac+c=(a+1)c$, ꝛc.

Anmerkung. Die durch diesen Satz ausgedrückte Operation nennt man das Absondern eines gemeinschaftlichen Factors.

§. 24.

Lehrsatz. Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen beliebigen Factor des Products mit dieser Zahl multiplicirt.

$$ab.c = ac.b.$$

Beweis. Wenn man nach §. 19 das Product ab wirklich ausführt, so erhält man

$$ab = a + a + a + \ldots. \text{ (} b \text{ mal).}$$

Multiplicirt man das so geschriebene Product mit dem Factor c, und macht dabei Gebrauch von §. 21, so hat man ferner

$$ab.c = ac + ac + ac + \ldots. \text{ (} b \text{ mal)}$$

und dies ist kürzer

$$ab.c = ac.b$$

was zu beweisen war.

Beispiel. $5a.7 = 35a$.

Anmerkung. Man hätte im Lehrsatze auch schreiben können

$$ab.c = bc.a.$$

Denn die Factoren a und b dürfen vertauscht werden, ohne daß ihr Product sich ändert.

§. 25.

Zusatz. Zwei Producte werden multiplicirt, wenn man die Factoren derselben in beliebiger Ordnung multiplicirt.

$$ab.cd = abcd.$$

§. 26.

Erklärung. Eine absolute ganze Zahl wird ein Vielfaches einer andern genannt, wenn sich eine dritte absolute ganze Zahl angeben läßt, welche mit der zweiten multiplicirt ein der ersten gleiches Product hervorbringt.

Die zweite heißt ein Theiler der ersten.

Man sagt auch, die eine Zahl sei theilbar durch die andere, oder diese gehe in jener auf.

Z. B. 12 ist ein Vielfaches von 4 (nämlich das Dreifache) oder theilbar durch 4. Und 4 geht in 12 auf (nämlich drei Mal) oder ist ein Theiler von 12.

§. 27.

Lehrsatz. Ein Product absoluter ganzer Zahlen ist ein Vielfaches eines jeden seiner Factoren.

ab ist ein Vielfaches von a,

und ebenso ab ist ein Vielfaches von b.

Beweis. Im ersten Falle ist b eine Zahl, welche mit a multiplicirt ein Product gleich ab hervorbringt. Folglich ist nach §. 26

ab ein Vielfaches von a,

was zu beweisen war. Ebenso im zweiten Falle.

Dividiren.

§. 28.

Erklärung. Dividiren heißt: Zu einem gegebenen Producte und einem gegebenen Factor den zweiten Factor suchen.

Das gegebene Product wird der Dividend, der gegebene Factor der Divisor, und der gesuchte Factor der Quotient genannt.

Man bezeichnet einen Quotienten, wenn a der Dividend und b der Divisor ist, durch $a:b$ oder $\frac{a}{b}$.

§. 29.

Zusatz. Werden Quotient und Divisor multiplicirt, so ist das Product beider gleich dem Dividend.

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Man macht von diesem Satze Gebrauch als Probe der Division.

§. 30.

Aufgabe. Eine gegebene absolute ganze Zahl a durch eine zweite gegebene absolute ganze Zahl b zu dividiren.

Auflösung 1. Man zerlege den Dividend a in so viel gleiche Theile, wie der Divisor b angiebt. Einer dieser Theile ist der gesuchte Quotient.

Auflösung 2. Man setze den Divisor b so viel mal als Theil, bis man den Dividend a erreicht hat. Die Anzahl der gesetzten Theile ist der gesuchte Quotient.

Beispiel. Es sei 36 durch 4 zu dividiren, so findet man $36:4 = 9$. Probe: $9.4 = 36$.

§. 31.

Lehrsatz. Die Division zweier absoluten ganzen Zahlen kann nur dann ausgeführt werden, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist.

Beweis. Gesetzt es sei der Dividend a nicht ein Vielfaches des Divisors b, so würde man, nach Aufl. 1 der vorigen Aufgabe, den Dividend nicht in so viel gleiche Theile zerlegen können wie der Divisor angiebt, weil die Theilungen zwischen die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe fallen müßten.

Oder man würde, nach Aufl. 2 der vorigen Aufgabe, durch wiederholtes Setzen des Divisors, als Theil, niemals den Dividend erreichen, weil man in der natürlichen Zahlenreihe entweder schon vor dem Dividend abbrechen, oder den Dividend überschreiten müßte.

Also würde in beiden Fällen die Rechnung sich nicht ausführen lassen, was zu beweisen war.

Beispiele. Ausführbar sind 12:3, 40:8, ꝛc.; dagegen nicht ausführbar 12:5, 2:7, ꝛc.

Dritte Grundrechnungsart. Potenziren.

§. 32.

Erklärung. Potenziren heißt: Eine gegebene Zahl so als Factor setzen, wie eine zweite gegebene Zahl anzeigt.

Die als Factor zu setzende Zahl heißt die **Basis**; die Zahl, welche anzeigt, wie erstere als Factor gesetzt werden soll, der **Exponent**; und die gesuchte Zahl die **Potenz**.

Man bezeichnet eine Potenz, wenn a die Basis und b der Exponent ist, mit a^b.

Die Bezeichnung a^b rührt von Descartes her, welcher sie zuerst in seiner Geometrie 1637 gebrauchte, und damit zugleich den ersten Schritt that, um das Potenziren als selbständige Rechnungsart hinzustellen. Potenzen mit negativen und mit Bruch-Exponenten (s. d. siebenten Abschnitt) fügte 1655 Wallis hinzu. Vorher hatte man nur Benennungen für gewisse Potenzen, von denen im Gebrauch geblieben sind: Quadrat für die zweite, Cubus für die dritte und Biquadrat für die vierte Potenz.

§. 33.

Aufgabe. Eine gegebene absolute ganze Zahl a mit einer zweiten gegebenen absoluten ganzen Zahl b zu potenziren.

Auflösung. Man setze die gegebene Basis a so viel mal als Factor eines Products, wie der gegebene Exponent b anzeigt. Man erhält so

$$a^b = a \,.\, a \,.\, a \ldots. \;(b \text{ mal})$$

und die Zahl, zu welcher man durch Multiplication dieser Factoren schließlich gelangt, ist die gesuchte Potenz.

Beispiel. $5^3 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125$.

Zur Erleichterung der Rechnung kann die nachstehende Tabelle dienen, welche für das Potenziren dieselbe Bedeutung hat, wie das Ein-mal-Eins für die Multiplication.

Potenzen-Tafel.

Exponenten	Potenzen									
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000

§. 34.

Lehrsatz. Wenn Basis und Exponent einer Potenz vertauscht werden, so bleibt im Allgemeinen die Potenz nicht dieselbe.

$$a^b \gtreqless b^a.$$

Beweis. Man kann dies schon aus beliebig gewählten Beispielen erkennen. Betrachtet man z. B. die Potenzen 3^4 und 4^3, so findet man

$$3^4 = 81, \quad 4^3 = 64.$$

Aus der Verschiedenheit der beiden Resultate geht aber hervor, daß ein Satz wie §. 9 und §. 20 für das Potenziren nicht aufgestellt werden kann, wie zu beweisen war.

Anmerkung. Die Vertauschung von Basis und Exponent, ohne daß dadurch die Potenz geändert wird, ist nur zulässig, wenn Basis und Exponent einander gleich sind, und in dem besonderen Falle $2^4 = 4^2$.

Wurzelausziehen.

§. 35.

Erklärung. Wurzelausziehen heißt: Zu einer gegebenen Potenz und einem gegebenen Exponenten die Basis suchen.

Die gegebene Potenz wird die gegebene Zahl, der gegebene Exponent der Wurzel-Exponent, und die gesuchte Basis die Wurzel genannt.

Man bezeichnet eine Wurzel, wenn a die gegebene Zahl und b der Wurzel-Exponent ist, mit $\sqrt[b]{a}$.

Das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ ist der Anfangsbuchstabe des Wortes **radix**, und findet sich gleichfalls bei Descartes.

Die zweite Wurzel wird auch Quadratwurzel, und die dritte Wurzel Cubikwurzel genannt. Bei der Bezeichnung der Quadratwurzel pflegt man den Wurzel-Exponenten wegzulassen, also bloß zu schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

§. 36.

Zusatz. Wird die Wurzel mit dem Wurzel-Exponenten potenzirt, so ist die Potenz gleich der gegebenen Zahl.

$$(\sqrt[b]{a})^b = a.$$

Man macht von diesem Satze Gebrauch als Probe des Wurzelausziehens.

§. 37.

Aufgabe. Aus einer absoluten ganzen gegebenen Zahl a die Wurzel des absoluten ganzen Exponenten b zu ziehen.

Auflösung. Man zerlege die gegebene Zahl a in so viel gleiche Factoren, wie der Wurzel-Exponent b anzeigt. Einer dieser Factoren ist die gesuchte Wurzel.

Beispiel. Es sei aus 81 die 4te Wurzel zu ziehen, so hat man $\sqrt[4]{81} = 3$. Probe: $3^4 = 81$.

Zur Ausführung dieser Rechnung kann man bequem die obige Potenzen-Tafel benutzen, welche nöthigen Falls weiter fortgesetzt werden muß. Man wird aber leicht finden, daß die Rechnung nur in ganz besonders ausgewählten Beispielen wirklich ausgeführt werden kann. Z. B. ausführbar sind $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[4]{1296}$, 2c.; dagegen nicht ausführbar $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{436}$, $\sqrt[4]{2}$, 2c.

Logarithmiren.

§. 38.

Erklärung. Logarithmiren heißt: Zu einer gegebenen Potenz und einer gegebenen Basis den Exponenten suchen.

Die gegebene Potenz wird die gegebene Zahl (der Numerus), die gegebene Basis die logarithmische Basis, und der gesuchte Exponent der Logarithmus genannt.

Man bezeichnet einen Logarithmus, wenn a die gegebene Zahl und b die logarithmische Basis ist, mit $\overset{b}{\log}\, a$.

Die Erfindung der Logarithmen verdankt man dem schottischen Baron Napier*) 1614. Die Erfindung geschah unter einem so eigenthümlichen Gesichtspunkte, daß man erst spät dahin kam, in dem Logarithmiren eine eigene Rechnungsart und eine Umkehrung des Potenzirens zu erkennen.

§. 39.

Zusatz. Wird die logarithmische Basis mit dem Logarithmus potenzirt, so ist die Potenz gleich der gegebenen Zahl.

$$b^{(\overset{b}{\log} a)} = a.$$

Man macht von diesem Satze Gebrauch als Probe des Logarithmirens.

§. 40.

Aufgabe. Von einer absoluten ganzen gegebenen Zahl a für eine absolute ganze logarithmische Basis b den Logarithmus zu suchen.

Auflösung. Man setze die logarithmische Basis b so viel mal als Factor, bis die gegebene Zahl a erreicht ist. Die Anzahl der gesetzten Factoren ist der gesuchte Logarithmus.

Beispiel. Es sei der Logarithmus von 625 für die Basis 5 zu finden, so erhält man $\overset{5}{\log} 625 = 4$. Probe: $5^4 = 625$.

Zur Ausführung dieser Rechnung kann wieder die obige Potenzen-Tafel dienen, welche nöthigen Falls weiter fortgesetzt werden muß. Man wird aber auch hier leicht finden, daß die Rechnung nur in ganz besonders ausgewählten Beispielen wirklich ausgeführt werden kann. Z. B. ausführbar sind $\overset{5}{\log} 25$, $\overset{7}{\log} 343$, $\overset{8}{\log} 4096$, ꝛc.; dagegen nicht ausführbar $\overset{3}{\log} 51$, $\overset{8}{\log} 6$, $\overset{10}{\log} 998$, ꝛc.

---

*) Die gewöhnliche Schreibart dieses Namens, welche man in deutschen Werken findet, nämlich Neper oder Nepper, ist eine Nachahmung der französischen Orthographie, welche sich wie bekannt fremde Namen mundrecht zu machen liebt.

Zweiter Abschnitt.

Rechnung mit algebraischen ganzen Zahlen.

---

§. 41.

Forderungssatz. Die natürliche Zahlenreihe rückwärts über Eins hinaus beliebig zu verlängern.

Die hier geforderte Erweiterung der Zahlenreihe hat den Zweck, daß die Beschränkung aufgehoben werde, welcher nach §. 17 das Subtrahiren unterliegt.

§. 42.

Erklärung. Die durch Verlängerung der natürlichen Zahlenreihe, rückwärts über Eins hinaus, entstehende neue Zahlenreihe wird bezeichnet

$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$$

§. 43.

Erklärung. Die Zahlen der dadurch erweiterten Zahlenreihe, daß man die natürliche Zahlenreihe rückwärts über Eins hinaus verlängert hat, führen den Namen *algebraische ganze Zahlen.*

Insbesondere heißen die ursprünglich vorhanden gewesenen absoluten ganzen Zahlen hier *positive ganze Zahlen.*

Ferner die Zahl, zu welcher man gelangt, wenn man von Eins um eine Einheit rückwärts schreitet, erhält den Namen Null. Oder $0 = 1 - 1$.

Endlich die Zahlen, zu denen man gelangt, wenn man von Eins um mehrere Einheiten rückwärts schreitet, werden *negative ganze Zahlen* genannt.

Die Zahlenreihe der algebraischen ganzen Zahlen ist nach zwei Seiten unbegränzt, und wird durch die Zahl Null in eine *positive Seite* und eine *negative Seite* zerlegt. Und statt der Wörter Vorwärtsschreiten und Rückwärtsschreiten kann man hier die Ausdrücke gebrauchen: Fortschreiten in *positiver Richtung* und Fortschreiten in *negativer Richtung.*

Die Benennung „algebraische Zahlen" ist von der Algebra genommen, welche zuerst auf solche und namentlich auf negative Zahlen geführt hat.

§. 44.

Erklärung. Mit Ausnahme der Null besteht jede algebraische ganze Zahl $\pm a$ aus einem Vorzeichen $\pm$ und einem Zahlwerthe a.

Das Vorzeichen $+$ für positive und $-$ für negative Zahlen zeigt an, auf welcher Seite der Zahlenreihe sich die Zahl befindet.

Der Zahlwerth ist eine absolute ganze Zahl, und zeigt an, welche Stelle die Zahl in der Reihe der positiven oder der negativen Zahlen einnimmt.

Addition.

§. 45.

Aufgabe. Zu einer gegebenen algebraischen ganzen Zahl a eine zweite gegebene algebraische ganze Zahl b zu addiren.

Auflösung. Man suche die Zahl a in der Zahlenreihe auf, und schreite von ihr in derjenigen Richtung fort, welche das Vorzeichen von b angiebt, und um so viel Einheiten, wie der Zahlwerth von b anzeigt. Diejenige Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Summe.

Beispiele. $(+2) + (-7) = -5$, $(-9) + (+13) = +4$, ꝛc.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieser Rechnung kann man eine Menge von Fällen des praktischen Lebens anführen, in denen sie Anwendung findet. Z. B. man hat von einem Punkte aus 2 Schritte vorwärts gemacht, und geht darauf 7 Schritte rückwärts. Oder ein Thermometer steht 2 Grad über Null, und fällt darauf 7 Grad. Oder man hat 2 Thaler Einnahme gehabt, und macht darauf 7 Thaler Ausgabe. U. s. f.

§. 46.

Lehrsatz. Zwei Zahlen von gleichen Vorzeichen werden addirt, indem man ihre Zahlwerthe addirt und dieser Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen giebt.

Zwei Zahlen von verschiedenen Vorzeichen werden addirt, indem man den kleineren Zahlwerth von dem größeren subtrahirt und dieser Differenz das Vorzeichen des größeren Zahlwerths giebt.

$$(+a) + (+b) = +(a+b)$$
$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$
$$(+a) + (-b) = +(a-b) \text{ oder } = -(b-a)$$
$$(-a) + (+b) = -(a-b) \text{ oder } = +(b-a).$$

Beweis. $(+a) + (+b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $+a$ aus in positiver Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man in der natürlichen Zahlenreihe zu der absoluten Zahl a die absolute Zahl b addirt. Folglich gelangt man zu der Zahl $a+b$, mit dem Vorzeichen $+$ versehen, d. i. zu $+(a+b)$ w. z. b. w.

$(-a) + (-b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $-a$ aus in negativer Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man in der natürlichen Zahlenreihe zu der absoluten Zahl a die absolute Zahl b addirt. Folglich gelangt man zu der Zahl $a+b$, mit dem Vorzeichen $-$ versehen, d. i. zu $-(a+b)$ w. z. b. w.

$(+a) + (-b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $+a$ aus in negativer Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man in der natürlichen Zahlenreihe von der absoluten Zahl a die absolute Zahl b subtrahirt. Folglich gelangt man, wenn $a > b$ ist, zu der Zahl $a-b$, mit dem Vorzeichen $+$ versehen, d. i. zu $+(a-b)$. Oder man gelangt, wenn $a < b$ ist, zu der Zahl $b-a$, mit dem Vorzeichen $-$ versehen, d. i. zu $-(b-a)$ w. z. b. w.

$(-a) + (+b)$ zeigt an, man soll von der Zahl $-a$ aus in positiver Richtung um b Einheiten fortschreiten. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man in der natürlichen Zahlenreihe von der absoluten Zahl a die absolute Zahl b subtrahirt. Folglich gelangt man, wenn $a > b$ ist, zu der Zahl $a-b$, mit dem Vorzeichen $-$ versehen, d. i. zu $-(a-b)$. Oder man gelangt, wenn $a < b$ ist, zu der Zahl $b-a$, mit dem Vorzeichen $+$ versehen, d. i. zu $+(b-a)$ w. z. b. w.

§. 47.

Lehrsatz. Zwei Zahlen von gleichen Zahlwerthen und verschiedenen Vorzeichen geben zur Summe Null.

$$(+a)+(-a)=0$$
$$(-a)+(+a)=0.$$

Beweis. $(+a)+(-a)$ bedeutet, man soll von der Zahl $+a$ in negativer Richtung um a Einheiten fortschreiten.

$(-a)+(+a)$ bedeutet, man soll von der Zahl $-a$ in positiver Richtung um a Einheiten fortschreiten.

Beide Wege führen zu der Zahl 0, w. z. b. w.

Beispiel. $(+7)+(-7)=0$.

§. 48.

Lehrsatz. Wenn Null Theil einer Summe ist, so ist die Summe gleich dem anderen Theile.

$$0+a=a$$
$$a+0=a.$$

Beweis. $0+a$ bedeutet, man soll von der Zahl 0 in derjenigen Richtung fortschreiten, welche das Vorzeichen von a angiebt, und um so viel Einheiten, wie der Zahlwerth von a anzeigt. Dadurch gelangt man aber zu der Zahl a, w. z. b. w.

$a+0$ bedeutet, man soll von der Zahl a in der Zahlenreihe so fortschreiten, wie die Zahl 0 anzeigt. Aber nach §. 43 ist $0=1-1$, also $a+0=a+1-1$, und dieses heißt, man soll von a aus eine Einheit in positiver Richtung und darauf eine Einheit in negativer Richtung schreitend zurücklegen. Also gelangt man wieder zu der Zahl a, w. z. b. w.

Beispiel. $0+7=7$, $7+0=7$.

§. 49.

Erklärung. Eine algebraische ganze Zahl wird größer als eine andere genannt, wenn sich eine positive Zahl angeben läßt, welche zu der zweiten addirt eine der ersten gleiche Summe hervorbringt.

Die zweite heißt kleiner als die erste.

Man darf diese Erklärung nicht verwechseln mit der Erklärung §. 12. Es ist z. B. die absolute Zahl 3 kleiner als die absolute Zahl 7; aber dennoch ist die algebraische Zahl $+3$ größer als die algebraische Zahl -7, denn zu letzterer muß eine positive Zahl, nämlich $+10$, addirt werden, damit die erstere als Summe erscheint.

Subtraction.

§. 50.

Erklärung. Eine Zahl wird das Entgegengesetzte einer anderen genannt, wenn beide zur Summe Null geben.

Z. B. $+5$ und -5, 0 und 0, a und $-a$, ꝛc.

§. 51.

Lehrsatz. Die Subtraction kann immer in eine Addition verwandelt werden, indem man statt des Subtrahenden sein Entgegengesetztes setzt.

$$a - b = a + \text{Entggſ. v. } b.$$

Beweis. Man mache die Probe der Subtraction (§. 15), indem man zu der angegebenen Differenz

$$a + \text{Entggſ. v. } b$$

den Subtrahend b addirt, also

$$(a + \text{Entggſ. v. } b) + b.$$

Um diese Addition auszuführen, hat man nach §. 10

$$(a + \text{Entggſ. v. } b) + b = (\text{Entggſ. v. } b + b) + a,$$

oder, weil nach der vorigen Erklärung das Entgegengesetzte von b, und b, zur Summe 0 geben,

$$(a + \text{Entggſ. v. } b) + b = 0 + a,$$

oder endlich weil (nach §. 48) $0 + a = a$ ist,

$$(a + \text{Entggſ. v. } b) + b = a.$$

Folglich kommt durch die Probe der Minuend a wieder zum Vorschein, und mithin ist „$a + \text{Entggſ. v. } b$“ die richtige Differenz, w. z. b. w.

Beispiele. $(+7) - (+2) = (+7) + (-2) = +5$, Probe: $(+5) + (+2) = +7$.

$(-9)-(-1)=(-9)+(+1)=-8$, Probe: $(-8)+(-1)=-9$.

$0-(+4)= 0 +(-4)=-4$, Probe: $(-4)+(+4)=0$.

Anmerkung. In Folge dieses Lehrsatzes kann man das Vorzeichen — allgemein als Zeichen des Entgegengesetzten ansehen, und jeden Ausdruck wie $a - b$ ohne Weiteres als Summe lesen, nämlich: Zu a soll das Entgegengesetzte von b addirt werden.

Multiplication.

§. 52.

Aufgabe. Eine gegebene algebraische ganze Zahl a mit einer gegebenen algebraischen ganzen Zahl b zu multipliciren.

Auflösung. Wenn der Multiplicator b positiv ist, so setze man den Multiplicand a selbst so viel mal als Theil, wie der Zahlwerth von b anzeigt.

Wenn der Multiplicator b negativ ist, so setze man das Entgegengesetzte des Multiplicand a so viel mal als Theil, wie der Zahlwerth von b anzeigt.

Diejenige Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man auf diese Weise gelangt, ist das gesuchte Product.

Beispiele. $-5 . +3 = -15$, $-7 . -3 = +21$, 2c.

§. 53.

Lehrsatz. Gleiche Vorzeichen der Factoren geben ein positives Product, ungleiche Vorzeichen geben ein negatives Product.

Der Zahlwerth des Products ist gleich dem Producte der Zahlwerthe der Factoren.

$$\left.\begin{matrix} +a . +b = \\ -a . -b = \end{matrix}\right\} +ab$$

$$\left.\begin{matrix} -a . +b = \\ +a . -b = \end{matrix}\right\} -ab.$$

Beweis. $+a . +b$ zeigt an, man soll den Multiplicand $+a$ selbst b mal als Theil setzen; also

$$+a + a + a + \ldots (b \text{ mal})$$

d. i. (nach §. 46) $+ab$, w. z. b. w.

$-a . -b$ zeigt an, man soll das Entgegengesetzte des Multiplicand $-a$, $b$mal als Theil setzen; also

$$+a + a + a + \ldots . (b \text{ mal})$$

d. i. $+ab$, w. z. b. w.

$-a . +b$ zeigt an, man soll den Multiplicand $-a$ selbst b mal als Theil setzen; also

$$-a-a-a- \ldots (b \text{ mal})$$

d. i. $-ab$, w. z. b. w.

$+a . -b$ zeigt an, man soll das Entgegengesetzte des Multiplicand $+a$, b mal als Theil setzen; also

$$-a-a-a- \ldots (b \text{ mal})$$

d. i. $-ab$, w. z. b. w.

§. 54.

Lehrsatz. Ein Product wird Null, wenn einer seiner Factoren Null ist.

$$0 . a = 0$$
$$a . 0 = 0.$$

Beweis. $0 . a$ bedeutet, man soll den Multiplicand 0 selbst (wenn a positiv ist) oder das Entgegengesetzte des Multiplicand 0 (wenn a negativ ist) so viel mal als Theil setzen, wie der Zahlwerth von a anzeigt. Da nun das Entgegengesetzte von 0 wieder 0 ist (§. 50), so erhält man in beiden Fällen

$$0+0+0+\ldots$$

und diese Summe ist nach §. 48 wieder 0, w. z. b. w.

$a . 0$ bedeutet, man soll den Multiplicand a so als Theil setzen wie 0 anzeigt. Aber nach §. 43 ist $0 = 1 - 1$, also $a.0 = a.(1-1)$, und dieses heißt, man soll den Multiplicand a selbst und das Entgegengesetzte von a als Theil setzen. Dies giebt $a - a$, d. i. (nach §. 50) 0, w. z. b. w.

Beispiel. $0.5 = 0$, $5.0 = 0$.

Division.

§. 55.

Lehrsatz. Gleiche Vorzeichen im Dividend und Divisor geben einen positiven Quotienten, ungleiche Vorzeichen geben einen negativen Quotienten.

Der Zahlwerth des Quotienten ist gleich dem Quotienten der Zahlwerthe im Dividend und Divisor.

$$\left.\begin{array}{r} +a:+b= \\ -a:-b= \end{array}\right\} +\frac{a}{b}$$

$$\left.\begin{array}{r} -a:+b= \\ +a:-b= \end{array}\right\} -\frac{a}{b}.$$

Beweis. Man mache die Probe der Division (§. 29), indem man in jedem dieser vier Fälle den angegebenen Quotienten mit dem Divisor multiplicirt:

$+\frac{a}{b}.+b$ giebt wieder $+a$ (nach §. 53 u. §. 29)

$+\frac{a}{b}.-b$ „ „ $-a$

$-\frac{a}{b}.+b$ „ „ $-a$

$-\frac{a}{b}.-b$ „ „ $+a$.

Folglich kommt in allen Fällen durch die Probe der gegebene Dividend wieder zum Vorschein, und mithin sind die Quotienten richtig, w. z. b. w.

Beispiele. $-24:+6=-4$, Probe: $-4.+6=-24$.
$-90:-18=+5$, Probe: $+5.-18=-90$.
$+12:-12=-1$, Probe: $-1.-12=+12$.
2c.

§. 56.

Lehrsatz. Wird Null durch eine von Null verschiedene Zahl dividirt, so ist der Quotient gleich Null.

Wird Null durch Null dividirt, so ist der Quotient gleich jeder beliebigen Zahl.

$0:a=0$

$0:0=$ jeder beliebigen Zahl.

Beweis. Man mache die Probe der Division:

1) Der Quotient 0 mit dem Divisor a multiplicirt giebt wieder den Dividend 0 (nach §. 54).

2) Jede beliebige Zahl, als Quotient genommen, mit dem Divisor 0 multiplicirt giebt wieder den Dividend 0 (gleichfalls nach §. 54). Folglich sind beide Quotienten richtig, w. z. b. w.

Anmerkung. Die Division $a:0$, wo a eine von Null verschiedene Zahl bedeutet, kann in algebraischen ganzen Zahlen nicht ausgeführt werden; denn keine algebraische ganze Zahl hält die Probe aus, mit dem Divisor 0 multiplicirt den Dividend a wieder hervorzubringen. Man sehe über diesen Fall §. 106.

Beispiele zur Uebung.

§. 57.

Beispiele zur Addition. Anwendung der Lehrsätze §§. 46—48, 10—11, 23.

$$1)\ \begin{array}{r} +15 \\ -\ 9 \\ \hline +\ 6 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} +a \\ +a \\ \hline +2a \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} +12b \\ -19b \\ \hline -\ 7b \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} 0 \\ -3c \\ \hline -3c \end{array} \qquad 5)\ \begin{array}{r} -a^3 \\ +2a^3 \\ \hline +\ a^3 \end{array}$$

$$6)\ \begin{array}{r} -\ 3 \\ +\ 7 \\ +11 \\ \hline +15 \end{array} \qquad 7)\ \begin{array}{r} -\ 3a \\ +\ 5a \\ -20a \\ \hline -18a \end{array} \qquad 8)\ \begin{array}{r} +32a^2b \\ -18a^2b \\ -\ a^2b \\ \hline +13a^2b \end{array} \qquad 9)\ \begin{array}{r} +\ a-2b \\ +3a-\ b \\ -4a+4b \\ \hline +\ b \end{array}$$

$$10)\ \begin{array}{r} +5a \\ -3b \\ +\ a \\ \hline +6a-3b \end{array} \qquad 11)\ \begin{array}{r} -17m^2r+6n^2r \\ +\ 2m^2r-8n^2r \\ \hline -15m^2r-2n^2r \end{array} \text{ oder } -(15m^2+2n^2)r \qquad 12)\ \begin{array}{r} +\ a^2bc \\ +2ab^2c \\ -\ abc^2 \\ \hline +(a+2b-c)abc \end{array}$$

Auszurechnen:

13) $(+7)+(-9)+(-1)+0+(+5)+(-6)=$

14) $(-3a)+(-a)+(+20a)+(-a)+(+6a)=$

15) $(+2a^2)+(-3b^2)+(+4b^2)+(+9a^2)+(+b^2)=$

16) $(+9a^2-6ab+c)+(-a^2-7ab-2c)+(+3a^2+c)=$

17) $(-a^2b-fg)+(+3a^2b+5c)+(+6c+3fg)=$

18) $(-2a^2b+12ab^2)+(+a^3-ab^2)+(-a^3-12a^2b+ab^2)=$

19) $(+x^2-xy-y^2)+(-x^2-xy+y^2)+(+x^2+2xy+y^2)=$

20) $(+9a^3-9a^2+a+1)+(+a^3-a^2+2a-1)=$

§. 58.

Beispiele zur Subtraction. Anwendung des Lehrsatzes §. 51.

$$1)\ \begin{array}{r} +15 \\ -\ 3 \\ \hline +18 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} +a \\ -a \\ \hline +2a \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} -9b \\ -2b \\ \hline -7b \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} 0 \\ -2c \\ \hline +2c \end{array} \qquad 5)\ \begin{array}{r} -\ a^5 \\ +3a^5 \\ \hline -4a^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6)\ +5a \\ -7c \\ \hline +5a+7c \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7)\ +3a^2b-3ab^2 \\ -a^2b-7ab^2 \\ \hline +4a^2b+4ab^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8)\ -12a^2b^3 \\ +a^3b^2 \\ \hline -(12b+a)a^2b^2 \end{array}$$

oder $+4ab(a+b)$

Auszurechnen:

9) $(-7)-(-1)=$ 10) $(+9a)-(-2a)=$

11) $(-3ab)-(+ab)=$ 12) $(+5ab)-(-b)=$

13) $(-12a^2+5b^2-c^2)-(+2a^2+b^2-7c^2)=$

14) $(+12mr-2p)-(-mr-nr+p)=$

Addition und Subtraction:

15) $(+27a^2)-(+b^2)+(+9b^2)-(-2a^2)-(+b^2)=$

16) $(-a^2+9ab+2b^2)-(+a^2-7b^2)+(+12ab)+(-3a^2-b^2)-(+12a^2-7ab-9b^2)=$

17) $(+12fg-19fh+2f)+(+13fg-fh-16f)-(-16fg-7fh-f)-(-9fg-12fh+f)=$

18) $(+m-n-p-q)+(+m+n-p+q)-(-m+n-p-q)-(3m+n-p+q)=$

§. 59.

Beispiele zur Multiplication. Anwendung der Lehrsätze §§. 53, 21—22, 24—25.

$$\begin{array}{r} 1)\ +5a \\ -7 \\ \hline -35a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2)\ -12a \\ -2c \\ \hline +24ac \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3)\ -2a^2b \\ +bc \\ \hline -2a^2b^2c \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4)\ +12abc \\ +3abc \\ \hline +36a^2b^2c^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5)\ -12ab-7ac+2b \\ \quad +bc \\ \hline -12ab^2c-7abc^2+2b^2c \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6)\ +9gh-12gm-6gn \\ \quad -3gh \\ \hline -27g^2h^2+36g^2hm+18g^2hn \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7)\ +a+b \\ \quad -a+2b \\ \hline -a^2-ab \\ \qquad +2ab+2b^2 \\ \hline -a^2+ab+2b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8)\ +12a^2-7ab+7b^2 \\ \quad +3a-2b \\ \hline +36a^3-21a^2b+21ab^2 \\ \qquad -24a^2b+14ab^2-14b^3 \\ \hline +36a^3-45a^2b+35ab^2-14b^3 \end{array}$$

Auszurechnen:

9) $(12abc).(-2bc)=$ 10) $(-9a^2).(-bc)=$

11) $(-2a-7b+12c).(-3c)=$

12) $(a+b).(a+b)=$

13) $(a-b).(a-b)=$

14) $(a+b).(a-b)=$

15) $(a+b-c).(-a+b+c)=$

16) $(3a+5b-7c).(a-2b+9c)=$

17) $(5a^2-3ab+7b^2).(3a-b)=$

18) $(-2a+3b-c^2).(-7a+c^2-3f)=$

19) $(3x^2-9xy+12y^2).(3x^2-7xy-2y^2)=$

20) $(x-a).(x-b).(x-c)=$

§. 60.

Beispiele zur Division. Anwendung der Lehrsätze §. 55, 29.

1) $-7a:+7=-a$
$$\begin{array}{l} -7a \\ \hline 0 \end{array}$$

2) $+12ab:-3a=-4b$
$$\begin{array}{l} +12ab \\ \hline 0 \end{array}$$

3) $+24a^2b:+6ab=+4a$
$$\begin{array}{l} +24a^2b \\ \hline 0 \end{array}$$

4) $-ab^2c:-a=+b^2c$
$$\begin{array}{l} -ab^2c \\ \hline 0 \end{array}$$

5) $(18acf-6abdf+9af):3af=6c-2bd+3$
$$\begin{array}{l} 18acf \\ \hline \quad -6abdf \\ \hline \qquad +9af \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

6) $(ac-bc):(a-b)=c$
$$\begin{array}{l} ac-bc \\ \hline 0 \end{array}$$

7) $(4a^2+6ab-4ax+9bx-15x^2):(2a+3b-5x)=2a+3x$
$$\begin{array}{l} 4a^2+6ab-10ax \\ \hline \qquad 6ax+9bx-15x^2 \\ \qquad 6ax+9bx-15x^2 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

8) $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$

$$\begin{array}{l} a^2 - ab \\ \hline + ab - b^2 \\ + ab - b^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Auszurechnen:

9) $-12ab : +3a =$ 10) $+28a^3bc : -7abc =$

11) $(16a^2b - 12ab^2 + 20b^3) : -4b =$

12) $(30a^2b - 6a^2c + 75ab^2 - 15abc) : (15ab - 3ac) =$

13) $(x^2 + xy + 2xz - 2y^2 + 7yz - 3z^2) : (x + 2y - z) =$

14) $(a^4 - 9a^2b^2 - 6abc^2 - c^4) : (a^2 - 3ab - c^2) =$

15) $(16a^4 - b^4) : (2a - b) =$

16) $(x^4 - y^4) : (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) =$

Dritter Abschnitt.

Eigenschaften der ganzen Zahlen in Bezug auf ihre Factoren.

Von Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen.

§. 61.

Erklärung. Jede durch 2 theilbare Zahl wird eine gerade Zahl, und jede nicht durch 2 theilbare Zahl eine ungerade Zahl genannt.

Eine gerade Zahl kann immer durch $2n$, eine ungerade durch $2n+1$ bezeichnet werden, wo n irgend eine absolute ganze Zahl bezeichnet.

§. 62.

Erklärung. Unter einer Primzahl versteht man jede absolute ganze und von Eins verschiedene Zahl, welche nur durch Eins und sich selbst theilbar ist.

Unter einer zusammengesetzten Zahl dagegen versteht man jede absolute ganze Zahl, welche auch durch andere Zahlen als Eins und sich selbst theilbar ist.

Die Untersuchungen über Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen, welche wegen ihrer Anwendungen hier eingeschaltet werden, machen die ersten Elemente einer umfangreichen Wissenschaft aus, die den Namen Theorie der Zahlen führt. Die Anfänge derselben findet man schon bei den Griechen. Denn die ganze Arithmetik der Griechen beschäftigte sich nur mit Untersuchungen dieser Art, welche die Natur und die Eigenschaften der Zahlen zum Gegenstande haben; das eigentliche Rechnen dagegen wurde von ihnen unter dem Namen Logistik abgesondert behandelt.

§. 63.

Aufgabe. Die Reihe der Primzahlen aufzufinden.

Auflösung. Man durchlaufe die natürliche Zahlenreihe von der Zahl 2 aus in Sprüngen zu je zwei, ebenso von der Zahl 3 aus in Sprüngen zu je drei, von der Zahl 5 aus in Sprüngen zu je fünf 2c. Einheiten. Wenn man darauf die getroffenen Zahlen wegwirft, so bilden die übrigbleibenden die gesuchte Reihe der Primzahlen.

Man kann auch das Verfahren dadurch abkürzen, daß man sogleich im Anfange alle geraden Zahlen wegläßt und mithin von der Zahl 3 beginnt.

Der Anfang der Reihe der Primzahlen ist

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, ...

Anmerkung. Diese Auflösung war bei den Griechen unter dem Namen das Sieb des Eratosthenes bekannt. Eratosthenes war ein Zeitgenosse des Archimedes und lebte zu Alexandria. Das Verfahren ist übrigens einfacher als es scheinen mag. Denn wenn man die Reihe der Primzahlen bis zu einer im voraus bestimmten Zahl z. B. 400 herstellen will, so darf man es schon da abbrechen, wo die Primzahlen, mit denen man die Zahlenreihe durchläuft, anfangen die Quadratwurzel aus 400 d. i. die Zahl 20 zu überschreiten, was sich leicht beweisen läßt.

§. 64.

Erklärung. Unter den einfachen Factoren einer Zahl versteht man diejenigen Primzahlen, deren Product sie ist.

§. 65.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl in ihre einfachen Factoren zu zerlegen.

Auflösung. Man dividire die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch welche sie theilbar ist. Den gefundenen Quotienten dividire man wieder durch die kleinste Primzahl, durch welche er theilbar ist. Mit dem neuen Quotienten verfahre man ebenso, und setze dies so lange fort, bis man zum Quotienten eine Primzahl erhält. Alsdann ist das Product aller Divisoren mit Einschluß des letzten Quotienten gleich der gegebenen Zahl.

Beispiel. Es sei 300 die gegebene Zahl, so erhält man

$$300 : 2 = 150$$
$$150 : 2 = 75$$
$$75 : 3 = 25$$
$$25 : 5 = 5$$

folglich ist $300 = 2.2.3.5.5$.

§. 66.

Lehrsatz. Eine gegebene Zahl a ist durch eine zweite gegebene Zahl b immer theilbar, wenn sie alle einfachen Factoren dieser Zahl als einfache Factoren in sich enthält.

Im entgegengesetzten Falle ist a durch b nicht theilbar.

Beweis. Im ersten Falle bilde man das Product aller derjenigen einfachen Factoren der Zahl a, welche nicht in der Zahl b enthalten sind. Dieses Product hat die Eigenschaft, mit b multiplicirt die Zahl a wieder hervorzubringen; es ist folglich der Quotient der Division $a : b$. Also ist dieser Quotient eine ganze Zahl, d. h. a theilbar durch b, w. z. b. w.

Im zweiten Falle ist ein Quotient in ganzen Zahlen nicht anzugeben, folglich a nicht theilbar durch b, w. z. b. w.

Beispiel. Die Zahl $300 = 2.2.3.5.5$ ist theilbar durch $75 = 3.5.5$; denn der Quotient ist $= 2.2$ oder $= 4$. Dagegen

nicht theilbar durch $35 = 5.7$; denn wegen des einfachen Factors 7, welcher in 300 nicht enthalten ist, kann ein Quotient in ganzen Zahlen nicht angegeben werden.

§. 67.

Aufgabe. Alle Theiler einer gegebenen Zahl aufzufinden.

Auflösung. Man zerlege die gegebene Zahl nach §. 65 in ihre einfachen Factoren, so sind diese einfachen Factoren Theiler der gegebenen Zahl. Ferner multiplicire man diese einfachen Factoren mit einander zu je zweien, zu je dreien, 2c., so sind die entstehenden Producte gleichfalls Theiler der gegebenen Zahl (§. 66). Fügt man hiezu endlich noch die Zahl Eins und die gegebene Zahl selbst, so hat man alle gesuchten Theiler.

Beispiel. Man hat (nach §. 65) $300 = 2.2.3.5.5$, und daraus findet man alle Theiler der Zahl 300 wie folgt:

1	2	$2.2 = 4$	$2.2.3 = 12$	$2.2.3.5 = 60$	$2.2.3.5.5 = 300$
	3	$2.3 = 6$	$2.2.5 = 20$	$2.2.5.5 = 100$	
	5	$2.5 = 10$	$2.3.5 = 30$	$2.3.5.5 = 150$	
		$3.5 = 15$	$2.5.5 = 50$		
		$5.5 = 25$	$3.5.5 = 75$		

Anmerkung. Die Anzahl aller Theiler einer gegebenen Zahl, wenn diese als einfache Factoren n mal die Primzahl p, n' mal die Primzahl p', n'' mal die Primzahl p'', 2c. enthält, ist $= (n+1)(n'+1)(n''+1) \ldots$. Dies kann jedoch hier nicht bewiesen werden.

§. 68.

Lehrsatz. Wenn eine Zahl a durch eine andere Zahl b theilbar ist, so ist auch jedes Vielfache der ersten Zahl a, z. B. an, theilbar durch die zweite Zahl b.

Beweis. Es sei $a:b = q$, wo der Quotient q nach der Voraussetzung eine ganze Zahl ist, so hat man nach §. 29

$$a = q.b$$

und daraus nach §. 24

$$an = qn.b.$$

Folglich ist der Quotient $an:b$ eine ganze Zahl, w. z. b. w.

Beispiel. Da 42 durch 7 theilbar ist, so auch die Zahlen 84, 126, 168, ꝛc. theilbar durch 7.

§. 69.

Lehrsatz. Wenn zwei Zahlen a und b durch eine dritte Zahl c theilbar sind, so ist auch ihre Summe $a+b$, so wie ihre Differenz $a-b$, durch diese dritte Zahl c theilbar.

Beweis. Es sei $a:c=q$ und $b:c=q'$, wo die Quotienten q und q' nach der Voraussetzung ganze Zahlen sind, so hat man §. 29

$$a = q.c$$
$$b = q'.c$$

und daraus nach §. 23

$$a+b = (q+q').c$$
$$a-b = (q-q').c.$$

Folglich sind die Quotienten $(a+b):c$ und $(a-b):c$ ganze Zahlen, w. z. b. w.

Beispiel. Die Zahlen 42 und 90 sind theilbar durch 6, folglich sind auch 132 und 48 theilbar durch 6.

Vom Rest der Division.

§. 70.

Erklärung. Unter dem Rest der Division zweier Zahlen a und b versteht man eine Zahl, welche erhalten wird, wenn man von dem Dividend a das größte Vielfache von b, welches in ihm enthalten ist, subtrahirt.

Der Rest der Division ist immer kleiner als der Divisor b. In dem besonderen Falle, wo a ein Vielfaches von b ist, hat er den Werth Null.

§. 71.

Zusatz. Wenn man eine Division $a:b$ in ganzen Zahlen ausgeführt hat, und mit q den Quotienten und mit r den Rest der Division bezeichnet, so wird der Rest der Division, r, erhalten, wenn man den Quotienten q mit dem Divisor b multiplicirt und dieses Product von dem Dividend a subtrahirt.

$$a - bq = r.$$

Und wenn man den Quotienten q mit dem Divisor b multiplicirt und zu diesem Producte den Rest r addirt, so kommt der Dividend a wieder zum Vorschein.

$$a = bq + r.$$

Z. B. Die Division 69 : 12 liefert in ganzen Zahlen den Quotienten 5, folglich ist $69 - 12.5 = 9$ der Rest der Division. Und die Summe $12.5 + 9$ giebt wieder den Dividend 69.

§. 72.

Lehrsatz. Wenn zwei Zahlen a und b durch eine dritte Zahl c theilbar sind, so ist auch der Rest der Division der beiden Zahlen a und b durch diese dritte Zahl c theilbar.

Beweis. Nennt man q den Quotienten und r den Rest der Division $a:b$, so ist nach §. 71

$$a - bq = r.$$

Nun ist nach der Voraussetzung b theilbar durch c, folglich ist auch (§. 68) das Product bq theilbar durch c.

Ferner ist nach der Voraussetzung a theilbar durch c.

Folglich ist auch (§. 69) die Differenz $a - bq$ theilbar durch c, d. h. r theilbar durch c, w. z. b. w.

§. 73.

Lehrsatz. Wenn der Divisor b und der Rest r einer Division $a:b$ durch eine dritte Zahl c theilbar sind, so ist auch der Dividend a durch diese dritte Zahl c theilbar.

Beweis. Nennt man q den Quotienten der Division $a:b$, so ist nach §. 71

$$a = bq + r.$$

Nun ist nach der Voraussetzung b theilbar durch c, folglich ist auch (§. 68) das Product bq theilbar durch c.

Ferner ist nach der Voraussetzung r theilbar durch c.

Folglich ist auch (§. 69) die Summe $bq + r$ theilbar durch c, d. h. a theilbar durch c, w. z. b. w.

Relative Primzahlen.

§. 74.

Erklärung. Man nennt relative Primzahlen jede zwei Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler außer Eins besitzen.

Z. B. 7 und 12, 27 und 14, ꝛc.

§. 75.

Erklärung. Der größte gemeinschaftliche Divisor gegebener Zahlen ist die größte Zahl, durch welche diese gegebenen Zahlen zugleich theilbar sind.

Der größte gemeinschaftliche Divisor zweier relativen Primzahlen ist die Zahl Eins.

§. 76.

Aufgabe. Von zwei gegebenen Zahlen den größten gemeinschaftlichen Divisor zu finden.

Auflösung 1. Man zerlege jede der beiden gegebenen Zahlen in ihre einfachen Factoren, und suche alle diejenigen von diesen einfachen Factoren heraus, welche in beiden Zahlen gemeinschaftlich vorkommen. Das Product dieser gemeinschaftlichen einfachen Factoren ist der gesuchte größte gemeinschaftliche Divisor der beiden gegebenen Zahlen.

Beispiel. Es seien gegeben 72 und 630, so ist

$$72 = 2.2.2.3.3$$
$$630 = 2.3.3.5.7$$

Die gemeinschaftlichen einfachen Factoren beider Zahlen sind 2.3.3. Also ist deren Product 18 der größte gemeinschaftliche Divisor von 72 und 630.

Auflösung 2. Man dividire die kleinere gegebene Zahl in die größere, den Rest wieder in die kleinere, den folgenden Rest in den vorigen Divisor, u. s. w. bis der Rest der Division Null wird. Alsdann ist der letzte Divisor der gesuchte größte gemeinschaftliche Divisor der beiden gegebenen Zahlen.

Beispiel. Es seien wieder gegeben 72 und 630, so erhält man nach und nach

$$\begin{array}{lll} 630:72 = 8, & 72:54 = 1, & 54:18 = 3. \\ \underline{576} & \underline{54} & \underline{54} \\ 54 & 18 & 0 \end{array}$$

Folglich ist der letzte Divisor 18 der größte gemeinschaftliche Divisor von 72 und 630.

Die erste Auflösung beruhet auf dem Lehrsatze §. 66, die zweite auf den Lehrsätzen §§. 72 und 73.

§. 77.

Erklärung. Der kleinste gemeinschaftliche Dividend gegebener Zahlen ist die kleinste Zahl, welche durch diese gegebenen Zahlen zugleich theilbar ist.

§. 78.

Aufgabe. Von zwei oder mehreren gegebenen Zahlen den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend zu finden.

Auflösung. Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre einfachen Factoren. Von diesen einfachen Factoren suche man diejenigen heraus, welche in zwei oder mehreren der gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen. Das Product dieser gemeinschaftlichen einfachen Factoren, multiplicirt mit dem Product der übrig gebliebenen nicht gemeinschaftlichen einfachen Factoren, giebt den gesuchten kleinsten gemeinschaftlichen Dividend der gegebenen Zahlen.

Beispiel. Es seien gegeben 30, 36, 48, so ist

$$\begin{array}{l|c|c|l} 30 = 2.3.5 = 2 & . & 3 & 5 \\ 36 = 2.2.3.3 = 2 & 2 & 3 & 3 \\ 48 = 2.2.2.2.3 = 2 & 2 & 3 & 2.2 \\ \hline & (2) & (2) & (3) \end{array}$$

Nun ist das Product der gemeinschaftlichen einfachen Factoren 2.2.3 = 12, das Product der nicht gemeinschaftlichen einfachen Factoren 2.2.3.5 = 60. Folglich ist 12.60 = 720 der kleinste gemeinschaftliche Dividend der Zahlen 30, 36, 48.

Wenn die Zerlegung der gegebenenZahlen in ihre einfachen Factoren nicht vorhergegangen ist, so kann man sie sogleich mit der Aufsuchung derjenigen einfachen Factoren, welche in zwei oder

mehreren der gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen, verbinden. Nämlich

30, 36, 48	: 2
15, 18, 24	: 2
15, 9, 12	: 3
5, 3, 4	

Die gemeinschaftlichen einfachen Factoren kommen hier als Divisoren vor, und ihr Product ist 2.2.3 = 12; das Product der nicht gemeinschaftlichen einfachen Factoren ist 5.3.4 = 60. Folglich ist 12.60 = 720 der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Dividend, wie vorhin.

Anmerkung. Wenn die gegebenen Zahlen keinen gemeinschaftlichen Theiler außer Eins besitzen, d. h. wenn sie, zu je zwei genommen, relative Primzahlen sind, so ist ihr kleinster gemeinschaftlicher Dividend gleich ihrem Product.

Vierter Abschnitt.

Rechnung mit Brüchen.

§. 79.

Erklärung. Eine Zahlenreihe interpoliren heißt: die Intervalle dieser Zahlenreihe durch Einschiebung neuer Zahlen in eine vorgeschriebene Anzahl unter sich gleicher Theile theilen.

§. 80.

Forderungssatz. Die Reihe der ganzen Zahlen durch eine gegebene Zahl zu interpoliren.

Die hier geforderte Erweiterung der Zahlenreihe hat den Zweck, daß die Beschränkung aufgehoben werde, welcher nach §. 31 die Division unterliegt.

§. 81.

Erklärung. Die durch Interpolation der Reihe der ganzen Zahlen, durch eine gegebene Zahl z. B. n, entstehende neue Zahlenreihe wird bezeichnet

$$\ldots -\frac{4}{n}, -\frac{3}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, +\frac{1}{n}, +\frac{2}{n}, +\frac{3}{n}, +\frac{4}{n}, +\ldots$$

und wird die Zahlenreihe der $n$tel genannt.

Dies wird deutlicher in einem Beispiele, indem man z. B. die Reihe der ganzen Zahlen, durch Zerlegung ihrer Einheiten in 3 gleiche Theile, in die Zahlenreihe der Drittel übergehen läßt, nämlich

$$\ldots -2 \quad , \quad -1 \quad , \quad 0 \quad , \quad +1 \quad , \quad +2, \ldots$$

$$\ldots -\tfrac{6}{3}, -\tfrac{5}{3}, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{3}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, 0, +\tfrac{1}{3}, +\tfrac{2}{3}, +\tfrac{3}{3}, +\tfrac{4}{3}, +\tfrac{5}{3}, +\tfrac{6}{3}, \ldots$$

§. 82.

Erklärung. Die Zahlen der dadurch erweiterten Zahlenreihe, daß man die Reihe der ganzen Zahlen durch eine beliebige Zahl interpolirt hat, führen den Namen Brüche oder gebrochene Zahlen.

Sie werden absolute Brüche genannt, wenn die Zahlenreihe rückwärts mit der Zahl Null abbricht; dagegen algebraische Brüche, wenn die Zahlenreihe über Null auch nach der negativen Seite unbegränzt fortgeht.

§. 83.

Erklärung. Jeder absolute Bruch $\frac{a}{b}$ besteht aus einem Zähler a und einem Nenner b.

Der Zähler ist eine absolute ganze Zahl, welche die Stelle anzeigt, die der Bruch in der interpolirten Zahlenreihe einnimmt.

Der Nenner ist eine absolute ganze Zahl, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile man die Einheit der Zahlenreihe getheilt hat.

Algebraische Brüche enthalten überdies noch ein Vorzeichen; mit Ausnahme der Null, welche weder Nenner noch Vorzeichen hat. Von den Vorzeichen der Brüche wird übrigens in dem Folgenden nicht mehr ausdrücklich die Rede sein, weil sich da nur Bekanntes aus dem zweiten Abschnitte wiederholen würde.

§. 84.

Erklärung. Uneigentliche Brüche sind diejenigen Brüche, welche in der interpolirten Zahlenreihe die Stellen der früheren ganzen Zahlen einnehmen. Z. B. $\frac{12}{3}$.

Eigentliche Brüche dagegen sind die zwischen den ganzen Zahlen eingeschobenen neuen Zahlen. Z. B. $\frac{5}{3}$.

In uneigentlichen Brüchen ist der Zähler stets ein Vielfaches des Nenners, in eigentlichen Brüchen dagegen nicht.

§. 85.

Erklärung. Aechte Brüche heißen diejenigen Brüche, deren Zähler kleiner ist als ihr Nenner. Z. B. $\frac{3}{7}$.

Unächte Brüche dagegen heißen diejenigen Brüche, deren Zähler größer ist als ihr Nenner. Z. B. $\frac{22}{7}$.

Ein unächter Bruch kann immer als ganze Zahl mit angehängtem ächten Bruche dargestellt werden, z. B. $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Eine Zahl von dieser Form pflegt man eine gemischte Zahl zu nennen.

Addition.

§. 86.

Aufgabe. Zu einem gegebenen Bruche $\frac{a}{b}$ einen zweiten gegebenen Bruch $\frac{c}{d}$ zu addiren.

Auflösung. Man suche den Bruch $\frac{a}{b}$ in der Zahlenreihe der $b$tel auf, und schreite von ihm in der Zahlenreihe um c solcher Theile der Einheit fort, wie sie die Zahlenreihe der $d$tel enthält. Derjenige Bruch, zu welchem man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Summe.

Beispiele. $\frac{7}{6} + \frac{2}{3} = \frac{11}{6}$, $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{29}{24}$, 2c.

Mehrentheils wird es (wie in dem zweiten der angeführten Beispiele) nöthig werden, daß die schon interpolirte Zahlenreihe eine nochmalige Interpolation erfährt.

Anmerkung. Zur Erläuterung lassen sich hier wieder verschiedene Fälle des praktischen Lebens anführen. Z. B. man hat auf einer Reise 17 geographische Meilen und 9 Seemeilen zurückgelegt. Oder ein Thermometer steht 23 Grad Réaumur über Null und soll um 7 Grad Fahrenheit steigen. Oder man erhält zu 15 Sgr. ein Geschenk von 8 Sgr. U. s. f. Auch kann man in diese Beispiele leicht wieder die Beziehungen des Positiven und Negativen legen, wie in der Anmerkung zu §. 45.

§. 87.

Lehrsatz. Brüche mit gleichen Nennern werden addirt, indem man ihre Zähler addirt und dieser Summe den gemeinschaftlichen Nenner giebt.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Beweis. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ zeigt an, man soll von der Zahl $\frac{a}{c}$ in der Zahlenreihe der $c$tel um b eben solcher Theile der Einheit, wie sie die Zahlenreihe der $c$tel enthält, fortschreiten. Dies ist aber derselbe Rechnungsgang, als ob man in der Reihe der ganzen Zahlen zu der Zahl a die Zahl b addirt. Folglich gelangt man zu der Zahl $a+b$, mit dem Nenner c versehen, d. i. zu $\frac{a+b}{c}$, w. z. b. w.

Beispiel. $\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

§. 88.

Lehrsatz. Wenn man den Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der Bruch mit dieser Zahl multiplicirt.

$$\frac{an}{b} = \frac{a}{b} \cdot n.$$

Beweis. Nach der Erklärung der Multiplication ist

$$an = a + a + a + \ldots (n \text{ mal})$$

folglich nach dem vorigen Lehrsatze auch

$$\frac{an}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots (n \text{ mal})$$

und dies ist kürzer

$$\frac{an}{b} = \frac{a}{b} . n$$

w. z. b. w.

§. 89.

Zusatz. Wenn man den Zähler eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt, so wird der Bruch durch diese Zahl dividirt.

$$\frac{a:n}{b} = \frac{a}{b} : n.$$

§. 90.

Lehrsatz. Wenn man den Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, so wird der Bruch durch diese Zahl dividirt.

$$\frac{a}{bn} = \frac{a}{b} : n.$$

Beweis. Die Zahlenreihe der bntel kann aus der Zahlenreihe der $b$tel dadurch hergeleitet werden, daß man die Zahlenreihe der $b$tel nochmals durch die Zahl n interpolirt. Folglich muß $\frac{1}{bn}$ wieder n mal als Theil gesetzt werden, damit $\frac{1}{b}$ entsteht, d. h. man hat

$$\frac{1}{bn} . n = \frac{1}{b}.$$

Setzt man dieses a mal, so erhält man nach §§. 24 und 88

$$\frac{a}{bn} . n = \frac{a}{b},$$

und daraus folgt endlich nach Erklärung der Division

$$\frac{a}{bn} = \frac{a}{b} : n$$

w. z. b. w.

§. 91.

Zusatz. Wenn man den Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt, so wird der Bruch mit dieser Zahl multiplicirt.

$$\frac{a}{b:n} = \frac{a}{b} . n.$$

§. 92.

Lehrsatz. Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt, so bleibt der Bruch sich gleich.

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}, \quad \text{und} \quad \frac{a:n}{b:n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. 1) Wenn man zuerst den Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ mit n multiplicirt, so wird nach §. 88 der Bruch mit a multiplicirt, oder

$$\frac{an}{b} = \frac{a}{b} . n.$$

Wenn man darauf den Nenner dieses Bruchs $\frac{an}{b}$ mit n multiplicirt, so wird nach §. 90 der Bruch durch n dividirt, oder

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b} . n : n.$$

Aber nach der Erklärung der Division ist $\frac{a}{b} . n : n = \frac{a}{b}$, folglich hat man schließlich

$$\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$$

w. z. b. w.

2) Ebenso aus den §§. 89 und 91.

Beispiele. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$ ꝛc. $\frac{7}{4} = \frac{14}{8} = \frac{21}{12} = \frac{28}{16}$ ꝛc.

§. 93.

Erklärung. Einen gegebenen Bruch erkleinern heißt: Zähler und Nenner desselben durch eine solche Zahl dividiren, daß Zähler nnd Nenner des entstehenden neuen Bruchs relative Primzahlen werden.

Der Bruch bleibt bei dieser Operation sich gleich (wegen §. 92) und wird nur durch kleinere Zahlen ausgedrückt.

§. 94.

Aufgabe. Einen gegebenen Bruch zu erkleinern.

Auflösung. Man suche von Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs den größten gemeinschaftlichen Divisor (§. 76), und dividire

durch denselben sowol den Zähler als den Nenner. Die gefundenen Quotienten sind sodann Zähler und Nenner des gesuchten erkleinerten Bruchs.

Beispiel. Es sei gegeben $\frac{72}{630}$. Zähler und Nenner dieses Bruchs haben (nach §. 76) den größten gemeinschaftlichen Divisor 18; folglich kann der Bruch durch die Zahl 18 erkleinert werden, und man erhält $\frac{72}{630} = \frac{4}{35}$.

Ebenso kann man mit Buchstaben verfahren. Z. B. der Bruch $\frac{a^2bc}{3ab^2}$ kann erkleinert werden durch ab, und man erhält $\frac{a^2bc}{3ab^2} = \frac{ac}{3b}$.

§. 95.

Aufgabe. Einen gegebenen Bruch $\frac{a}{b}$ auf einen gegebenen neuen Nenner bn zu bringen, welcher ein Vielfaches des anfänglichen Nenners ist.

Auflösung. Man dividire den gegebenen neuen Nenner bn durch den anfänglichen Nenner b, und mit dem gefundenen Quotienten n multiplicire man den anfänglichen Zähler a, so ist das Product an der Zähler des gesuchten Bruchs, welchem der gegebene Nenner bn als Nenner zugehört.

Also ist der gesuchte Bruch selbst $\frac{an}{bn}$.

Beispiele. Der Bruch $\frac{5}{7}$, auf den Nenner 42 gebracht, giebt $\frac{5}{7} = \frac{30}{42}$. Der Bruch $\frac{a}{c}$, auf den Nenner abc gebracht, giebt $\frac{a}{c} = \frac{a^2b}{abc}$.

Wenn eine gegebene ganze Zahl a auf einen gegebenen Nenner n gebracht werden soll, so kann man ähnlich verfahren. Denn man gebe der ganzen Zahl, als Zähler betrachtet, den Nenner Eins, so erhält man $a = \frac{a}{1} = \frac{an}{n}$.

Z. B. die ganze Zahl 5, auf den Nenner 9 gebracht, giebt $5 = \frac{45}{9}$.

§. 96.

Aufgabe. Zwei oder mehrere gegebene Brüche, deren Nenner ungleich sind, auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Auflösung. Man suche von den Nennern der gegebenen Brüche den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend (§. 78), und bringe auf diesen, als neuen Nenner, die gegebenen Brüche (§. 95). Alsdann erhalten die gegebenen Brüche gleiche Nenner, und der gemeinschaftliche Nenner ist der kleinste mögliche.

Beispiel. Die Brüche $\frac{17}{30}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{11}{48}$ haben zum kleinsten gemeinschaftlichen Nenner (Generalnenner) die Zahl 720, und nehmen, auf diesen Nenner gebracht, die Gestalt an $\frac{408}{720}$, $\frac{500}{720}$, $\frac{165}{720}$.

Mit Buchstaben kann man ebenso verfahren.

Z. B. $\frac{a^2}{bc}$ und $\frac{b^2}{ac}$ haben zum kleinsten gemeinschaftlichen Nenner die Zahl abc, und geben, auf diesen Nenner gebracht, $\frac{a^3}{abc}$ und $\frac{b^3}{abc}$.

§. 97.

Aufgabe. Zwei oder mehrere gegebene Brüche, deren Nenner ungleich sind, zu addiren.

Auflösung. Man bringe, nach der vorigen Aufgabe, die gegebenen Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, und verfahre alsdann nach §. 87.

Beispiele. $\frac{5}{4} + \frac{3}{7} = \frac{35}{28} + \frac{12}{28} = \frac{47}{28}$.

$\frac{17}{30} + \frac{25}{36} + \frac{11}{48} = \frac{408}{720} + \frac{500}{720} + \frac{165}{720}$ nach der vorigen Aufgabe, folglich $= \frac{1073}{720}$.

$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} = \frac{a^3}{abc} + \frac{b^3}{abc}$ nach der vorigen Aufgabe, folglich $\frac{a^3+b^3}{abc}$.

Wenn eine ganze Zahl und ein Bruch addirt werden sollen, so kann man der ganzen Zahl die Bruchform geben, indem man ihr, als Zähler betrachtet, den Nenner Eins beifügt, und dann wie vorhin verfahren.

Z. B. $a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$.

Subtraction.

§. 98.

Aufgabe. Zwei gegebene Brüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Da nach §. 51 die Subtraction immer in eine Addition verwandelt werden kann, so kann man, wenn die Nenner

der gegebenen Brüche gleich sind, nach §. 87 verfahren; dagegen wenn diese Nenner ungleich sind, nach §. 97.

Beispiele. $\frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, Probe $\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.
$\frac{9}{5} - \frac{3}{4} = \frac{21}{20}$, Probe $\frac{21}{20} + \frac{3}{4} = \frac{9}{5}$.
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$, Probe $\frac{ad-bc}{bd} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.
rc.

Multiplication.

§. 99.

Aufgabe. Einen gegebenen Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem zweiten gegebenen Bruche $\frac{c}{d}$ zu multipliciren.

Auflösung. Man zerlege den Multiplicand $\frac{a}{b}$ in so viel gleiche Theile, wie der Nenner d des Multiplicators $\frac{c}{d}$ anzeigt, und setze einen solchen Theil so viel mal als Theil, wie der Zähler c des Multiplicators vorschreibt. Diejenige Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man dadurch gelangt, ist das gesuchte Product.

Beispiele. $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$, $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{6} = \frac{14}{9}$, $\frac{9}{2} \cdot \frac{10}{3} = 15$, rc.

§. 100.

Lehrsatz. Brüche werden multiplicirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Beweis. Wenn man, nach der Auflösung der vorigen Aufgabe, erstens den Multiplicand $\frac{a}{b}$ in d gleiche Theile zerlegt, so ist ein solcher Theil (nach §. 90) $\frac{a}{bd}$.

Wenn man darauf diesen Theil $\frac{a}{bd}$, c mal als Theil setzt, so erhält man (nach §. 88) $\frac{ac}{bd}$.

Folglich ist das gesuchte Product $\frac{ac}{bd}$, w. z. b. w.

Anmerkung. Diesen Lehrsatz kann man auch anwenden, um eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren, nachdem man zuvor der ganzen Zahl, als Zähler betrachtet, den Nenner Eins beigefügt hat. Z. B. $\frac{2}{5} . 12 = \frac{2}{5} . \frac{12}{1} = \frac{24}{5}$.

Gemischte Zahlen muß man zuvor in unächte Brüche verwandeln, wenn man zu ihrer Multiplication den vorstehenden Lehrsatz gebrauchen will.

Z. B. $3\frac{2}{5} . 1\frac{1}{2} = \frac{17}{5} . \frac{3}{2} = \frac{51}{10} = 5\frac{1}{10}$.

Division.

§. 101.

Erklärung. Eine Zahl wird das Umgekehrte einer anderen genannt, wenn beide zum Product Eins geben.

Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$, 6 und $\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{7}$, ꝛc.

§. 102.

Lehrsatz. Die Division kann immer in eine Multiplication verwandelt werden, indem man statt des Divisors sein Umgekehrtes setzt.

$$a : b = a \,.\, \text{Umgek. v. } b.$$

Beweis. Man mache die Probe der Division (§. 29), indem man den angegebenen Quotienten

$$a \,.\, \text{Umgek. v. } b$$

mit dem Divisor b multiplicirt, also

$$(a \,.\, \text{Umgek. v. } b) \,.\, b.$$

Um diese Multiplication auszuführen, hat man nach §. 24

$$(a \,.\, \text{Umgek. v. } b) \,.\, b = (\text{Umgek. v. } b \,.\, b) \,.\, a,$$

oder weil nach der vorigen Erklärung das Umgekehrte von b, und b, zum Producte Eins geben,

$$(a \,.\, \text{Umgek. v. } b) \,.\, b = 1 \,.\, a,$$

oder endlich, weil $1 \,.\, a = a$ ist,

$$(a \,.\, \text{Umgek. v. } b) \,.\, b = a.$$

Folglich kommt durch die Probe der Dividend a wieder zum Vorschein, und mithin ist „a. Umgek. v. b" der richtige Quotient, w. z. b. w.

Beispiele. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} . \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$, Probe: $\frac{15}{8} . \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$.
$7 : \frac{5}{3} = \frac{7}{1} . \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$, Probe: $\frac{21}{5} . \frac{5}{3} = 7$.
$\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = \frac{1}{2} . \frac{6}{1} = 3$, Probe: $3 . \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
2c.

Anmerkung. In Folge dieses Lehrsatzes kann man allgemein das Umgekehrte irgend einer Zahl b bezeichnen durch $1 : b$ oder $\frac{1}{b}$.

§. 103.

Erklärung. Unter einem Bruchsbruch versteht man einen Bruch, welcher entweder im Zähler, oder im Nenner, oder im Zähler und Nenner zugleich, einen Bruch enthält.

Z. B. $$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}, \quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}, \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}.$$

§. 104.

Aufgabe. Einen gegebenen Bruchsbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Man betrachte den Bruchsbruch wie eine auszuführende Division und wende darauf den vorigen Lehrsatz an. Z. B.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} . \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a : \frac{b}{c} = a . \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Sind Zähler und Nenner des Bruchsbruchs Brüche mit gleichen Nennern, so kann der gemeinschaftliche Nenner sogleich weggelassen werden. Z. B.

$$\frac{\left(\frac{a}{m}\right)}{\left(\frac{b}{m}\right)} = \frac{a}{b}.$$

§. 105.

Erklärung. Unter einer **unendlich großen Zahl** versteht man eine Zahl, welche größer ist als jede noch so große Zahl, die man wirklich angeben kann.

Eine unendlich große Zahl bezeichnet man durch ∞.

Eine unendlich große Zahl kann niemals wirklich angegeben, sondern sie kann nur gedacht werden. Man hat sich zu dem Ende die Zahlenreihe nach beiden Seiten über alle Gränzen hinaus fortgesetzt zu denken, wodurch sich sowol $+\infty$ als $-\infty$ ergiebt.

§. 106.

Lehrsatz. Wird eine von Null verschiedene Zahl durch Null dividirt, so ist der Quotient unendlich groß.

$$a : 0 = \infty.$$

Beweis. Die Zahl Null kann wie eine Gränze angesehen werden, welcher ein Bruch immer näher gebracht wird, wenn man den Nenner desselben ohne Aufhören wachsen läßt. So wenn man z. B. von dem Bruche $\frac{1}{10}$ ausgeht, und durch wiederholte Multiplication seines Nenners mit der Zahl 10 nach und nach erhält $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, ..., so muß man durch hinreichende Fortsetzung dieses Verfahrens der Zahl Null so nahe kommen können wie man will, so daß Null selbst als die äußerste Gränze dieses abnehmenden Bruches erscheint.

Betrachtet man nun die folgende Reihe von Divisionen

$$1 : \frac{1}{10} = 10$$
$$1 : \frac{1}{100} = 100$$
$$1 : \frac{1}{1000} = 1000$$
$$1 : \frac{1}{10000} = 10000$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

so wird man erkennen, daß, während der Divisor in der oben angegebenen Weise der Gränze Null immer näher kommt, der Quotient jede noch so große Zahl der Zahlenreihe übersteigen wird. Setzt man also als Divisor die Gränze Null selbst, so muß der Quotient unendlich groß werden; oder es ist

$$1 : 0 = \infty.$$

Hätte man statt der Zahl 1 irgend eine von Null verschiedene Zahl a als Dividenden gesetzt, so würde noch dieselbe Schlußweise gelten. Also ist auch

$$a : 0 = \infty$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Der Gebrauch der unendlich großen Zahlen in der Elementar-Mathematik beschränkt sich auf den hier angegebenen Fall. In der höheren Mathematik wird von ihnen weitere Anwendung gemacht.

Als Beispiel mag hier noch Folgendes stehen.

Wendet man auf die Gleichung $a : 0 = \infty$ die Probe der Division an, so erhält man

$$\infty . 0 = a,$$

d. h. das Product $\infty . 0$ ist jeder beliebigen Zahl gleich.

Beispiele zur Uebung.

§. 107.

Brüche zu erkleinern. Anwendung der §§. 92—94.

1) $\frac{252}{324} = \frac{7}{9}$. 2) $\frac{455}{1092} = \frac{5}{12}$. 3) $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$.

4) $\frac{18ab^3c}{3bc^2} = \frac{6ab^2}{c}$. 5) $\frac{203\,a^2c}{667\,bc} = \frac{7a^2}{23b}$.

6) $\frac{ax+x^2}{bx-cx} = \frac{a+x}{b-c}$. 7) $\frac{a^2c^3-bc^4}{c^5} = \frac{a^2-bc}{c^2}$.

8) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{a-b}$. 9) $\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc} = \frac{7a}{5c}$.

Zu erkleinern:

10) $\frac{1188}{2475} =$ 11) $\frac{30x^3y^2}{36x^2y^3} =$ 12) $\frac{10ac+5c}{15bc-5c^2} =$ 13) $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab} =$

§. 108.

Addition und Subtraction der Brüche. Anwendung der §§. 87. 95—97. 98.

1) $\frac{5}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = 1$. 2) $\frac{3a}{b} - \frac{7a}{b} + \frac{9a}{b} = \frac{5a}{b}$.

3) $\frac{5}{7} + \frac{2}{3} = \frac{29}{21}$. 4) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$. 5) $\frac{5}{6} - \frac{2}{9} = \frac{11}{18}$.

6) $\frac{3a}{2b^2} - \frac{4a}{7c^2} + \frac{3a}{14bc} = \frac{21ac^2 - 8ab^2 + 3abc}{14bc}$.

7) $a - \frac{b}{cx} - \frac{d}{ex} = \frac{acex - be - cd}{cex}$.

8) $1 + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}$. 9) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

Zu berechnen:

10) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} =$ 11) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} =$

12) $3\frac{1}{7} + \frac{11}{12} - 2\frac{11}{14} + 5\frac{7}{9} =$

13) $\frac{3mx}{4y} + \frac{5ny}{6x} + \frac{2p}{9xy} =$

14) $\frac{13a-5b}{4} - \frac{7a-2b}{6} - \frac{3a}{5} =$

15) $\frac{a}{b} + \frac{a-3b}{cd} + \frac{a^2-b^2-ab}{bcd} =$

16) $cd + \frac{a^2}{c^5d} - \frac{a-b-c^2}{bc^5d^3} =$

17) $\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} - \frac{3}{2+x} =$

18) $\frac{a}{b+x} - \frac{c}{x} + \frac{3c}{4x} + 2b =$

19) $\frac{3a+2x}{a+x} - \frac{5a-x}{a-x} + \frac{a}{2x} =$

20) $\frac{ac}{a^2-4y^2} + \frac{bd}{ac+2cy} =$

§. 109.

Multiplication der Brüche. Anwendung des §. 100.

1) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$. 2) $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$. 3) $2\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15} = 1\frac{1}{6}$.

4) $-\frac{2a}{5b} \cdot 7ab = -\frac{14a^2}{5}$. 5) $-\frac{b}{2cf} \cdot -\frac{c}{3b} = \frac{1}{6f}$.

6) $\left(a + \frac{2b}{c}\right) \cdot -\frac{2c}{d} = -\frac{2ac+4b}{d}$.

7) $\left(\frac{5a}{b} - \frac{13c}{2d}\right) \cdot \left(\frac{3a}{b} + \frac{c}{2d}\right) = \frac{15a^2}{b^2} - \frac{17ac}{bd} - \frac{13c^2}{4d^2}$.

8) $\frac{a^2+2ab+4b^2}{a+b} \cdot \frac{a-2b}{a-b} = \frac{a^3-8b^3}{a^2-b^2}$.

Zu berechnen:

9) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} =$ 10) $7\frac{1}{2} \cdot 3\frac{3}{5} \cdot 6\frac{3}{8} =$

11) $\frac{3ab}{4cd} \cdot \frac{5mn}{6pq} =$ 12) $\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(a - \frac{b}{c}\right) =$

13) $\left(\frac{5a^2}{b} - \frac{7ab}{4c} + 3a\right) \cdot \left(\frac{7b}{a} + \frac{2a}{b}\right) =$

14) $\left(\frac{25x^2}{9y} + \frac{16y^3}{25x^2} + \frac{4y}{3}\right) \cdot \left(\frac{5x}{3y} - \frac{4y}{5x}\right) =$

15) $\left(\frac{3a^2}{a+b} - \frac{5b^2}{a-b} + \frac{8a^2b}{a^2-b^2}\right) \cdot \frac{a^2-b^2}{12ab} =$

§. 110.

Division der Brüche. Anwendung der §§. 102—104.

1) $\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{7}{10}$. 2) $2\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = 3$. 3) $\frac{a}{b} : \frac{b}{a} = \frac{a^2}{b^2}$.

4) $4a : -\frac{3b}{c} = -\frac{4ac}{3b}$. 5) $\frac{3}{5}\, ab : \frac{4}{7}\, abc = \frac{21}{20c}$.

6) $-\frac{1}{5pq} : \frac{1}{10pr} = -\frac{2r}{q}$. 7) $\frac{5am}{18bn} : \frac{15a^2}{22b^2} = \frac{11bm}{27an}$.

8) $\dfrac{a + \frac{1}{m}}{a - \frac{1}{m}} = \frac{am+1}{am-1}$. 9) $\dfrac{1 + \frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} = \frac{ab + a^2}{b^2}$.

Zu berechnen:

10) $-\frac{3a^3d}{2b} : -\frac{b^3}{4a^2c} =$

11) $\frac{2c^3(1+z^2)}{d^2z} : \frac{5c^4(1+z^2)^2}{dz^2} =$

12) $\left(\frac{3a^2}{b} - \frac{5a^3}{4b^2} + \frac{12b^2}{5a}\right) : -\frac{4a^2}{3b^2} =$

13) $\left(\frac{1}{3} - \frac{6}{x^2} + \frac{27}{x^4}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) =$

14) $\left(\frac{9a^2b^2}{4c^2} - \frac{25f^2m^2}{g^2} + \frac{70dfm}{g} - 49\,d^2\right) : \left(\frac{3ab}{2c} + \frac{5fm}{g} - 7d\right) =$

15) $\dfrac{x + \dfrac{3y^2}{2x}}{\dfrac{1}{3xy}} =$ 16) $\dfrac{\dfrac{5x}{y}}{a - \dfrac{3x}{y}} =$

17) $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}}{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}} =$ 18) $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}}{\dfrac{e}{f} + \dfrac{g}{h}} =$

19) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{a+b}} =$ 20) $\dfrac{\dfrac{c^2}{d^2} - \dfrac{c^3}{a+b}}{\dfrac{c^2}{a+b} - \dfrac{c^4}{dh}} =$

Fünfter Abschnitt.

Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

---

§. 111.

Erklärung.*) Eine Gleichung wird eine identische Gleichung genannt, wenn die eine Seite derselben entweder nur dasselbe aussagt, wie die andere Seite, oder eine auf Sätzen der Arithmetik beruhende Umformung der andern Seite ist.

Z. B. $a = a$, $4 = 4$, $a - b + b = a$, $4 + 1 = 5$, 2c.

Eine identische Gleichung kann immer angesehen werden wie ein Lehrsatz, und läßt sich immer in der Form eines Lehrsatzes in Worte bringen. Die bisherigen Lehrsätze geben Beispiele hiezu. Für die Buchstaben, welche in einer identischen Gleichung enthalten sind, kann man unzählig viele Werthe an die Stelle setzen, ohne daß die Gleichung aufhört richtig zu bleiben.

*) Hier muß zuvor die Erklärung §. 4 wiederholt werden.

§. 112.

Erklärung. Eine Gleichung wird eine Bestimmungs-Gleichung genannt, wenn sie eine oder mehrere Unbekannte enthält, deren Werthe durch Auflösung der Gleichung gefunden werden sollen.

§. 113.

Erklärung. Man theilt die Bestimmungs-Gleichungen in Gleichungen vom ersten Grade (einfache Gleichungen), in denen jede Unbekannte nur mit dem Exponenten Eins behaftet ist, und Gleichungen von höheren Graden (höhere Gleichungen), welche die Unbekannten auch mit höheren Exponenten behaftet enthalten.

Ferner unterscheidet man nach der Anzahl der Unbekannten, Gleichungen mit einer Unbekannten und Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 114.

Erklärung. Die Lehre von der Auflösung der Gleichungen wird Algebra genannt.

Die Auflösung der Gleichungen war schon den Griechen bekannt, unter denen Diophantus von Alexandria um 360 nach C. G. das älteste noch vorhandene Werk darüber geschrieben hat. Auch den Indern scheint sie nicht fremd gewesen zu sein. Der Name Algebra dagegen ist arabischen Ursprungs. Er hieß vollständig Algebr v' Almukabala, deutsch etwa: Herstellung und Vergleichung, und bezieht sich auf die Operationen, welche bei dem Ansatz und der Auflösung einer Gleichung vorgenommen werden müssen. So kommt das Wort zuerst als Titel eines Werks vor, welches um das Jahr 820 von Mohammed ben Musa, mit dem Beinamen Alkorezmi, auf den Wunsch des Kalifen Almamum zu Bagdad verfaßt wurde, und welches im 12ten Jahrhundert, ins Lateinische übersetzt, die abendländischen Christen zuerst mit der Algebra bekannt gemacht hat. Seitdem sind andere Benennungen der Algebra im Gebrauch gewesen, z. B. Ars magna (bei Lucas de Burgo, mit dem Beinamen Paccioli, 1509), im Gegensatz gegen Ars minor oder die gewöhnliche Rechenkunst; Regula Coss (bei Michael Stiffel, 1544),

nach dem italienischen Worte cosa, mit welchem man die Unbekannte bezeichnete, u. a., die gegenwärtig vergessen sind.

Zur Bezeichnung der Unbekannten diente, schon vor der Einführung der Buchstabenrechnung durch Vieta um 1600, ein Buchstabe des Alphabets; so bei Diophantus das griechische Schluß-ς, welches nicht wie die übrigen Buchstaben der Griechen als Zahlzeichen gebraucht wurde. Vieta bezeichnete die Unbekannten durch die Vocale, die bekannten Zahlen durch die Consonanten. Gegenwärtig bedient man sich allgemein der ersten Buchstaben des Alphabets $a, b, c, \ldots$ zur Bezeichnung bekannter Zahlen, und der letzten Buchstaben $x, y, z, \ldots$ zur Bezeichnung der Unbekannten.

§. 115.

Lehrsatz. Gleiche Zahlen zu gleichen Zahlen addirt, von gleichen Zahlen subtrahirt, mit gleichen Zahlen multiplicirt und durch gleiche Zahlen dividirt, geben gleiche Zahlen.

Oder wenn $a = b$
und $c = d$ ist,

so folgt

$$a + c = b + d$$
$$a - c = b - d$$
$$ac = bd$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Dies ist eine Anwendung auf Zahlen von dem allgemeinen Grundsatze IV §. 3 der Einleitung.

Gleichungen vom ersten Grade mit Einer Unbekannten.

§. 116.

Erklärung. Eine Gleichung mit Einer Unbekannten heißt aufgelöst, wenn man sie so umgewandelt hat, daß auf der einen Seite der Gleichung nur die Unbekannte, und auf der anderen Seite nur bekannte Zahlen stehen.

Z. B. die Gleichung

$$3x - 7 = 29$$

ist aufgelöst, wenn man aus ihr hergeleitet hat

$$x = 12.$$

§. 117.

Zusatz. Wenn man den für die Unbekannte gefundenen Werth in die gegebene Gleichung an die Stelle der Unbekannten setzt, so entsteht eine identische Gleichung.

So wenn man in dem vorigen Beispiel den gefundenen Werth 12 für x in die gegebene Gleichung setzt, so erhält man die identische Gleichung

$$3 . 12 - 7 = 29.$$

Man macht von diesem Satze Gebrauch als Probe der richtigen Auflösung.

§. 118.

Aufgabe. Eine Gleichung mit Einer Unbekannten, in welcher die Unbekannte nur mit Einer bekannten Zahl durch Eine Rechnungsart verbunden ist, aufzulösen.

Auflösung.

1) Die Unbekannte ist Theil einer Summe. Die gegebene Gleichung sei

$$x + a = b.$$

Man addirt zu ihr die identische Gleichung . . $\quad -a = -a$

so kommt nach §. 115 $\quad x = b - a.$

Die Probe giebt die identische Gleichung

$$(b - a) + a = b.$$

2) Die Unbekannte ist Minuend einer Differenz. Die gegebene Gleichung sei

$$x - a = b.$$

Man addirt zu ihr die identische Gleichung . . $\quad a = a$

so kommt $\quad x = b + a.$

Die Probe giebt die identische Gleichung

$$(b + a) - a = b.$$

Das in diesen beiden Fällen angewandte Verfahren, durch welches eine Zahl von einer Seite der Gleichung mit verändertem Vorzeichen

auf die andere Seite gelangt, wird mit dem Worte Transponiren (Transposition) bezeichnet.

3) Die Unbekannte ist Subtrahend einer Differenz. Die gegebene Gleichung sei

$$a - x = b.$$

Man subtrahire sie von der identischen Gleichung $a = a$

so kommt $x = a - b.$

Die Probe giebt die identische Gleichung

$$a - (a - b) = b.$$

4) Die Unbekannte ist Factor eines Products. Die gegebene Gleichung sei

$$ax = b.$$

Man dividire sie durch die identische Gleichung . . . $a = a$

so kommt $x = \frac{b}{a}.$

Die Probe giebt die identische Gleichung

$$a \cdot \frac{b}{a} = b.$$

5) Die Unbekannte ist Dividend eines Quotienten. Die gegebene Gleichung sei

$$\frac{x}{a} = b.$$

Man multiplicire sie mit der identischen Gleichung $a = a$

so kommt $x = ba.$

Die Probe giebt die identische Gleichung

$$\frac{ba}{a} = b.$$

6) Die Unbekannte ist Divisor eines Quotienten. Die gegebene Gleichung sei

$$\frac{a}{x} = b.$$

Man dividire durch sie
die identische Gleichung $\qquad a = a$

so kommt nach §. 115 $\qquad x = \frac{a}{b}.$

Die Probe giebt die identische Gleichung

$$\frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)} = b.$$

§. 119.

Aufgabe. Jede Gleichung vom ersten Grade mit Einer Unbekannten aufzulösen.

Auflösung. Man wende wiederholt die Verfahrungsarten des vorigen §. an. In der Regel geschieht dies am zweckmäßigsten in folgender Ordnung:

1) Man multiplicire die Gleichung, wenn sie Brüche enthält, mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner dieser Brüche, wodurch ganze Zahlen entstehen.

2) Man schaffe darauf durch Transposition alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf eine Seite der Gleichung, und alle Glieder, welche die Unbekannte nicht enthalten, auf die andere Seite.

3) Man vereinige sodann, so weit dies möglich ist, die Glieder der einen so wie der anderen Seite in je ein einziges Glied.

4) Endlich dividire man die Gleichung durch den Coefficienten, welchen jetzt die Unbekannte besitzt.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung gegeben

$$2x - \tfrac{12}{5} = \tfrac{1}{2} - 7x + 69\tfrac{1}{10}.$$

Man multiplicire mit der
identischen Gleichung . . $\qquad 10 = 10$

$$20x - 24 = 5 - 70x + 691.$$

Man addire die
identische Gleichung. . . . . $\qquad 70x + 24 = 70x + 24$

$$20x + 70x = 5 + 691 + 24.$$

Man vereinige, was sich vereinigen läßt .	$90x = 720$
Man dividire durch die identische Gleichung	$90 = 90$
	$x = 8.$

Probe: $2.8 - \frac{12}{5} = \frac{1}{2} - 7.8 + 69\frac{1}{10}$

d. i. $13\frac{3}{5} = 13\frac{3}{5}.$

Beispiel 2. Es sei die Gleichung vorgelegt

$$3ab - \frac{dx}{c} = 1 - \frac{x}{a}$$

Man multiplicire mit der identischen Gleichung	$ac = ac$
	$3a^2bc - adx = ac - cx.$
Man addire die identische Gleichung . .	$cx - 3a^2bc = cx - 3a^2bc$
	$cx - adx = ac - 3a^2bc$
Man vereinige, was sich vereinigen läßt .	$(c - ad)\, x = ac\,(1 - 3ab)$
Man dividire durch die identische Gleichung	$c - ad = c - ad$
	$x = \frac{ac\,(1 - 3ab)}{c - ad}.$

Probe: $3ab - \frac{d \cdot \left(\frac{ac\,(1 - 3ab)}{c - ad}\right)}{c} = 1 - \frac{\left(\frac{ac\,(1 - 3ab)}{c - ad}\right)}{a}$

d. i. $\frac{3abc - ad}{c - ad} = \frac{3abc - ad}{c - ad}.$

Wenn man hinreichende Sicherheit in Rechnungen dieser Art erlangt hat, so kann man sich es ersparen, die identischen Gleichungen, welche nach und nach zur Anwendung kommen, jedesmal ausdrücklich hinzuschreiben.

§. 120.

Aufgabe. Eine in Worten ausgedrückte Aufgabe mit Einer Unbekannten in eine Gleichung umzuwandeln.

Auflösung. Das zu dieser Umwandlung nöthige Verfahren, welches sich bequem wie eine Uebersetzung aus derjenigen Sprache, in welcher die Aufgabe gegeben ist, in die Sprache der Algebra ansehen läßt, macht alle Vorsichtsmaßregeln einer Uebersetzung nöthig, und kann am einfachsten aus Beispielen erkannt werden.

Beispiel 1. Man sucht eine Zahl, deren Hälfte und dritter Theil zusammen 40 ausmachen.

Uebersetzung.

Deutsch.	Algebraisch.
Man sucht eine Zahl.	x
deren Hälfte	$\frac{x}{2}$
und dritter Theil	$\frac{x}{3}$
zusammen.	$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}$
40 ausmachen	$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=40.$
Die Auflösung dieser Gleichung giebt	$x=48.$

Nicht immer kann man so wörtlich übersetzen, wie in diesem Beispiel, sondern man muß mehrentheils den Wortlaut der Aufgabe zuvor zweckmäßig abändern, wie in den folgenden Beispielen zu sehen ist.

Beispiel 2. Jemand giebt von einer Geldsumme, die er besitzt, den dritten Theil aus und nimmt darauf 200 Thaler wieder ein. Er findet, daß dadurch die Summe auf $\frac{7}{8}$ ihres anfänglichen Betrages zusammengeschmolzen ist. Wie viel besaß er anfangs?

Uebersetzung.

Deutsch.	Algebraisch.
Man sucht eine Anzahl Thaler	x
Von derselben wird ihr dritter	
Theil hinweggenommen	$x-\frac{x}{3}$

zu dieser Differenz werden
wieder 200 Thaler addirt . . . . $x - \frac{x}{3} + 200$
und diese Summe soll gleich
$\frac{7}{8}$ der gesuchten Zahl sein . . . . $x - \frac{x}{3} + 200 = \frac{7}{8}x$

Die Auflösung giebt $x = 960$, also beträgt die gesuchte Geldsumme 960 Thaler.

Beispiel 3. Einem Boten, welcher täglich 5 Meilen zurücklegt, wird 4 Tage später ein zweiter Bote nachgeschickt, der täglich 7 Meilen zurücklegt. Wie viel Tage wird der zweite Bote gebrauchen, um den ersten einzuholen?

Uebersetzung.

Deutsch.	Algebraisch.
Man sucht die Anzahl Tage, welche der zweite Bote gebraucht	x.
indeß der erste Bote 4 Tage länger unterwegs ist	$x + 4$
Der erste Bote legt soviel mal 5 Meilen zurück, als er Tage gebraucht	$5(x + 4)$
Der zweite Bote legt soviel mal 7 Meilen zurück, als er Tage gebraucht	$7x$
und beide Wege sind gleich groß	$5(x+4) = 7x$.

Die Auflösung giebt $x = 10$, also gebraucht der zweite Bote 10 Tage, um den ersten einzuholen.

Beispiel 4. Eine Festung hat auf 7 Tage Proviant, soll sich aber 12 Tage halten, und muß, um dieses auszuführen, 1500 Mann fortschicken. Wie stark ist die Besatzung dieser Festung?

Uebersetzung.

Deutsch.	Algebraisch.
Man sucht die Anzahl Mann, welche die Besatzung der Festung ausmachen	x
Dieselbe verzehrt in 7 Tagen soviel mal 7 Tages-Portionen als sie Mann enthält	$7x$

Die Besatzung wird um 1500
Mann vermindert . . . . $x - 1500$
und verzehrt nun in 12 Tagen
soviel mal 12 Tages-Portionen
als sie Mann enthält . . . . $12\,(x - 1500)$
Beide Zahlen aber drücken
denselben Vorrath von Proviant aus . . . . $7x = 12(x - 1500)$.

Die Auflösung giebt $x = 3600$, also besteht die Besatzung der Festung aus 3600 Mann.

Will man in Aufgaben dieser Art die Probe machen, so hat man die gefundene Zahl in die gegebene Aufgabe zu setzen, und nachzusehen, ob allen Bedingungen der Aufgabe dadurch Genüge geschieht.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

§. 121.

Erklärung. Eine Gleichung vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten wird geordnet genannt, wenn alle Unbekannten, mit Coefficienten versehen, auf der einen Seite, und nur bekannte Zahlen auf der andern Seite der Gleichung stehen.

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten nimmt, geordnet, die Gestalt an

$$ax + by = c,$$

eine Gleichung mit drei Unbekannten die Gestalt

$$ax + by + cz = d,$$

rc. Diese Gestalt kann immer durch Anwendung der vorigen Methoden hergestellt werden, und man darf deshalb im Nachfolgenden die Gleichungen mit mehreren Unbekannten immer schon als geordnet voraussetzen.

Ueberdies darf man in einer geordneten Gleichung immer voraussetzen, daß alle Coefficienten nebst der bekannten Zahl ganze Zahlen sind. Denn sollte diese Forderung nicht erfüllt sein, so kann man nach früheren Gesetzen leicht die nöthige Umwandlung vornehmen.

§. 122.

Erklärung. Unter Eliminiren versteht man: Aus zwei oder mehreren gegebenen Gleichungen eine Unbekannte wegschaffen.

§. 123.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Gleichungen eine Unbekannte zu eliminiren.

Auflösung. Man hat drei Eliminations-Methoden:

1) Die Substitutions-Methode. Man löse eine der beiden gegebenen Gleichungen für die zu eliminirende Unbekannte auf, und setze (substituire) den gefundenen Werth an die Stelle dieser Unbekannten in die andere Gleichung. Dadurch entsteht eine neue Gleichung, welche die zu eliminirende Unbekannte nicht mehr enthält.

Z. B. es sei x zu eliminiren aus den beiden Gleichungen

$$5x + 12y = 71 \quad (1)$$
$$10x - 9y = 43 \quad (2)$$

Wenn man die Gleichung (1) für x auflöst, so kommt

$$x = \frac{71 - 12y}{5}$$

und setzt man diesen Werth für x in die Gleichung (2), so erhält man

$$10 . \frac{71 - 12y}{5} - 9y = 43$$

d. i. $$142 - 33y = 43$$

welche Gleichung die Unbekannte x nicht mehr enthält, wie verlangt wurde.

2) Die Gleichsetzungs-Methode. Man löse jede der beiden gegebenen Gleichungen für die zu eliminirende Unbekannte auf, und setze die beiden gefundenen Werthe einander gleich. Dadurch entsteht eine neue Gleichung, welche die zu eliminirende Unbekannte nicht mehr enthält.

Z. B. es sei wie vorhin x zu eliminiren aus den beiden Gleichungen

$$5x + 12y = 71 \quad (1)$$
$$10x - 9y = 43 \quad (2)$$

Wenn man jede dieser beiden Gleichungen für x auflöst, so erhält man aus (1)

$$x = \frac{71 - 12y}{5}$$

und aus (2)

$$x = \frac{43 + 9y}{10}$$

und beide Werthe von x, einander gleich gesetzt, geben

$$\frac{71 - 12y}{5} = \frac{43 + 9y}{10}$$

$$\text{d. i. } 142 - 24y = 43 + 9y$$

welche Gleichung die Unbekannte x nicht mehr enthält, wie verlangt wurde.

3) Die Additions- oder Subtractions-Methode. Man mache in den beiden gegebenen Gleichungen die Coefficienten der zu eliminirenden Unbekannten dadurch einander gleich, daß man diese Gleichungen mit entsprechenden Factoren multiplicirt, und addire oder subtrahire darauf die Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. Dadurch entsteht eine neue Gleichung, in welcher die zu eliminirende Unbekannte nicht mehr vorkommt.

Z. B. es sei wieder x zu eliminiren aus den beiden Gleichungen

$$5x + 12y = 71 \quad (1)$$
$$10x - 9y = 43 \quad (2)$$

Wenn man die Gleichung (1) mit der Zahl 2 multiplicirt, und von der so entstehenden Gleichung die Gleichung (2) subtrahirt, so erhält man

$$\begin{array}{r} 10x + 24y = 142 \\ 10x - 9y = 43 \\ \hline 33y = 99 \end{array}$$

welche Gleichung die Unbekannte x nicht mehr enthält, wie verlangt wurde.

Wollte man aus denselben beiden Gleichungen y eliminiren, so müßte man die Gleichung (1) mit der Zahl 3 und die Gleichung

(2) mit der Zahl 4 multipliciren und sodann die entstandenen beiden Gleichungen addiren. Nämlich

$$\begin{array}{r} 15x + 36y = 213 \\ 40x - 36y = 172 \\ \hline 55x \quad\quad = 385 \end{array}$$

welche Gleichung, wie verlangt wurde, die Unbekannte y nicht mehr enthält.

Zur Auffindung derjenigen Factoren, mit welchen man die gegebenen Gleichungen zu multipliciren hat, um die Coefficienten der zu eliminirenden Unbekannten gleich zu machen, bilde man von diesen beiden Coefficienten den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend und dividire denselben durch jeden der beiden Coefficienten. Die Quotienten sind die gesuchten Factoren.

Diese dritte Eliminations-Methode pflegt nicht nur für practische Rechnungen die bequemste zu sein, sondern sie hat auch vor den beiden anderen Methoden eine Eigenschaft voraus, welche man durch das Prädicat elegant bezeichnet.

§. 124.

Aufgabe. Gegebene Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen.

Auflösung. 1) Es seien zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben.

Man eliminire aus beiden Gleichungen eine Unbekannte, wodurch man eine Gleichung erhält, aus welcher die andere Unbekannte bestimmt werden kann. Den Werth dieser Unbekannten setze man in eine der gegebenen Gleichungen zurück, und bestimme aus ihr die erste Unbekannte.

Z. B. die beiden Gleichungen (§. 123.)

$$5x + 12y = 71 \quad (1)$$

$$10x - 9y = 43 \quad (2)$$

geben durch Elimination von x (nach der Additions- oder Subtractions-Methode) die neue Gleichung

$$33y = 99$$

und daraus

$$y = 3.$$

5*

Setzt man diesen Werth von y in die Gleichung (1), so erhält man

$$5x + 36 = 71$$

woraus

$$x = 7.$$

Setzt man zur Probe denselben Werth von y auch in die Gleichung (2), so erhält man

$$10x - 27 = 43$$

woraus gleichfalls

$$x = 7.$$

2) Es seien drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben.

Man eliminire aus der ersten und zweiten, und ebenso aus der zweiten und dritten Gleichung eine und dieselbe Unbekannte. Alsdann erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welche wie vorhin weiter behandelt werden.

Z. B. es seien gegeben

$$4x - 3y + 2z = 16 \quad (1)$$
$$8x + 5y + 3z = 49 \quad (2)$$
$$-6x - 7y + 10z = 18 \quad (3)$$

Die Elimination von x aus den Gleichungen (1) und (2) giebt

$$11y - z = 17 \quad (4)$$

Die Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) giebt

$$-13y + 49z = 219 \quad (5)$$

Man hat also jetzt zwei Gleichungen (4) und (5) mit den beiden Unbekannten y und z.

Eliminirt man ferner y aus den beiden Gleichungen (4) und (5), so erhält man

$$526z = 2630$$

woraus

$$z = 5.$$

Setzt man diesen Werth von z in eine der beiden Gleichungen (4) oder (5), so folgt

$$y = 2.$$

Setzt man endlich diese beiden Werthe von y und z in eine der drei Gleichungen (1), (2), (3), so folgt

$$x = 3.$$

Da die Reihefolge sowol der gegebenen Gleichungen, als auch der gesuchten Unbekannten, vollkommen willkürlich ist, so kann man sie immer so feststellen, daß die Rechnung sich so einfach wie möglich gestaltet.

Besonders einfach wird die Rechnung, wenn eine der gegebenen Gleichungen nur zwei Unbekannte enthält. Denn alsdann ist nur Eine Elimination nöthig, damit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten entstehen.

3) Es seien vier Gleichungen mit vier Unbekannten gegeben.

Man eliminire aus der ersten und zweiten, aus der zweiten und dritten, und aus der dritten und vierten Gleichung eine und dieselbe Unbekannte. Dadurch erhält man drei Gleichungen mit drei Unbekannten, welche wie vorhin weiter zu behandeln sind.

Hieraus ergiebt sich zugleich ohne Mühe, wie man bei noch mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu verfahren hat.

§. 125.

Zusatz. Wenn aus gegebenen Gleichungen die Werthe mehrerer Unbekannten gefunden werden sollen, so müssen eben so viel von einander unabhängige Gleichungen gegeben sein, wie Unbekannte zu bestimmen sind.

Dies folgt aus dem Gange der vorstehenden Auflösungsweise. Denn mit jeder Elimination einer Unbekannten wird zugleich die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen um Eins kleiner; und da man am Schluß Eine Gleichung mit Einer Unbekannten haben will, so müssen auch anfangs eben so viel von einander unabhängige Gleichungen wie Unbekannte dagewesen sein.

Wenn mehr Gleichungen gegeben als Unbekannte zu finden sind, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Wenn dagegen weniger Gleichungen gegeben als Unbekannte zu finden sind, so ist die Aufgabe unbestimmt.

§. 126.

Aufgabe. Eine in Worten ausgedrückte Aufgabe mit mehreren Unbekannten in Gleichungen umzuwandeln.

Auflösung. Das Verfahren ist nicht wesentlich verschieden von

demjenigen des §. 120 und kann leicht aus folgenden Beispielen erkannt werden.

Beispiel 1. Zwei Armeecorps stehen einander gegenüber, das eine ist 400 Mann stärker als das andere. Im Gefecht verliert das stärkere $^1/_5$ seiner Mannschaft und das schwächere $^2/_3$ seiner Mannschaft, und nachher beträgt das erste 600 Mann mehr als das zweite. Wie stark waren beide Armeecorps vor dem Gefecht?

Uebersetzung.

Deutsch:	Algebraisch:	
Man sucht, wie viel Mann zwei Armeecorps stark sind	x, y	
von denen das erste 400 Mann stärker als das zweite ist	$x = y + 400$	(1)
Das stärkere verliert $\frac{1}{5}$ seiner Mannschaft	$x - \frac{1}{5}x$	
Der schwächere verliert $\frac{2}{3}$ seiner Mannschaft	$y - \frac{2}{3}y$	
und nachher beträgt das erste 600 Mann mehr als das zweite	$x - \frac{1}{5}x = y - \frac{2}{3}y + 600$	(2)

Die geordneten Gleichungen sind

$$x - y = 400$$

$$12x - 5y = 9000$$

und die Auflösung giebt $x = 1000$ und $y = 600$. Also enthielt das stärkere Armeecorps 1000 Mann und das schwächere 600 Mann.

Beispiel 2. Es giebt eine dreizifferige Zahl deren Ziffernsumme 12 beträgt. Die erste und dritte Ziffer machen zusammen die Hälfte der zweiten aus, und die erste und zweite Ziffer betragen zusammen das Dreifache der dritten. Wie heißt die Zahl?

Uebersetzung.

Deutsch:	Algebraisch:	
Man sucht drei Ziffern.	x, y, z	
deren Summe 12 beträgt	$x + y + z = 12$	(1)
Die erste und dritte Ziffer zusammen	$x + z$	
machen die Hälfte der zweiten aus	$x + z = \frac{1}{2}y$	(2)

und die erste und zweite
Ziffer zusammen . . . . $x + y$
betragen das Dreifache der
Dritten . . . . $x + y = 3z$. (3)

Die geordneten Gleichungen sind

$$x + y + z = 12$$
$$2x - y + 2z = 0$$
$$x + y - 3z = 0$$

und die Auflösung giebt $x = 1$, $y = 8$, $z = 3$. Also heißt die gesuchte Zahl 183.

Diophantische Aufgaben vom ersten Grade.

§. 127.

Erklärung. Unter Diophantischen Aufgaben werden Aufgaben verstanden, welche weniger Gleichungen liefern als Unbekannte zu bestimmen sind, daneben aber die besondere Bedingung enthalten, daß nur absolute ganze Zahlen als Werthe für die Unbekannten zugelassen werden sollen.

Diese Aufgaben haben ihre Benennung von dem griechischen Mathematiker Diophantus, um 360 nach C. G., in dessen uns hinterlassener Schrift über Auflösung der Gleichungen hauptsächlich Aufgaben dieser Art behandelt werden.

Hier sollen nur Diophantische Aufgaben mit zwei Unbekannten abgehandelt werden.

§. 128.

Lehrsatz. Wenn eine Diophantische Aufgabe mit zwei Unbekannten zu der Gleichung $ax + by = c$ führt, in welcher a, b und c als algebraische ganze Zahlen vorausgesetzt werden, und die Coefficienten a und b einen gemeinschaflichen Divisor besitzen, so muß auch die bekannte Zahl c durch diesen Divisor theilbar sein.

Im entgegengesetzten Falle ist eine Auflösung in absoluten ganzen Zahlen unmöglich.

Beweis. Es sei m der gemeinschaftliche Divisor, durch welchen die Coefficienten a und b theilbar sind. Nach der Natur der Dio=

phantischen Aufgaben sollen x und y ganze Zahlen sein; deshalb sind auch (§. 68) die Producte ax und by theilbar durch m; und folglich (§. 69) ist auch die Summe $ax + by$ d. i. die Zahl c theilbar durch m, w. z. b. w.

Soll aber die Folgerung, daß auch c theilbar durch m sei, nicht eintreten, so ist dies nur dadurch möglich, daß x und y aufhören ganze Zahlen zu sein, w. z. b. w.

Beispiel. Die Gleichung

$$12x - 20y = 17$$

ist in absoluten ganzen Zahlen nicht auflösbar; dagegen ist auflösbar die Gleichung

$$12x - 20y = 16$$

d. i. einfacher

$$3x - 5y = 4;$$

denn man kann setzen $x = 3$, $y = 1$, oder $x = 8$, $y = 4$, 2c.

§. 129.

Aufgabe. Eine gegebene Gleichung mit zwei Unbekannten in absoluten ganzen Zahlen aufzulösen.

Auflösung. 1) Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn eine der beiden Unbekannten nur mit dem Coefficienten 1 behaftet ist.

Es sei z. B. gegeben

$$x + 7y = 40$$

Man löse die Gleichung für die Unbekannte x auf, welche den Coefficienten 1 besitzt, so hat man

$$x = 40 - 7y$$

und setzt man nun hierin für y allmälig die Reihe der absoluten ganzen Zahlen, und zwar mit der Beschränkung, daß der Ausdruck $40 - 7y$ nicht negativ werde, so erhält man alle möglichen Antworten. Nämlich

$$y = 1, 2, 3, 4, 5.$$
$$x = 33, 26, 19, 12, 5.$$

2) Wenn die Coefficienten der beiden Unbekannten verschieden von 1 sind, so kann man das nöthige Verfahren aus folgendem Beispiel erkennen.

Es sei gegeben

$$7x - 16y = 31.$$

Man löse die Gleichung für die Unbekannte x auf, deren Coefficient den kleinern Zahlwerth besitzt, so erhält man

$$x = \frac{31 + 16y}{7}$$

oder wenn man aus diesem Bruche die in ihm enthaltenen Ganzen absondert

$$x = 4 + 2y + \frac{3 + 2y}{7}.$$

Da x und y ganze Zahlen sein sollen, so muß auch $\frac{3 + 2y}{7}$ eine solche sein. Bezeichnet man dieselbe mit p, so hat man

$$x = 4 + 2y + p \qquad (1)$$

und

$$\frac{3 + 2y}{7} = p.$$

Diese Gleichung löse man ferner für y auf, so erhält man

$$y = \frac{7p - 3}{2}$$

oder wenn man aus diesem Bruche die in ihm enthaltenen Ganzen absondert

$$y = 3p - 1 + \frac{p - 1}{2}.$$

Da hier wiederum y und p ganze Zahlen sein sollen, so muß auch $\frac{p - 1}{2}$ eine solche sein. Bezeichnet man dieselbe mit q, so hat man

$$y = 3p - 1 + q \qquad (2)$$

und

$$\frac{p - 1}{2} = q.$$

Diese Gleichung löse man weiter für p auf, so erhält man

$$p = 2q + 1. \qquad (3)$$

Hier ist die Bruchform verschwunden, folglich die Auflösung beendigt. Denn setzt man den in (3) gefundenen Werth von p in die Gleichung (2) zur Bestimmung von y, und darauf die Werthe von p und y in die Gleichung (1) zur Bestimmung von x, so hat man

$$y = 7q + 2$$
$$x = 16q + 9$$

welche beiden Gleichungen die vollständige Auflösung in sich enthalten.

Setzt man hierin für q allmälig die Reihe der algebraischen ganzen Zahlen, und zwar mit der Beschränkung, daß die Ausdrücke $7q + 2$ und $16q + 9$ nicht negativ werden, so erhält man alle möglichen Antworten. Nämlich

$$q = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots.$$
$$y = 2\,,\ 9\,,16\,,23\,,30\,,\ \ldots.$$
$$x = 9\,,25\,,41\,,57\,,73\,,\ \ldots.$$

§. 130.

Zusatz. Wenn in einer geordneten Gleichung mit zwei Unbekannten die Coefficienten dieser Unbekannten gleiche Vorzeichen besitzen, so ist in absoluten ganzen Zahlen nur eine begränzte Anzahl von Auflösungen möglich.

Wenn aber die Coefficienten der beiden Unbekannten verschiedene Vorzeichen besitzen, so ist die Anzahl der Auflösungen in absoluten ganzen Zahlen unbegränzt.

Man vergleiche die Beispiele des vorigen §.

Beispiele zur Uebung.

§. 131.

Gleichungen vom ersten Grade mit Einer Unbekannten.

Mit Ziffern:

1) $9x - 2 = 31 - 2x$ Antw. $x = 3$

2) $\frac{3x}{5} - \frac{x}{8} = \frac{7x}{10} - 15$ " $x = 66\frac{2}{3}$

3) $\frac{8x - 12}{11} = \frac{5x - 1}{2} - 13$ " $x = 7$

4) $\frac{2x}{3} + 6 = \frac{x}{4} - \frac{x}{9} + 25$ " $x = 36$

5) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{x-3}{4} + 20$ " $x = 35$

6) $\frac{1-2x}{3} - \frac{4-5x}{6} = -\frac{13}{42}$ " $x = \frac{1}{7}$

7) $2 - \frac{5+x}{7} = 1 - \frac{9-x}{14}$ Antw. $x = 4\frac{1}{3}$

8) $\frac{1}{4} - \frac{4}{5x} = \frac{3}{4x} + \frac{3}{5} - \frac{5}{3x}$ " $x = \frac{1}{3}$

9) $\frac{8x - 28}{4x + 21} = \frac{6x - 22}{3x + 14}$ " $x = 7$

Mit Buchstaben:

10) $ax + bx = d - cx$ Antw. $x = \frac{d}{a + b + c}$

11) $mx + 1 = x + m$ " $x = 1$

12) $\frac{ab}{x} - d = bc + \frac{1}{x}$ " $x = \frac{ab - 1}{bc + d}$

13) $a + \frac{m(a - x)}{3a + x} = 0$ " $x = \frac{a(m + 3a)}{m - a}$

14) $a - \frac{m + n}{x} = b - \frac{m - n}{x}$ " $x = \frac{2n}{a - b}$

15) $\frac{a(d^2 + x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}$ " $x = \frac{d}{c}$

§. 132.

Aufgaben mit Einer Unbekannten.

1) Man verkauft von einem Stück Tuch $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ des Stücks, und behält 20 Ellen übrig. Wie viel Ellen hat das Stück gehalten?

Antw. 48 Ellen.

2) Ein Officier meldet: Die Hälfte meines Commando ist gefangen, der vierte Theil auf dem Platze geblieben, der siebente Theil verwundet, und den Rest von 3 Mann habe ich bei mir. Wie stark ist sein Commando gewesen?

Antw. 28 Mann.

3) Wenn ich von meinem Gelde $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ verschenken wollte, so würden mir 8 Thaler fehlen. Wie viel habe ich?

Antw. 96 Thaler.

4) In einer Gesellschaft von 56 Personen befinden sich doppelt so viel Officiere und fünfmal so viel Kaufleute als Studenten. Wie viel von jedem Stande befinden sich darunter?

Antw. 7 Studenten, 14 Officiere und 35 Kaufleute.

5) 24 Thaler sollen unter zwei Personen so vertheilt werden, daß die erste eben so oft 2 Thaler, wie die zweite 7 Thaler empfängt. Wie viel erhält jede?

Antw. Die erste Person $5\frac{1}{3}$, die zweite $18\frac{2}{3}$ Thaler.

6) Die Garnison einer Stadt besteht aus doppelt so viel Infanterie als Cavallerie. Ein Infanterist bekommt monatlich 5 Thaler, ein Cavallerist 8 Thaler, und der ganze Sold beträgt monatlich 1800 Thaler. Wie viel Infanteristen und wie viel Cavalleristen liegen in der Stadt?

Antw. 200 Infanteristen und 100 Cavalleristen.

7) Von 54 Thalern gab ich so viel aus, daß mir 5 mal so viel übrig blieb als ich ausgegeben hatte. Wie groß war die Ausgabe?

Antw. 9 Thaler.

8) Zwei Freunde, welche 72 Meilen von einander entfernt wohnen, reisen einander entgegen; der erste macht jeden Tag $10\frac{1}{2}$, der zweite jeden Tag $7\frac{1}{2}$ Meilen. Nach wie viel Tagen werden sie zusammentreffen?

Antw. Nach 4 Tagen.

9) Einem Courier, welcher jede 5 Stunden 7 Meilen zurücklegt, wird 4 Stunden nach seiner Abreise ein zweiter Courier nachgeschickt, welcher jede 3 Stunden 5 Meilen zurücklegt. Nach wie viel Stunden wird der zweite Courier den ersten einholen?

Antw. Nach 21 Stunden.

10) Von Hannover geht Morgens 6 Uhr 45 Minuten ein Schnellzug nach Köln, welcher daselbst Nachmittags 4 Uhr ankommt. Von Köln geht Morgens 6 Uhr 30 Minuten ein Courierzug nach Hannover, welcher in Hannover Nachmittags 1 Uhr 45 Minuten eintrifft. Um wie viel Uhr begegnen sich beide Eisenbahnzüge?

Antw. Um 10 Uhr $20\frac{5}{22}$ Minuten.

11) Eine gewisse Anzahl Arbeiter würde, um eine Schanze aufzuwerfen, 16 Stunden gebrauchen. Man will aber, daß die Arbeit 2 Stunden früher vollendet werde, und muß zu dem Ende 9 Mann mehr anstellen. Wie groß war die Anzahl der Arbeiter anfangs?

Antw. 63 Arbeiter.

12) Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nachdem er zuvor zur Bestreitung seiner jährlichen Ausgaben 1000 Thaler davongenommen hat. Nach drei Jahren findet er, daß er doppelt so reich ist als anfangs. Wie groß war sein anfängliches Vermögen?

Antw. 14800 Thaler.

§. 138.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

Mit zwei Unbekannten:

1) $3x + 2y = 118$ — Antw. $x = 16$
$x + 5y = 191$ — $y = 35$

2) $5\frac{3}{4}y - 11x = 4y + 117\frac{1}{8}$ — Antw. $x = 9$
$8x + 175 = 2y$ — $y = 123\frac{1}{2}$

3) $\frac{13}{5x + 7y} = \frac{21}{9x + 33}$ — Antw. $x = 1$
$\frac{19}{11x + 27} = \frac{11}{7x + 5y}$ — $y = 3$

4) $\frac{3a + x}{b} = \frac{b + y}{a}$ — Antw. $x = \frac{2b^2 - 6a^2 + d}{3a}$
$d - 2by = ax$ — $y = \frac{3a^2 - b^2 + d}{3b}$

Mit drei Unbekannten:

5) $2x + 5y - 7z = -288$ — Antw. $x = 13$
$5x - y + 3z = 227$ — $y = 24$
$7x + 6y + z = 297$ — $z = 62$

6) $18x - 7y - 5z = 11$ — Antw. $x = 12$
$4\frac{2}{5}y - \frac{2}{3}x + z = 108$ — $y = 25$
$3\frac{1}{2}z + 2y + \frac{3}{4}x = 80$ — $z = 6$

7) $x + 4y = 21$ — Antw. $x = 1\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}x + z = 9$ — $y = 4\frac{5}{6}$
$y + 7\frac{1}{2}z = 64$ — $z = 7\frac{8}{9}$

8) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ Antw. $x = \frac{ad}{ma + nb + pc}$

$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ $y = \frac{bd}{ma + nb + pc}$

$mx + ny + pz = d$ $z = \frac{cd}{ma + nb + pc}$

Mit vier Unbekannten:

9) $x - 9y + 3z - 10u = 21$ Antw. $x = 100$

$2x + 7y - z - u = 683$ $y = 60$

$3x + y + 5z + 2u = 195$ $z = -13$

$4x - 6y - 2z - 9u = 516$ $u = -50$

10) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58$ Antw. $x = 12$

$\frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76$ $y = 30$

$\frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79$ $z = 168$

$y + z + u = 248$ $u = 50$

§. 134.

Aufgaben mit mehreren Unbekannten.

1) Zwei Geldbeutel enthalten zusammen 300 Thaler. Nimmt man aus dem ersten 40 Thaler, und legt sie in den zweiten, so ist in beiden gleich viel. Wie viel Thaler enthält jeder Geldbeutel?

Antw. Der erste 190, der zweite 110 Thaler.

2) Jemand besitzt zwei Becher. Legt er 8 Thaler in den ersten, so ist dieser erst halb so viel werth als der zweite. Legt er aber diese 8 Thaler in den zweiten, so ist derselbe dreimal so viel werth, als der erste. Wie theuer ist jeder Becher?

Antw. Der erste 24, der zweite 64 Thaler.

3) Wenn man den Zähler eines Bruches um Eins verkleinert, so wird sein Werth $\frac{1}{4}$, und wenn man den Nenner um Eins verkleinert, so wird sein Werth $\frac{1}{3}$. Wie heißt der Bruch?

Antw. $\frac{5}{16}$.

4) Drei Personen haben ein Haus gekauft für 1000 Thaler.

Hätte der Erste zu seinem Gelde noch die Hälfte von dem Gelde des Zweiten, so könnte er das Haus allein bezahlen. Ebenso der Zweite, wenn er zu seinem Gelde noch $\frac{1}{3}$ von dem Gelde des Dritten, und der Dritte, wenn er zu seinem Gelde noch $\frac{1}{4}$ von dem Gelde des Ersten erhielte. Wie viel Geld besitzt jeder?

Antw. Der Erste 640, der Zweite 720, der Dritte 840 Thaler.

§. 135.

Diophantische Aufgaben.

1) In einem Gießhause wurden zweierlei Kanonenrohre gegossen. Von der ersten Art wiegt das Stück 16, von der zweiten Art 25 Centner, und zu den Rohren der zweiten Art hat man einen Centner Metall weniger gebraucht, als zu den Rohren der ersten Art. Wie viel Rohre von jeder Art wurden gegossen?

Antw. 11 der ersten und 7 der zweiten Art, oder 36 der ersten und 23 der zweiten Art, 2c.

2) Eine Gesellschaft von Männern und Frauen hat zusammen 36 Thaler 12 Sgr. verzehrt. Ein Mann bezahlt 19, und eine Frau 13 Sgr. Wie viel Männer und Frauen waren es?

Antw. 3 und 63, oder 16 und 44, oder 29 und 25, oder 42 und 6.

3) Der Bruch $\frac{230}{77}$ soll in zwei andere Brüche zerlegt werden, deren Nenner 7 und 11 sind. Wie heißen diese Brüche?

Antw. $\frac{5}{7}$ und $\frac{25}{11}$, oder $\frac{12}{7}$ und $\frac{14}{11}$, oder $\frac{19}{7}$ und $\frac{8}{11}$.

Sechster Abschnitt.

Proportionen und Progressionen.

---

§. 136.

Erklärung. Unter dem arithmetischen Verhältniß zweier Zahlen versteht man die Differenz dieser beiden Zahlen.

Diese Zahlen selbst werden die Glieder des arithmetischen Verhältnisses genannt. Der Minuend heißt das Vorderglied, und der Subtrahend das Hinterglied.

Z. B. $a - b$, oder $12 - 7$, ꝛc.

§. 137.

Erklärung. Unter dem geometrischen Verhältniß zweier Zahlen versteht man den Quotienten dieser beiden Zahlen.

Diese Zahlen selbst werden die Glieder des geometrischen Verhältnisses genannt. Der Dividend heißt das Vorderglied, und der Divisor das Hinterglied.

Z. B. $a : b$, oder $12 : 7$, ꝛc.

§. 138.

Erklärung. Eine Proportion ist eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen.

Von den vier Gliedern dieser beiden Verhältnisse werden das erste und das vierte Glied äußere Glieder, das zweite und das dritte Glied innere Glieder der Proportion genannt. Das vierte Glied insbesondere heißt auch die vierte Proportionale zu den drei ersten Gliedern.

Eine arithmetische Proportion ist also eine Gleichung zwischen zwei arithmetischen Verhältnissen, und kann in Buchstaben ausgedrückt werden

$$a - b = c - d$$

z. B.

$$12 - 7 = 20 - 15.$$

Eine geometrische Proportion ist eine Gleichung zwischen zwei geometrischen Verhältnissen. In Buchstaben

$$a : b = c : d$$

z. B.

$$12 : 7 = 36 : 21.$$

§. 139.

Erklärung. Eine stetige Proportion ist eine Proportion, deren innere Glieder gleich sind.

Das mittlere Glied einer stetigen Proportion wird die mittlere Proportionale der beiden äußeren Glieder, und das letzte Glied einer stetigen Proportion die dritte Proportionale der beiden ersten Glieder genannt.

Eine stetige arithmetische Proportion kann bezeichnet werden

$$a - b = b - c,$$

und eine stetige geometrische Proportion

$$a : b = b : c.$$

Anmerkung. Die Bezeichnung der Differenzen durch arithmetische Verhältnisse und der Quotienten durch geometrische Verhältnisse, so wie der davon abhängige Begriff der Proportionen, gehören einer jetzt größtentheils veralteten mathematischen Kunstsprache an, welche nur in gewissen Fällen der mathematischen Anwendungen noch besondere Bequemlichkeiten darbietet. Namentlich sind die geometrischen Verhältnisse und Proportionen in der Geometrie von vielfachem Gebrauch, woher auch ihr Name genommen ist. Hier wird von den Proportionen nur das Nothwendigste abgehandelt werden.

Arithmetische Proportionen.

§. 140.

Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der inneren Glieder.

In Buchstaben ausgedrückt:

Wenn $a - b = c - d$,
so ist $a + d = b + c$.

Beweis. Zu der gegebenen Gleichung

$$a - b = c - d$$

addire man die identischen Gleichungen $b = b$ und $d = d$, so folgt

$$a + d = b + c,$$

w. z. b. w.

§. 141.

Zusatz. Eine Gleichung zwischen zwei Summen kann man stets in eine arithmetische Proportion verwandeln, indem man die Theile der einen Summe zu äußeren Gliedern, und die Theile der anderen Summe zu inneren Gliedern dieser Proportion macht.

§. 142.

Lehrsatz. Ein arithmetisches Verhältniß ändert seinen Werth nicht, wenn man zu den beiden Gliedern desselben gleiche Zahlen addirt, oder gleiche Zahlen davon subtrahirt.

In Buchstaben

$$(a + n) - (b + n) = a - b$$

$$(a - n) - (b - n) = a - b.$$

Beweis. In beiden Fällen ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der inneren Glieder, folglich sind nach §. 141 beides richtige Proportionen, w. z. b. w.

§. 143.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Zahlen a, b, c die vierte arithmetische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die gesuchte Zahl mit x, so hat man die Proportion

$$a - b = c - x.$$

Um hieraus den Werth von x zu bestimmen, hat man mit Anwendung des Lehrsatzes §. 140

$$a + x = b + c,$$

und daraus

$$x = b + c - a,$$

was zu suchen war.

In Worten sagt diese letzte Gleichung aus: Die vierte arithmetische Proportionale zu drei gegebenen Zahlen wird gefunden, indem man die zweite und die dritte gegebene Zahl addirt, und von der Summe die erste gegebene Zahl subtrahirt.

Beispiel. Die vierte arithmetische Proportionale zu den drei Zahlen $7\frac{1}{2}$, 11 und 20 ist $23\frac{1}{2}$. Als Probe dient die Proportion

$$7\tfrac{1}{2} - 11 = 20 - 23\tfrac{1}{2},$$

welche eine identische Gleichung sein muß.

§. 144.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a, b die dritte arithmetische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die Unbekannte durch x, so hat man die stetige Proportion

$$a - b = b - x$$

aus welcher auf dieselbe Weise, wie in der vorigen Aufgabe, folgt

$$x = 2b - a,$$

was zu suchen war.

In Worten: Die dritte arithmetische Proportionale zu zwei gegebenen Zahlen wird gefunden, indem man von dem Doppelten der zweiten gegebenen Zahl die erste subtrahirt.

Beispiel. Die dritte arithmetische Proportionale zu den beiden Zahlen $+ 7$ und $- 3$ ist $- 13$. Probe:

$$(+ 7) - (- 3) = (- 3) - (- 13).$$

§. 145.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a, b die mittlere arithmetische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die unbekannte Zahl durch x, so hat man die stetige Proportion

$$a - x = x - b.$$

Wendet man hierauf den Lehrsatz §. 140 an, so folgt

$$2x = a + b,$$

und daraus

$$x = \frac{a + b}{2}$$

was zu suchen war.

In Worten: Die mittlere arithmetische Proportionale zweier Zahlen wird gefunden, indem man die Summe dieser beiden Zahlen durch 2 dividirt.

Beispiel. Die mittlere arithmetische Proportionale der beiden Zahlen 112 und 97 ist $104\frac{1}{2}$. Probe:

$$112 - 104\tfrac{1}{2} = 104\tfrac{1}{2} - 97.$$

§. 146.

Erklärung. Unter dem arithmetischen Mittel zweier oder mehrerer Zahlen versteht man die Summe dieser Zahlen dividirt durch die Anzahl derselben.

Diese Erklärung ist eine Erweiterung des Begriffs der mittleren arithmetischen Proportionale, ausgedehnt auf mehr als zwei Zahlen. Sie findet im täglichen Leben eine vielfältige Anwendung, denn alle sogenannten Mittelwerthe und Durchschnittszahlen beruhen zuletzt auf der Bestimmung des arithmetischen Mittels.

Ein Beispiel aus dem Gebiete der mathematischen Anwendungen möge den Gebrauch des arithmetischen Mittels erläutern. Man wünscht eine gewisse Länge möglichst genau zu bestimmen, hat sie zu dem Ende fünfmal nach einander mit gleicher Sorgfalt gemessen und jedesmal ein anderes Resultat gefunden. Die fünf Resultate seien

164	Ruthen	7	Fuß	2	Zoll	(Decimalmaß)
164	"	9	"	5	"	
163	"	9	"	8	"	
165	"	2	"	7	"	
164	"	2	"	1	"	

Um nun hieraus den wahrscheinlichsten Werth der unbekannten Länge zu finden, nehme man von diesen fünf Zahlen das arithmetische Mittel, d. i. die Summe derselben dividirt durch 5, wodurch man erhält

164 Ruthen 6 Fuß $2\frac{3}{5}$ Zoll.

Der Grund für dieses Verfahren liegt in Betrachtungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche hier nicht erörtert werden können.

Geometrische Proportionen.

§. 147.

Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Product der inneren Glieder

In Buchstaben ausgedrückt:

Wenn $a : b = c : d$,
so ist $ad = bc$.

Beweis. Die gegebene Gleichung

$$a : b = c : d$$

multiplicire man mit den identischen Gleichungen $b = b$ und $d = d$, so folgt

$$ad = bc$$

w. z. b. w.

§. 148.

Zusatz. Eine Gleichung zwischen zwei Producten kann man stets in eine geometrische Proportion verwandeln, indem man die Factoren des einen Products zu äußern Gliedern, und die Factoren des andern Products zu innern Gliedern dieser Proportion macht.

§. 149.

Lehrsatz. Ein geometrisches Verhältniß ändert seinen Werth nicht, wenn man die beiden Glieder desselben mit gleichen Zahlen multiplicirt oder durch gleiche Zahlen dividirt.

In Buchstaben

$$an : bn = a : b$$

$$\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = a : b.$$

Beweis. In beiden Fällen ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Product der inneren Glieder, folglich sind nach §. 148 beides richtige Proportionen, w. z. b. w.

§. 150.

Aufgabe. Aus einer oder mehreren gegebenen geometrischen Proportionen neue geometrische Proportionen abzuleiten.

Auflösung. Diese Aufgabe umfaßt eine große Mannigfaltigkeit von Fällen, von denen hier nur die wichtigsten sollen aufgeführt werden.

1) Aus der gegebenen geometrischen Proportion

$$a : b = c : d \quad (1)$$

kann man herleiten: Durch Vertauschung der inneren Glieder unter einander

$$a : c = b : d; \quad (2)$$

durch Vertauschung der äußeren Glieder unter einander

$$d : b = c : a; \quad (3)$$

durch Vertauschung der inneren Glieder mit den äußeren (oder der Vorderglieder mit den Hintergliedern)

$$b : a = d : c. \quad (4)$$

Denn aus der Proportion (1) folgt nach §. 147 die Producten-Gleichung $ad = bc$, und aus dieser Gleichung nach §. 148 die übrigen Proportionen.

2) Aus der gegebenen geometrischen Proportion (1) kann man ferner herleiten: Durch Multiplication oder Division der Vorderglieder mit einerlei Zahl

$$an : b = cn : d; \quad (5)$$

$$\frac{a}{n} : b = \frac{c}{n} : d; \quad (6)$$

durch Multiplication oder Division der Hinterglieder mit einerlei Zahl

$$a : bn = c : dn, \quad (7)$$

$$a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}. \quad (8)$$

Denn wenn man die Producten-Gleichung $ad = bc$ aus (1) mit n multiplicirt oder durch n dividirt, so folgen aus der neu entste-

henden Gleichung $adn = bcn$ oder $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$ nach §. 148 die angezeigten Proportionen.

3) Aus der gegebenen geometrischen Proportion (1) kann man weiter herleiten: Durch Addition oder Subtraction der Vorder- und Hinterglieder

$$(a + b) : b = (c + d) : d \quad (9)$$
$$(a - b) : b = (c - d) : d \quad (10)$$

Denn wenn man zu der Producten-Gleichung $ad = bc$ aus (1) die identische Gleichung $bd = bd$ addirt oder diese von ihr subtrahirt, so folgt $(a + b)d = b(c + d)$ oder $(a - b)d = b(c - d)$, und hieraus ergeben sich durch §. 148 die aufgeführten neuen Proportionen.

4) Aus den beiden gegebenen Proportionen

$$\left.\begin{array}{l} a : b = m : n \\ c : d = n : p \end{array}\right\} \quad (11)$$

folgt durch sogenannte Zusammensetzung der Verhältnisse

$$ac : bd = m : p. \quad (12)$$

Denn man multiplicire die beiden Producten-Gleichungen $an = bm$ und $cp = dn$ aus (11), wodurch man erhält $acnp = bdmn$, d. i. $acp = bdm$, und wende hierauf §. 148 an.

5) Aus den beiden gegebenen Proportionen

$$\left.\begin{array}{l} a : b = m : n \\ c : d = m : n \end{array}\right\} \quad (13)$$

folgt durch Addition oder Subtraction

$$(a + c) : (b + d) = m : n \quad (14)$$
$$(a - c) : (b - d) = m : n. \quad (15)$$

Denn man addire oder subtrahire die beiden Producten-Gleichungen $an = bm$ und $cn = dm$ aus (13), wodurch man erhält $(a + c)n = (b + d)m$ oder $(a - c)n = (b - d)m$, und wende hierauf §. 148 an.

Die beiden Sätze in 4) und 5) können auch auf mehr als zwei gegebene Proportionen übertragen werden.

§. 151.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Zahlen a, b, c die vierte geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die gesuchte Zahl mit x, so hat man die Proportion

$$a : b = c : x.$$

Um hieraus den Werth von x zu bestimmen, hat man mit Anwendung des Lehrsatzes §. 147

$$ax = bc,$$

und daraus

$$x = \frac{bc}{a},$$

was zu suchen war.

In Worten sagt diese letzte Gleichung aus: Die vierte geometrische Proportionale zu drei gegebenen Zahlen wird gefunden, indem man die zweite gegebene Zahl mit der dritten multiplicirt, und das Product durch die erste dividirt.

Beispiel. Die vierte geometrische Proportionale zu den drei Zahlen $7\frac{1}{2}$, 11 und 20 ist $29\frac{1}{3}$. Als Probe dient die Proportion.

$$7\tfrac{1}{2} : 11 = 20 : 29\tfrac{1}{3}$$

welche identisch sein muß.

Auf dieser Aufgabe beruhet die sogenannte Regeldetri.

§. 152.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a, b die dritte geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die Unbekannte mit x, so hat man die stetige Proportion

$$a : b = b : x,$$

aus welcher ebenso, wie in der vorigen Aufgabe, folgt

$$x = \frac{b^2}{a},$$

was zu suchen war.

In Worten: Die dritte geometrische Proportionale zu zwei ge-

gebenen Zahlen wird gefunden, indem man das Quadrat der zweiten gegebenen Zahl durch die erste dividirt.

Beispiele. Die dritte geometrische Proportionale zu den beiden Zahlen 12 und 18 ist 27. Probe:

$$12 : 18 = 18 : 27.$$

§. 153.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a, b die mittlere geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die unbekannte Zahl durch x, so hat man die stetige Proportion

$$a : x = x : b.$$

Wendet man hierauf den Lehrsatz §. 147 an, so folgt

$$x^2 = ab$$

und daraus durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x = \sqrt{ab},$$

was zu suchen war.

In Worten: Die mittlere geometrische Proportionale zweier Zahlen wird gefunden, indem man aus dem Product dieser beiden Zahlen die Quadratwurzel zieht.

Beispiel. Die mittlere geometrische Proportionale der beiden Zahlen 6 und $13\frac{1}{2}$ ist 9. Probe:

$$6 : 9 = 9 : 13\tfrac{1}{2}.$$

§. 154.

Lehrsatz. Die mittlere arithmetische Proportionale zweier Zahlen ist, dem Zahlwerthe nach, immer größer als die mittlere geometrische Proportionale dieser beiden Zahlen, vorausgesetzt, daß diese beiden gegebenen Zahlen nicht gleich groß sind.

Oder:

$$\text{Wenn } a \lesseqgtr b$$

$$\text{so ist } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Beweis. Man nehme an, es sei $a > b$, so folgt, wenn man b transponirt

$$a - b > 0$$

und wenn man diese Ungleichung zum Quadrate erhebt

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0.$$

Hiezu addire man die identische Gleichung

$$4ab = 4ab$$

wodurch man erhält

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$$

ziehe nun die Quadratwurzel aus

$$a + b > 2\sqrt{ab}$$

und dividire endlich durch 2, so hat man

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

w. z. b. w.

Wenn man $a < b$ angenommen hätte, so würde dasselbe Resultat erschienen sein.

Wenn $a = b$ ist, so sind die mittlere arithmetische und die mittlere geometrische Proportionale sowol einander als auch den gegebenen Zahlen gleich.

Harmonische Proportionen.

§. 155.

Erklärung. Vier Zahlen a, b, c, d bilden eine harmonische Proportion, wenn die Differenz der beiden ersten Zahlen zu der Differenz der beiden letzten Zahlen in demselben geometrischen Verhältniß steht wie die erste Zahl zu der letzten Zahl.

In Buchstaben

$$(a - b) : (c - d) = a : d.$$

Alle übrigen Benennungen wiederholen sich wie oben. So hat man, wie im §. 138, äußere Glieder a und d, innere Glieder b und c, und zu drei gegebenen Gliedern eine vierte harmonische Proportionale.

Ferner ist, wie im §. 139, eine stetige harmonische Proportion eine solche, deren innere Glieder gleich sind, z. B. in Buchstaben

$$(a - b) : (b - c) = a : c$$

und dabei giebt es wieder zu zwei gegebenen Gliedern eine dritte harmonische Proportionale, so wie eine mittlere harmonische Proportionale.

Die Benennung „harmonische Proportion" ist aus der Musik entlehnt, wo die stetigen harmonischen Proportionen Anwendung finden. S. d. Anmerkung zu §. 162.

§. 156.

Lehrsatz. Wenn vier Zahlen a, b, c, d eine harmonische Proportion bilden, so geben dieselben vier Zahlen in umgekehrter Reihefolge d, c, b, a gleichfalls eine harmonische Proportion.

Oder:

Wenn $(a - b) : (c - d) = a : d$
so ist $(d - c) : (b - a) = d : a$.

Beweis. Man wende auf die gegebene Proportion

$$(a - b) : (c - d) = a : d$$

die Verwandlung (4) §. 150 an, so erhält man

$$(c - d) : (a - b) = d : a$$

und wenn man hierauf nach §. 149 die beiden Glieder des ersten Verhältnisses $(c - d) : (a - b)$ mit der Zahl -1 multiplicirt, so wird

$$(d - c) : (b - a) = d : a$$

w. z. b. w.

§. 157.

Lehrsatz. Wenn vier Zahlen a, b, c, d eine harmonische Proportion bilden, so geben die umgekehrten Werthe $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ dieser vier Zahlen, nach Vertauschung der inneren mit den äußeren Gliedern, gleichfalls eine harmonische Proportion.

Oder:

Wenn $(a - b) : (c - d) = a : d$
so ist $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Beweis. Die gegebene Proportion

$$(a-b):(c-d)=a:d$$

liefert nach §. 147 die Producten-Gleichung

$$ad-bd=ac-ad.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die identische Gleichung $abcd = abcd$, so entsteht

$$\frac{1}{bc}-\frac{1}{ac}=\frac{1}{bd}-\frac{1}{bc}$$

oder

$$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{c}=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)$$

und hieraus folgt nach §. 148 die Proportion

$$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right):\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$

w. z. b. w.

§. 158.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Zahlen a, b, c die vierte harmonische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die gesuchte Zahl mit x, so hat man die Proportion

$$(a-b):(c-x)=a:x.$$

Um hieraus den Werth von x zu bestimmen, hat man mit Anwendung des Lehrsatzes §. 147

$$ax-bx=ac-ax$$

und die Auflösung dieser Gleichung giebt

$$x=\frac{ac}{2a-b}$$

was gesucht wurde.

Beispiel. Die vierte harmonische Proportionale zu den drei Zahlen $7\frac{1}{2}$, 11 und 20 ist $37\frac{1}{2}$. Probe:

$$(7\tfrac{1}{2}-11):(20-37\tfrac{1}{2})=7\tfrac{1}{2}:37\tfrac{1}{2}.$$

Man vergleiche die Beispiele im §. 143 und §. 151, wo zu denselben drei Zahlen die vierte arithmetische und geometrische Proportionale sich angegeben finden.

§. 159.

Lehrsatz. Wenn drei Zahlen a, b, c eine stetige harmonische Proportion bilden, so geben die umgekehrten Werthe $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ dieser drei Zahlen eine stetige arithmetische Proportion.

Oder:

$$\text{Wenn } (a-b):(b-c) = a:c$$

$$\text{so ist } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}.$$

Beweis. Aus der gegebenen Proportion

$$(a-b):(b-c) = a:c$$

folgt nach §. 147 die Producten-Gleichung

$$ac - bc = ab - ac.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die identische Gleichung $abc = abc$, so entsteht

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

und daraus

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

w. z. b. w.

§. 160.

Zusatz. Wenn man von den drei Gliedern einer stetigen arithmetischen Proportion ihre umgekehrten Werthe nimmt, so hat man die drei Glieder einer stetigen harmonischen Proportion.

Z. B. aus der stetigen arithmetischen Proportion

$$7 - 10 = 10 - 13$$

folgt unmittelbar die stetige harmonische Proportion

$$(\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10}) : (\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{13}) = \tfrac{1}{7} : \tfrac{1}{13}.$$

Man kann dagegen bemerken, daß aus einer stetigen geometrischen Proportion, wenn man von ihren drei Gliedern die umgekehrten Werthe nimmt, immer nur wieder eine stetige geometrische Propor-

tion und nichts Neues hervorgeht. Z. B. die stetige geometrische Proportion

$$8 : 12 = 12 : 18$$

liefert wieder die stetige geometrische Proportion

$$\tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{12} : \tfrac{1}{18}.$$

§. 161.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a, b die dritte harmonische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die Unbekannte durch x, so hat man die stetige harmonische Proportion

$$(a - b) : (b - x) = a : x$$

aus welcher ebenso wie im §. 158 folgt

$$x = \frac{ab}{2a - b}$$

was zu suchen war.

Zu dem angegebenen Werthe für x hätte man auch aus §. 159 in Verbindung mit §. 144 gelangen können.

Beispiel. Die dritte harmonische Proportionale zu den beiden Zahlen 12 und 6 ist 4. Probe:

$$(12 - 6) : (6 - 4) = 12 : 4.$$

§. 162.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a, b die mittlere harmonische Proportionale zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die gesuchte Zahl durch x, so hat man die stetige harmonische Proportion

$$(a - x) : (x - b) = a : b.$$

Wendet man hierauf den Lehrsatz §. 147 an, so folgt

$$ab - bx = ax - ab$$

und die Auflösung dieser Gleichung giebt

$$x = \frac{2ab}{a + b}$$

was gesucht wurde.

Zu demselben Werthe für x würde man auch aus §. 159 in Verbindung mit §. 145 gelangt sein.

Beispiel. Die mittlere harmonische Proportionale der beiden Zahlen 21 und $15\frac{3}{4}$ ist 18. Probe:

$$(21-18):(18-15\tfrac{3}{4}) = 21 : 15\tfrac{3}{4}.$$

Anmerkung. Die beiden letzten Aufgaben finden in der Musik Anwendung. Wenn nämlich zwei schwingende Saiten von gleicher Spannung und gleicher Dicke ein consonirendes Intervall bilden, und man eine dritte Saite von derselben Spannung und derselben Dicke so bestimmt, daß die Längen dieser drei Saiten, in Zahlen ausgedrückt, in stetiger harmonischer Proportion stehen, so geben diese drei Saiten dasjenige, was man einen harmonischen Dreiklang nennt.

Z. B. der Grundton (er sei C) habe die Saitenlänge $= 1$, so ist die Octave des Grundtons (c) $= \frac{1}{2}$, und die dritte harmonische Proportionale zu den Zahlen 1 und $\frac{1}{2}$ giebt die Quinte der Octave (g) $= \frac{1}{3}$. Daraus entspringt der harmonische Dreiklang Ccg.

Die mittlere harmonische Proportionale von 1 und $\frac{1}{2}$ giebt die Quinte des Grundtons (G) $= \frac{2}{3}$; daraus der harmonische Dreiklang CGc.

Die mittlere harmonische Proportionale von 1 und $\frac{2}{3}$ giebt die Terz des Grundtons (E) $= \frac{4}{5}$; daraus der harmonische Dreiklang CEG. U. s. f.*)

Diese Zahlenbeziehungen unter den Tönen der Tonleiter sollen schon dem griechischen Mathematiker Pythagoras nicht unbekannt gewesen sein.

§. 163.

Lehrsatz. **Die mittlere harmonische Proportionale zweier Zahlen ist die dritte geometrische Proportionale zu der mittleren arithmetischen und der mittleren geometrischen Proportionale derselben beiden Zahlen.**

Oder in Buchstaben

*) Die mittlere harmonische Proportionale von $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ giebt ein zwischen der übermäßigen Sexte und der kleinen Septime enthaltenes Intervall, welches auf Tasten-Instrumenten nicht vorkommt, (das Kirnberger'sche J) $= \frac{4}{7}$; und daraus entspringt der harmonische Dreiklang GJc, welcher erst in neuerer Zeit in einigen größeren Musikwerken zur Anwendung gekommen ist.

$$\frac{a+b}{2} : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{2ab}{a+b}.$$

Beweis. Man multiplicire die äußeren und die inneren Glieder dieser Proportion, so erhält man gleiche Producte

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

und daraus folgt nach §. 148 die Richtigkeit der Proportion, w. z. b. w.

Arithmetische Progressionen.

§. 164.

Erklärung. Eine arithmetische Progression ist eine Reihe von Zahlen, von denen je zwei auf einander folgende sich um dieselbe Differenz von einander unterscheiden.

Die Differenz der Progression ist diejenige Zahl, welche, zu irgend einem Gliede der Progression addirt, das nächstfolgende Glied hervorbringt.

Wenn Anfangsglied und Differenz einer arithmetischen Progression gegeben sind, so kann man die Progression selbst bilden und beliebig weit fortsetzen. Z. B. das Anfangsglied sei 8 und die Differenz 3, so erhält man die Progression

$$8, 11, 14, 17, 20, \ldots$$

Oder wenn das Anfangsglied $+5$ und die Differenz -2 ist

$$+5, +3, +1, -1, -3, \ldots$$

Oder in Buchstaben, wenn das Anfangsglied mit a und die Differenz mit d bezeichnet wird

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots$$

Die Reihe wird geschlossen, sobald auch die Anzahl der Glieder gegeben ist.

Als Erklärung der arithmetischen Progression hätte man auch sagen können, sie sei eine Reihe Zahlen, von denen je drei auf einander folgende eine stetige arithmetische Proportion bilden.

Anmerkung. Die umgekehrten Werthe der Glieder einer arithmetischen Progression geben eine harmonische Progression, z. B.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}, \frac{1}{20}, \ldots$$

Je drei auf einander folgende Glieder derselben bilden eine stetige harmonische Proportion.

Die harmonischen Progressionen können jedoch hier nicht weiter betrachtet werden.

§. 165.

Lehrsatz. Das letzte Glied (z) einer arithmetischen Progression wird gefunden, indem man die Differenz (d) mit der um Eins verminderten Anzahl (n) der Glieder multiplicirt, und dieses Product zu dem Anfangsgliede (a) addirt.

In Buchstaben

$$z = a + (n - 1) d.$$

Beweis. Wenn man aus dem Anfangsgliede a und der Differenz d die Progression nach und nach entstehen läßt, so wird

das	1ste Glied	a
"	2te "	$a + d$
"	3te "	$a + 2d$
"	4te "	$a + 3d$
	rc.	rc.

Man sieht hieraus, daß der Coefficient von d in jedem Gliede um Eins kleiner ist als die Stellenzahl dieses Gliedes. Wenn aber n die Anzahl aller Glieder ist, so hat das letzte Glied die Stellenzahl n; folglich muß d in diesem Gliede den Coefficienten $n - 1$ haben, oder das letzte Glied selbst muß sein

$$z = a + (n - 1) d$$

w. z. b. w.

Beispiel. Wenn die Progression

$$8, 11, 14, 17, 20, \ldots.$$

15 Glieder besitzt, so hat man $a = 8$, $d = 3$, $n = 15$, folglich wird das letzte Glied $z = 50$.

§. 166.

Lehrsatz. Die Summe (s) einer arithmetischen Progression wird gefunden, indem man die Summe des ersten Gliedes (a) und letzten Gliedes (z) mit der Anzahl (n) der Glieder multiplicirt und dieses Product durch 2 dividirt.

In Buchstaben

$$s = \frac{(a + z) \cdot n}{2}.$$

Beweis. Die Summe s der arithmetischen Progression wird dargestellt durch die Gleichung

$$s = a + \overline{a + d} + \overline{a + 2d} + \overline{a + 3d} + \ldots + \overline{a + (n - 1)\,d}.$$

Zu dieser Summe addire man noch einmal dieselbe Summe, nur mit umgekehrter Anordnung der Glieder, nämlich

$$s = \overline{a + (n - 1)\,d} + \overline{a + (n - 2)\,d} + \overline{a + (n - 3)\,d} + \overline{a + (n - 4)\,d} + \ldots + a,$$

so erhält man, indem man die Addition Glied vor Glied ausführt

$$2s = \overline{2a + (n - 1)\,d} + \overline{2a + (n - 1)\,d} + \overline{2a + (n - 1)\,d} + \ldots (n \text{ mal})$$

oder kürzer

$$2s = [2a + (n - 1)\,d] \cdot n. \qquad (1)$$

Nun ist $2a + (n - 1)\,d$ nichts anderes als die Summe aus dem ersten Gliede a und dem letzten Gliede $a + (n - 1)\,d$, und kann also kürzer bezeichnet werden durch $a + z$. Folglich erhält man statt der Gleichung (1) die folgende Gleichung

$$2s = (a + z) \cdot n \qquad (2)$$

und hieraus folgt

$$s = \frac{(a + z) \cdot n}{2}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Wenn eine arithmetische Progression mit dem Gliede $a = 8$ beginnt und mit dem Gliede $z = 50$ schließt, und die Anzahl der Glieder $n = 15$ beträgt, so ist die Summe dieser Progression $s = 435$.

§. 167.

Zusatz. Die Summe einer arithmetischen Progression kann auch durch die Formel gefunden werden

$$s = \frac{[2a + (n - 1)\;d] \cdot n}{2}.$$

Diese Formel folgt aus der Gleichung (1) des vorigen §.

Geometrische Progressionen.

§. 168.

Erklärung. Eine geometrische Progression ist eine Reihe Zahlen, von denen je zwei auf einander folgende unter sich einerlei Quotienten bilden.

Der Quotient der Progression ist diejenige Zahl, welche, mit irgend einem Gliede der Progression multiplicirt, das nächstfolgende Glied hervorbringt.

Wenn Anfangsglied und Quotient einer geometrischen Progression gegeben sind, so kann man die Progression selbst bilden und beliebig weit fortsetzen. Z. B. das Anfangsglied sei 4 und der Quotient 3, so erhält man die Progression

$$4\ ,\ 12\ ,\ 36\ ,\ 108\ ,\ 324\ ,\ \ldots.$$

Oder wenn das Anfangsglied 9 und der Quotient $\frac{2}{3}$ ist

$$9\ ,\ 6\ ,\ 4\ ,\ 2\tfrac{2}{3}\ ,\ 1\tfrac{7}{9}\ ,\ \ldots.$$

Oder in Buchstaben, wenn das Anfangsglied mit a und der Quotient mit q bezeichnet wird

$$a\ ,\ aq\ ,\ aq^2\ ,\ aq^3\ ,\ aq^4\ ,\ \ldots.$$

Die Reihe wird geschlossen, sobald auch die Anzahl der Glieder gegeben ist.

Als Erklärung der geometrischen Progression hätte man auch sagen können, sie sei eine Reihe Zahlen, von denen je drei auf einander folgende eine stetige geometrische Proportion bilden.

§. 169.

Lehrsatz. Das letzte Glied (z) einer geometrischen Progression wird gefunden, indem man den Quotienten (q) mit der um Eins verminderten Anzahl (n) der Glieder potenzirt, und diese Potenz mit dem Anfangsgliede (a) multiplicirt.

In Buchstaben

$$z = a\,.\,q^{n-1}.$$

Beweis. Wenn man aus dem Anfangsgliede a und dem Quotienten q die Progression nach und nach entstehen läßt, so wird

das 1ste Glied a
„ 2te „ aq
„ 3te „ aq^2
„ 4te „ aq^3
rc. rc.

Man sieht hieraus, daß der Exponent von q in jedem Gliede um Eins kleiner ist als die Stellenzahl dieses Gliedes. Wenn aber n die Anzahl aller Glieder ist, so hat das letzte Glied die Stellenzahl n; folglich muß q in diesem Gliede der Exponenten $n-1$ haben, oder das letzte Glied selbst muß sein

$$z = a \,.\, q^{n-1}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Wenn die Progression

4 , 12 , 36 , 108 , 324 , ...

10 Glieder besitzt, so hat man $a = 4$, $q = 3$, $n = 10$, folglich wird das letzte Glied $z = 78732$.

§. 170.

Lehrsatz. Die Summe (s) einer geometrischen Progression wird gefunden, indem man den Quotienten (q) mit dem letzten Gliede (z) multiplicirt, von dem Producte das erste Glied (a) subtrahirt, und diese Differenz durch den um Eins verminderten Quotienten dividirt.

In Buchstaben

$$s = \frac{qz - a}{q - 1}.$$

Beweis. Die Summe s der geometrischen Progression wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}.$$

Man multiplicire diese Gleichung mit q, so erhält man

$$qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^n$$

und wenn man darauf die obere Gleichung von der unteren subtrahirt, wobei alle Glieder von aq an bis aq^{n-1} wegfallen, so kommt

$$(q - 1)\, s = aq^n - a. \qquad (1)$$

Nun ist aq^n nichts anderes als das Product aus dem Quotienten q und dem letzten Gliede aq^{n-1}, und kann also kürzer bezeichnet werden durch qz. Folglich erhält man statt der Gleichung (1) die folgende Gleichung

$$(q - 1)\, s = qz - a \qquad (2)$$

und hieraus folgt

$$s = \frac{qz - a}{q - 1}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Wenn eine geometrische Progression mit dem Gliede $a = 4$ beginnt und mit dem Gliede $z = 78732$ schließt und der Quotient $q = 3$ ist, so wird die Summe dieser Progression $s = 118096$.

§. 171.

Zusatz. Die Summe einer geometrischen Progression kann auch durch die Formel ausgedrückt werden

$$s = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Diese Formel folgt aus der Gleichung (1) des vorigen §.

§. 172.

Erklärung. Unter einer unendlichen geometrischen Progression versteht man eine solche, deren Glieder ohne Ende fortgesetzt gedacht werden.

Z. B. aus dem Anfangsgliede 9 und dem Quotienten $\frac{2}{3}$ entsteht die unendliche geometrische Progression

$$9,\ 6,\ 4,\ 2\tfrac{2}{3},\ 1\tfrac{7}{9},\ \ldots \text{ ins Unendliche} \ldots$$

Die unendliche geometrische Progression pflegt nur für den Fall betrachtet zu werden, wo der Quotient ein ächter Bruch ist; denn in diesem Falle besitzt sie eine angebbare Summe, wie der folgende §. zeigt.

§. 173.

Lehrsatz. Die Summe (s) einer unendlichen geometrischen Progression, deren Quotient (q) kleiner als Eins ist, wird ge=

funden, indem man den Quotienten von Eins subtrahirt, und durch diese Differenz das Anfangsglied (a) dividirt.

Oder in Buchstaben

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

Beweis. Man verfahre ähnlich wie im §. 170 und subtrahire von der Gleichung

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \text{ ins Unendliche} \ldots$$

dieselbe Gleichung, mit q multiplicirt, nämlich

$$qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots \text{ ins Unendliche} \ldots$$

Dabei werden alle Glieder von aq an bis ins Unendliche wegfallen, und es kommt bloß

$$(1 - q)\, s = a$$

woraus

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

w. z. b. w.

Beispiel. Die unendliche geometrische Progression, welche aus dem Anfangsgliede $a = 9$ und dem Quotienten $q = \frac{2}{3}$ hervorgeht, hat zur Summe $s = 27$. Das heißt, je mehr Glieder der Progression man zur Addition herbeizieht, desto mehr nähert sich ihre Summe der Zahl 27, welchen Werth die Summe erst wirklich erreicht, wenn man sich die Addition der Glieder bis ins Unendliche fortgeführt denkt.

Siebenter Abschnitt.

Potenzen und Wurzeln.

Potenzen mit absoluten ganzen Exponenten.

§. 174.

Lehrsatz*). Die Potenz einer positiven Zahl ist stets positiv. Die Potenz einer negativen Zahl ist positiv, wenn der Exponent gerade, und negativ, wenn der Exponent ungerade ist.

In Buchstaben

$$(+a)^{2n} = +a^{2n}, \qquad (+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}.$$
$$(-a)^{2n} = +a^{2n}, \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Beweis. Wenn die positive Zahl $+a$ zu irgend einer Potenz erhoben werden soll, so hat man nach §. 33 zu multipliciren

$$+a \,.\, +a \,.\, +a \,.\, +a \,\ldots$$

Wendet man nun hierauf den Lehrsatz §. 53 an, so erhält man nach und nach

$$+a \,.\, +a = +a^2$$
$$+a^2 \,.\, +a = +a^3$$
$$+a^3 \,.\, +a = +a^4$$
etc.

Man sieht also, daß die Potenz in allen Fällen positiv wird, der Exponent mag gerade oder ungerade sein. Man kann also (mit Rücksicht auf §. 61) schreiben

$$(+a)^{2n} = +a^{2n} \text{ und } (+a)^{2n+1} = +a^{2n+1},$$

w. z. b. w.

Wenn ferner die negative Zahl $-a$ zu irgend einer Potenz erhoben werden soll, so hat man nach §. 33 zu multipliciren

$$-a \,.\, -a \,.\, -a \,.\, -a \,\ldots$$

*) Hier sind zuvor die §§. 32 — 37 zu wiederholen.

Wendet man hierauf den Lehrsatz §. 53 an, so erhält man nach und nach

$$-a \,.\, -a = +a^2$$
$$+a^2 \,.\, -a = -a^3$$
$$-a^3 \,.\, -a = +a^4$$
$$\text{ꝛc.}$$

Man sieht hieraus, daß die Potenz mit jedem neu hinzutretenden Factor ihr Vorzeichen wechselt, und zwar wird sie positiv bei geraden Exponenten und negativ bei ungeraden Exponenten. Also kann man schreiben

$$(-a)^{2n} = +a^{2n} \text{ und } (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1},$$

w. z. b. w.

Beispiel. Es wird $(+5)^2 = +25$, $(+5)^3 = +125$, $(+5)^4 = +625$, ꝛc.; dagegen $(-5)^2 = +25$, $(-5)^3 = -125$, $(-5)^4 = +625$, ꝛc. Die Potenzen von $+5$ bleiben sämmtlich positiv, die Potenzen von -5 dagegen werden abwechselnd positiv und negativ.

§. 175.

Lehrsatz. Die Potenz eines Bruches wird gefunden, indem man den Zähler für sich und den Nenner für sich potenzirt.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Beweis. Nach §. 33 ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots \text{ (}n\text{ mal)}.$$

Wenn man nun die hier angezeigte Multiplication nach §. 100 ausführt, so erhält man weiter

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a \,.\, a \,.\, a \ldots (n \text{ mal})}{b \,.\, b \,.\, b \ldots (n \text{ mal})}$$

und dies wird kürzer geschrieben

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Es ist $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$, $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$, $(3\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$, ꝛc.

§. 176.

Lehrsatz. Die Potenz eines ächten Bruchs ist kleiner als die Basis, und desto kleiner, je größer der Exponent ist.

Die Potenz eines unächten Bruchs oder einer gemischten Zahl ist größer als die Basis, und desto größer, je größer der Exponent ist.

$$\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^3 > \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{ ꝛc. wenn } a < b \text{ ist.}$$

$$\frac{a}{b} < \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{ ꝛc. wenn } a > b \text{ ist.}$$

Beweis. Wenn man den ächten Bruch $\frac{a}{b}$ im Zähler und im Nenner mit b multiplicirt, so bleibt sein Werth unverändert. Multiplicirt man aber den Zähler mit der kleineren Zahl a, statt b, so muß der Werth des Bruches kleiner werden. Also ist $\frac{a^2}{b^2} < \frac{a}{b}$.

Ebenso beweist man, daß $\frac{a^3}{b^3} < \frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4} < \frac{a^3}{b^3}$, ꝛc. Folglich hat man

$$\frac{a}{b} > \left(\frac{a}{b}\right)^2 > \left(\frac{a}{b}\right)^3 > \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{ ꝛc. wenn } a < b \text{ ist}$$

w. z. b. w.

Wenn man ferner den unächten Bruch $\frac{a}{b}$ im Zähler und im Nenner mit b multiciplirt, so bleibt sein Werth unverändert. Multiplicirt man aber den Zähler mit der größeren Zahl a, statt b, so muß der Werth des Bruchs größer werden. Also ist $\frac{a^2}{b^2} > \frac{a}{b}$.

Ebenso beweist man, daß $\frac{a^3}{b^3} > \frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4} > \frac{a^3}{b^3}$, ꝛc. folglich hat man

$$\frac{a}{b} < \left(\frac{a}{b}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^3 < \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{ ꝛc. wenn } a > b \text{ ist}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Wenn man den ächten Bruch $\frac{2}{3}$ nach und nach zur 2ten, 3ten, 4ten, ꝛc. Potenz erhebt, so erhält man

$$\frac{2}{3} > \frac{4}{9} > \frac{8}{27} > \frac{16}{81} \text{ rc.}$$

Wenn man dagegen den unächten Bruch $\frac{5}{2}$ nach und nach zur 2ten, 3ten, 4ten rc. Potenz erhebt, so erhält man

$$\frac{5}{2} < \frac{25}{4} < \frac{125}{8} < \frac{625}{16} \text{ rc.}$$

oder, wie gemischte Zahlen geschrieben

$$2\frac{1}{2} < 6\frac{1}{4} < 15\frac{5}{8} < 39\frac{1}{16} \text{ rc.}$$

Man sieht, wie im ersten Beispiel die Potenzen fortwährend kleiner, und im zweiten Beispiel die Potenzen fortwährend größer werden.

§. 177.

Lehrsatz. Die Potenz eines Bruchs oder einer gemischten Zahl ist stets wieder ein Bruch oder eine gemischte Zahl, und kann niemals einer ganzen Zahl gleich werden.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ ein gegebener Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, d. h. keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen. Wird dieser Bruch mit irgend einem Exponenten potenzirt, so muß nach §. 175 die Potenzirung im Zähler für sich und im Nenner für sich ausgeführt werden, oder man erhält

$$\frac{a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots}{b \,.\, b \,.\, b \,.\, \ldots}.$$

Der Bruch wird also, nach der Potenzirung, im Zähler nur dieselben einfachen Factoren besitzen, welche er anfangs hatte, obwohl jeden derselben öfter wiederholt; und eben so wird er auch im Nenner nur dieselben einfachen Factoren besitzen, welche anfangs da waren, obwohl gleichfalls jeden derselben öfter wiederholt. Da nun vor der Potenzirung kein gemeinschaftlicher Factor im Zähler und Nenner vorhanden war, so kann also auch durch die Potenzirung kein gemeinschaftlicher Factor in den Zähler und Nenner gelangen, d. h. Zähler und Nenner des Bruchs sind auch noch nach der Potenzirung relative Primzahlen.

Noch weniger kann aber nach der Potenzirung der Zähler durch den Nenner theilbar sein (§. 66), oder die Potenz kann nicht einer ganzen Zahl gleich werden, w. z. b. w.

Beispiel. Der Bruch $\frac{21}{10}$ hat im Zähler die einfachen Factoren

3 und 7, und im Nenner die einfachen Factoren 2 und 5, oder es ist $\frac{21}{10} = \frac{3 \,.\, 7}{2 \,.\, 5}$, und Zähler und Nenner dieses Bruchs sind relative Primzahlen. Die 3te Potenz dieses Bruchs aber ist

$$\left(\frac{21}{10}\right)^3 = \frac{3 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 7}{2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5}$$

und hier zeigt der Augenschein, daß Zähler und Nenner dieses Bruchs wieder relative Primzahlen sind, d. h. keinen gemeinschaftlichen Factor enthalten; also noch weniger der Zähler durch den Nenner theilbar, oder der Werth von $\left(\frac{21}{10}\right)^3$ einer ganzen Zahl gleich sein kann.

Rechnung mit Potenzen.

§. 178.

Lehrsatz. Potenzen von gleicher Basis werden multiplicirt, indem man ihre Exponenten addirt.

$$a^n \,.\, a^r = a^{n+r}.$$

Beweis. Nach der Bedeutung des Potenzirens (§. 33) ist

$$a^n = a \,.\, a \,.\, a \ldots . \text{ (}n\text{ mal)}$$
$$a^r = a \,.\, a \,.\, a \ldots . \text{ (}r\text{ mal).}$$

Daraus folgt durch Multiplication

$$a^n \,.\, a^r = a \,.\, a \,.\, a \ldots . \text{ (}n\text{ mal)} \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots . \text{ (}r\text{ mal)}$$

d. i.

$$a^n \,.\, a^r = a \,.\, a \,.\, a \ldots . \text{ (}n + r\text{ mal)}$$

und dies kann man kürzer schreiben

$$a^n \,.\, a^r = a^{n+r}$$

w. z. b. w.

§. 179.

Zusatz. Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, indem man sie mit jedem Theile dieser Summe einzeln potenzirt und die entstandenen Potenzen multiplicirt.

$$a^{n+r} = a^n \,.\, a^r.$$

§. 180.

Lehrsatz. Potenzen von gleicher Basis werden dividirt, indem man von dem Exponenten des Dividenden den Exponenten des Divisors subtrahirt.

$$a^n : a^r = a^{n-r}.$$

Beweis. Man mache die Probe der Division (§. 29), so hat man zu multipliciren

$$a^{n-r} . a^r$$

und wenn man hierauf den Lehrsatz §. 178 anwendet, so folgt

$$a^{n-r} . a^r = a^{n-r+r} = a^n.$$

Da nun der gegebene Dividend wieder zum Vorschein kommt, so ist der Quotient a^{n-r} richtig, w. z. b. w.

Anmerkung. In diesem Satze liegt der Ursprung der Potenzen mit algebraischen ganzen Exponenten (s. §. 203).

§. 181.

Lehrsatz. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multiplicirt, indem man die Basen multiplicirt.

$$a^n . b^n = (ab)^n.$$

Beweis. Nach der Bedeutung des Potenzirens ist

$$a^n = a . a . a \ldots . (n \text{ mal})$$

$$b^n = b . b . b \ldots . (n \text{ mal}).$$

Daraus folgt durch Multiplication

$$a^n . b^n = a . a . a \ldots . (n \text{ mal}) . b . b . b \ldots . (n \text{ mal})$$

d. i. $$a^n . b^n = ab . ab . ab \ldots (n \text{ mal})$$

und dies kann man kürzer schreiben

$$a^n . b^n = (ab)^n.$$

w. z. b. w.

§. 182.

Zusatz. Ein Product wird potenzirt, indem man jeden Factor einzeln potenzirt und die entstandenen Potenzen multiplicirt.

$$(ab)^n = a^n . b^n.$$

§. 183.

Lehrsatz. Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividirt, indem man die Basis des Dividenden durch die Basis des Divisors dividirt.

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Beweis. Man mache die Probe der Division, so hat man zu multipliciren

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n . b^n$$

und wenn man hierauf den Lehrsatz §. 181 anwendet, so folgt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n . b^n = \left(\frac{a}{b} . b\right)^n = a^n.$$

Da nun der gegebene Dividend wieder zum Vorschein kommt, so ist der Quotient $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ richtig, w. z. b. w.

§. 184.

Lehrsatz. Eine Potenz wird mit einem neuen Exponenten potenzirt, indem man die Exponenten multiplicirt.

$$(a^n)^r = a^{nr}.$$

Beweis. Nach der Bedeutung des Potenzirens ist

$$(a^n)^r = a^n . a^n . a^n \dots (r \text{ mal})$$

Wenn man hierauf den Lehrsatz §. 178 anwendet, so folgt

$$(a^n)^r = a^{n + n + n + \dots (r \text{ mal})}$$

und dies kann man kürzer schreiben

$$(a^n)^r = a^{nr}$$

w. z. b. w.

§. 185.

Zusatz. Eine Zahl wird mit einem Product potenzirt, indem man sie mit dem einen Factor, und die entstandene Potenz mit dem andern Factor dieses Products potenzirt.

$$a^{nr} = (a^n)^r.$$

§. 186.

Erklärung. Eine Summe von zwei Theilen wird ein Binomium, und eine Summe von mehr als zwei Theilen ein Polynomium genannt.

Z. B. $a + b$ ist ein Binomium; $a + b + c$, $a + b + c + d$ &c. sind Polynomien.

§. 187.

Aufgabe. Ein gegebenes Binomium zu potenziren.

Auflösung. 1) Es sei das Binomium $a + b$ zur 2ten Potenz zu erheben, so hat man die Multiplication $(a + b)\,(a + b)$ auszuführen. Dies giebt

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad\; + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2\,ab + b^2. \end{array}$$

Folglich ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2.$$

In Worten: Um ein Binomium zum Quadrat zu erheben, bilde man das Quadrat des ersten Theils, addire dazu das doppelte Product aus dem ersten und dem zweiten Theile, und dazu das Quadrat des zweiten Theils.

2) Es sei das Binomium $a + b$ zur dritten Potenz zu erheben, so hat man zu multipliciren $(a + b)\,(a + b)\,(a + b)$; und wenn man dabei das vorige Resultat zu Hülfe nimmt, so bleibt nur noch die Multiplication auszuführen

$$\begin{array}{l} a^2 + 2\,ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2\,a^2b + ab^2 \\ \qquad\quad a^2b + 2\,ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3. \end{array}$$

Folglich ist

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3.$$

In Worten: Um ein Binomium zum Cubus zu erheben, bilde man den Cubus des ersten Theils, addire dazu das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten Theils mit dem zweiten Theile, dazu das dreifache Product aus dem ersten Theile mit dem Quadrate des zweiten Theils, und dazu den Cubus des zweiten Theils.

3) Es sei das Binomium $a + b$ zur 4ten Potenz zu erheben, so hat man das vorige Resultat wieder mit $a + b$ zu multipliciren nämlich

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a + b \\ \hline a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ \qquad\quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{array}$$

Folglich ist

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

In Worten: Um ein Binomium zum Biquadrat zu erheben, bilde man das Biquadrat des ersten Theils, addire dazu das vierfache Product aus dem Cubus des ersten Theils mit dem zweiten Theile, dazu das sechsfache Product aus dem Quadrate des ersten und dem Quadrate des zweiten Theils, dazu das vierfache Product aus dem ersten Theile mit dem Cubus des zweiten Theils, und dazu das Biquadrat des zweiten Theils.

Es ist leicht zu übersehen, wie man auf diesem Wege fortfahren kann, sich sowol Formeln als Regeln zu bilden, um ein gegebenes Binomium zu beliebig hohen Potenzen zu erheben.

Anmerkung. Allgemein ist

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}\,b + \frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,b^3$$
$$+ \ldots .\ b^n.$$

Setzt man hier $n = 2, 3, 4$, rc., so erhält man wieder die obigen einzelnen Gleichungen. Diese Formel macht den Gegenstand des binomischen Lehrsatzes aus, der hier nicht bewiesen werden kann.

§. 188.

Aufgabe. Ein gegebenes Polynomium zu potenziren.

Auflösung. Man stelle das gegebene Polynomium, durch Zerlegung desselben in zwei Theile, wie ein Binomium dar, und wende auf dieses die vorhergehenden Regeln an.

Z. B. $a + b + c$ stelle man dar wie $(a + b) + c$, so wird

1) $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$

und durch weitere Ausführung

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

2) $(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$

und durch weitere Ausführung

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3.$$

u. s. w.

Ferner $a + b + c + d$ stelle man dar wie $(a + b + c) + d$, so wird

1) $(a + b + c + d)^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2$

und durch weitere Ausführung

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2.$$

2) $(a + b + c + d)^3 = (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$

und durch weitere Ausführung

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3.$$

u. s. w.

Wurzeln mit absoluten ganzen Exponenten.

§. 189.

Lehrsatz. Die Wurzel aus einer ganzen Zahl kann niemals ein Bruch oder eine gemischte Zahl sein.

Beweis. Man denke sich irgend einen Bruch oder eine gemischte Zahl, und mache mit demselben die Probe des Wurzelausziehens

(§. 36), indem man ihn mit dem gegebenen Wurzel-Exponenten potenzirt. Durch diese Potenzirung kann, nach dem Lehrsatze §. 177, niemals eine ganze Zahl entstehen; folglich kann die gegebene Zahl, welche eine ganze Zahl ist, nicht wieder zum Vorschein kommen; und folglich kann der gedachte Bruch oder die gedachte gemischte Zahl niemals die gesuchte Wurzel sein, w. z. b. w.

Beispiel. Die Quadratwurzel aus 40 liegt zwischen den ganzen Zahlen 6 und 7. Aber die Zahl 6 mit einem angehängten ächten Bruche hat, wie man auch diesen ächten Bruch wählen mag, niemals die Eigenschaft, daß ihr Quadrat genau der Zahl 40 gleich werde. Also kann die Quadratwurzel aus 40 weder durch eine ganze Zahl, noch durch eine ganze Zahl mit angehängtem Bruche, genau ausgedrückt werden.

§. 190.

Erklärung. Eine Zahl, welche sich durch ganze Zahlen und Brüche niemals genau ausdrücken läßt, der man aber so nahe kommen kann wie man will, nennt man eine irrationale Zahl.

Im Gegensatze heißen ganze Zahlen und Brüche rationale Zahlen.

Die Wörter rational und irrational sind aus dem lateinischen Worte ratio gebildet, welches in mathematischen Schriften die Bedeutung hat: Verhältniß. Ebenso hat Euklides das Wort ἄλογος für irrational, aus dem griechischen λόγος, welches gleichfalls in mathematischen Schriften für Verhältniß gebraucht wird. Man will damit sagen: Rationale Zahlen sind solche Zahlen, welche ein angebbares Verhältniß zur Einheit besitzen; irrationale Zahlen dagegen sind solche Zahlen, welche kein angebbares Verhältniß zur Einheit besitzen.

§. 191.

Lehrsatz. Die Wurzel aus einer absoluten ganzen Zahl ist entweder gleichfalls eine absolute ganze Zahl, oder eine irrationale Zahl.

Beweis. Daß die Wurzel aus einer absoluten ganzen Zahl in gewissen Fällen gleichfalls eine absolute ganze Zahl ist, lehrt

schon der Anblick der Potenzen=Tafel §. 33, welche man sich beliebig erweitert denken kann. Daß sie niemals ein Bruch oder eine gemischte Zahl sein kann, ist im §. 189 bewiesen. Es bleibt also nur noch zu beweisen übrig, daß in allen übrigen Fällen, welche nicht in der Potenzen=Tafel enthalten sind, die Wurzel aus einer absoluten ganzen Zahl irrational sei, d. h. daß man ihr durch ganze Zahlen und Brüche so nahe kommen könne wie man will, ohne sie jemals genau zu erreichen.

Es sei z. B. die Quadratwurzel aus 40 zu bestimmen. Diese Quadratwurzel liegt zwischen den beiden ganzen Zahlen 6 und 7. Man interpolire das Intervall dieser beiden Zahlen durch einen beliebigen Nenner, z. B. 5, so erhält man

$$6\,,\quad 6\tfrac{1}{5}\,,\quad 6\tfrac{2}{5}\,,\quad 6\tfrac{3}{5}\,,\quad 6\tfrac{4}{5}\,,\quad 7$$

und die Quadrate dieser Zahlen werden

$$36\,,\ 38\tfrac{11}{25}\,,\ 40\tfrac{24}{25}\,,\ 43\tfrac{14}{25}\,,\ 46\tfrac{6}{25}\,,\ 49.$$

Hier zeigt sich nun, daß die Zahl 40 zwischen den beiden Quadraten $38\frac{11}{25}$ und $40\frac{24}{25}$ liegt; folglich liegt die Quadratwurzel aus 40 zwischen den beiden Zahlen $6\frac{1}{5}$ und $6\frac{2}{5}$, und man begeht einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{5}$ ist, wenn man einen dieser beiden Nachbarwerthe für die richtige Quadratwurzel nimmt.

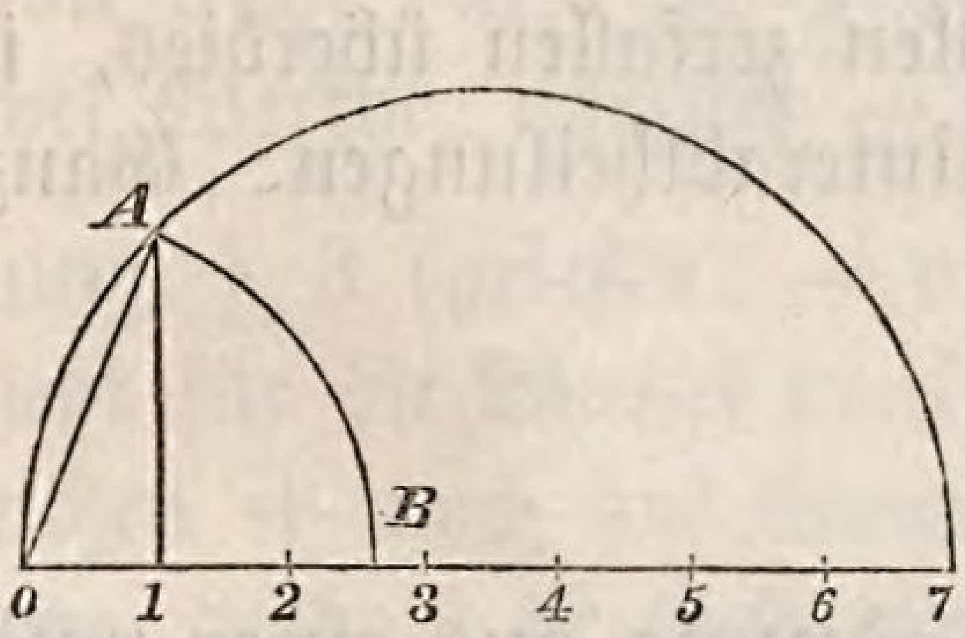
Der Fehler würde augenscheinlich noch kleiner geworden sein, wenn man einen größeren Nenner als 5 der Interpolirung zum Grunde gelegt hätte, und man hat es auf diese Weise völlig in seiner Gewalt, durch die Annahme eines hinlänglich großen Nenners den Fehler unter jede beliebige Kleinheit hinabzubringen, w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn man irrationale Zahlen vollkommen genau darstellen will, so muß man sich denken, daß die Zahlenreihe durch einen unendlich großen Nenner interpolirt werde, so daß mithin die einzelnen Zahlen dieser interpolirten Zahlenreihe in unendlich kleinen Intervallen auf einander folgen. Die Zahlenreihe hört alsdann factisch auf, eine Reihe von Punkten darzustellen, welche durch leere Räume von einander getrennt werden; sie verwandelt sich vielmehr in eine Zahlenlinie, deren sämmtliche Punkte Zahlen vorstellen. Dieser Fortschritt der Arithmetik gehört indessen nicht mehr der Elementar=Mathematik an.

Mit Hülfe einer geometrischen Construction ist es übrigens immer sehr leicht, eine irrationale Quadratwurzel vollkommen genau

in der Zahlenlinie zur Darstellung zu bringen. Es werde z. B. $\sqrt{7}$ gesucht. Man denke sich diese Quadratwurzel als mittlere geometrische Proportionale zwischen den Zahlen 1 und 7, d. h. als mittleres Glied der Proportion

$$7 : x = x : 1$$



aus welcher folgt $x = \sqrt{7}$. Nun sei in nebenstehender Figur die Linie 0 , 1 , 2 , 3 , . . . die Zahlenlinie. Ueber dem Abschnitte 07, als Durchmesser, construire man den Halbkreis $0A7$, errichte in dem Punkte 1 der Zahlenlinie ein Perpendikel, welches diesen Halbkreis in A trifft, und ziehe $0A$. Alsdann ist nach einem Lehrsatze der Planimetrie $0A$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Linien 01 und 07; und wenn man also den Abschnitt $0A$ von 0 aus auf der Zahlenlinie nach B abträgt, so stellt der Punkt B der Zahlenlinie genau die mittlere geometrische Proportionale der beiden Zahlen 1 und 7, d. i. die Quadratwurzel aus 7 dar.

Für Cubikwurzeln haben schon die Griechen zu Platons Zeit vergeblich nach einer ähnlichen Construction gesucht, veranlaßt durch das im Alterthume berühmte Delische Problem, oder die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels. Denn wenn ein Würfel (Cubus) verdoppelt werden soll, so lehrt die Stereometrie, daß seine Seitenlänge in dem Verhältniß $1 : \sqrt[3]{2}$ zunehmen muß, und mithin bildet den eigentlichen Kern des Delischen Problems die Aufgabe, die irrationale Cubikwurzel aus 2 durch Construction zu finden. Diese Aufgabe kann aber durch die Hülfsmittel der Elementar-Geometrie allein, d. h. durch Constructionen vermittelst der geraden Linie und des Kreises, nicht gelöst werden.

§. 192.

Erklärung. Eine Zahl, welche nicht positiv und nicht negativ sein kann, sondern zu deren Darstellung man ein neues, von + und − verschiedenes Vorzeichen besitzen müßte, nennt man eine *imaginäre Zahl*.

Im Gegensatze werden alle algebraischen Zahlen *reelle Zahlen* genannt.

Statt: reelle und imaginäre Zahlen, gebraucht man auch wohl die entsprechenden deutschen Ausdrücke: wirkliche und eingebildete Zahlen. In diesen Ausdrücken ist noch die Schwierigkeit zu erkennen, welche man noch vor nicht langer Zeit in der Natur dieser Zahlen gefunden hat.

Sowol reelle als auch imaginäre Zahlen zerfallen überdies, in Betreff ihres Zahlwerths, in die drei Unterabtheilungen: Ganze Zahlen, Brüche und Irrationalzahlen.

§. 193.

Lehrsatz. Eine Wurzel ungerader Ordnung aus einer positiven Zahl ist positiv, aus einer negativen Zahl negativ.

Eine Wurzel gerader Ordnung aus einer positiven Zahl kann sowol positiv als negativ genommen werden, aus einer negativen Zahl ist sie imaginär.

In Buchstaben

$$\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}, \qquad \sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a},$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}, \qquad \sqrt[2n]{-a} = \text{imaginär}.$$

Beweis. Man mache in allen diesen Fällen die Probe des Wurzelausziehens, unter Anwendung des Lehrsatzes §. 174.

$+\sqrt[2n+1]{a}$ giebt, mit dem ungeraden Exponenten $2n+1$ potenzirt, wieder die gegebene Zahl $+a$, ist also die richtige Wurzel, w. z. b. w.

$-\sqrt[2n+1]{a}$ giebt, mit den ungeraden Exponenten $2n+1$ potenzirt, wieder die gegebene Zahl $-a$, ist also die richtige Wurzel, w. z. b. w.

$+\sqrt[2n]{a}$ und $-\sqrt[2n]{a}$ geben beide, mit dem geraden Exponenten $2n$ potenzirt, wieder die gegebene Zahl $+a$, sind also beide richtige Wurzeln, w. z. b. w.

$+\sqrt[2n]{a}$ und $-\sqrt[2n]{a}$ bringen beide, mit dem geraden Exponenten $2n$ potenzirt, nicht wieder die gegebene Zahl $-a$ hervor, also kann

die Wurzel weder positiv noch negativ sein und ist mithin imaginär, w. z. b. w.

Beispiele. Es ist $\sqrt[3]{+64} = +4$ und $\sqrt[3]{-64} = -4$, wie man leicht durch die Probe erkennen kann. Ferner $\sqrt[4]{+81}$ hat zwei Werthe, nämlich $+3$ oder -3, welche man in der Bezeichnung ± 3 (gelesen: $+$ oder $-$) zusammenfaßt. Endlich $\sqrt[4]{-81}$ giebt für die Wurzel zwar den Zahlwerth 3; aber weder das Vorzeichen $+$ noch das Vorzeichen $-$ genügt der Forderung der Aufgabe, deshalb ist diese Wurzel imaginär.

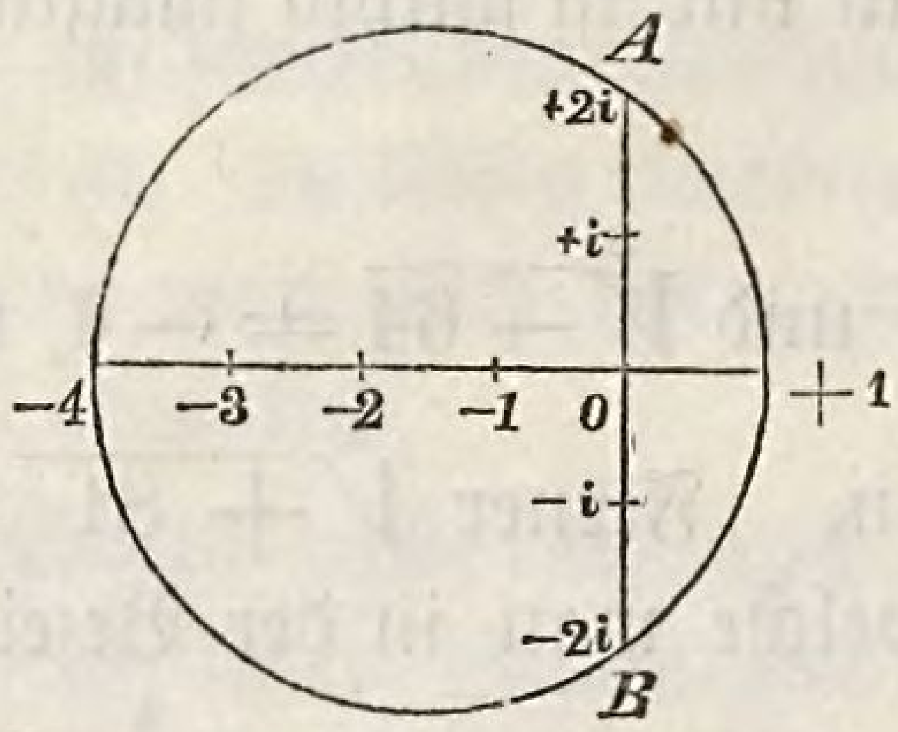
Anmerkung. Die imaginären Zahlen bilden eine zweite Gattung von Zahlen, deren Betrachtung nicht mehr der Elementar-Mathematik angehört. Doch läßt sich auch hier, wie bei den Irrationalzahlen, leicht der Weg anzeigen, welchen die Betrachtung dieser Zahlen einzuschlagen hat.

Zunächst versteht man unter der imaginären Einheit eine Zahl, deren Quadrat -1 ist. Die imaginäre Einheit kann also durch $\sqrt{-1}$ bezeichnet werden, oder auch durch den selbständigen Buchstaben i, welcher an die Bedingung $i^2 = -1$ gebunden ist. Durch diese imaginäre Einheit kann nun jede imaginäre Quadratwurzel ohne Mühe ausgedrückt werden, und man findet z. B. leicht $\sqrt{-4} = \pm 2i$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$, 2c. Aber auch jede andere imaginäre Wurzel läßt sich durch Hülfe der imaginären Einheit i ausdrücken, was jedoch hier nicht weiter dargelegt werden kann.

Was ferner die räumliche Darstellung der imaginären Zahlen betrifft, so geht schon aus der Anmerkung zu §. 191 hervor, daß diese Zahlen in der Zahlenlinie nicht mehr Raum finden können, da die Zahlenlinie bereits durch die reellen Zahlen vollständig ausgefüllt wird. Legt man aber durch die Zahlenlinie eine Ebene, so läßt sich in dieser Ebene jede imaginäre Quadratwurzel durch eine einfache Construction zur Darstellung bringen. Es werde z. B. $\sqrt{-4}$ gesucht. Man denke sich diese Quadratwurzel als mittlere geometrische Proportionale zwischen den Zahlen $+1$ und -4, d. h. als mittleres Glied der Proportion

$$-4 : x = x : +1$$

aus welcher folgt $x = \sqrt{-4}$. In der umstehenden Figur sei nun



die Linie $-4, -3, -2, \ldots +1$ die Zahlenlinie. Ueber dem Abschnitte $-4 +1$ als Durchmesser construire man einen Kreis, und errichte in dem Punkte 0 ein Perpendikel auf der Zahlenlinie, welches diesen Kreis in A und B trifft. Alsdann ist nach einem Lehrsatze der Planimetrie sowol $0A$ als $0B$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Linien $0 + 1$ und $0 - 4$, oder jeder der beiden Punkte A und B in der Ebene stellt, seiner Lage nach, die mittlere geometrische Proportionale der beiden Zahlen $+1$ und -4, d. i. die Quadratwurzel aus -4 dar. Nun hat diese Quadratwurzel überdies den Werth $\pm 2i$; folglich sind die beiden Punkte A und B der Ebene die Darstellungen der beiden imaginären Zahlen $+2i$ und $-2i$, oder der imaginären Einheit i muß man die Bedeutung unterlegen, man solle, vom Nullpunkte der Zahlenlinie aus und rechtwinkelig auf diese Zahlenlinie, sich einen Schritt seitwärts bewegen.

Die räumliche Darstellung der imaginären Zahlen hat zuerst Gauß gegeben.

§. 194.

Lehrsatz. Aus einem Bruche wird eine Wurzel gezogen, indem man aus Zähler und Nenner einzeln die Wurzel zieht.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Beweis. Man mache die Probe des Wurzelausziehens, so erhält man nach §. 175

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}$$

und wenn man auf Zähler und Nenner dieses letzten Bruchs den Satz §. 36 anwendet

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}.$$

Da nun die gegebene Zahl $\frac{a}{b}$ wieder zum Vorschein kommt, so ist die Wurzel $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ richtig, w. z. b. w.

Beispiele. Es ist

$$\sqrt{\tfrac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \tfrac{3}{4}, \text{ Probe } (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{9}{16}.$$

$$\sqrt[3]{12\tfrac{19}{27}} = \sqrt[3]{\tfrac{343}{27}} = \tfrac{7}{3} = 2\tfrac{1}{3}, \text{ Probe } (2\tfrac{1}{3})^3 = 12\tfrac{19}{27}.$$

Wenn die Wurzeln im Zähler und im Nenner irrational werden, so kann man den Bruch vor der Wurzelausziehung immer so umformen, daß wenigstens der Nenner eine rationale Wurzel liefert. Z. B.

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{14}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{12}} = \sqrt[3]{\frac{90}{216}} = \frac{\sqrt[3]{90}}{6}, \quad \sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{75}{125}} = \frac{\sqrt[3]{75}}{5},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}.$$

Rechnung mit Wurzeln.

§. 195.

Lehrsatz. Aus einem Producte wird eine Wurzel gezogen, indem man aus jedem Factor einzeln die Wurzel zieht.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}.$$

Beweis. Man mache die Probe des Wurzelausziehens, indem man die angezeigte Wurzel $\sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$ mit dem gegebenen Exponenten n potenzirt. Man erhält sodann nach §. 182

$$(\sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \, . \, (\sqrt[n]{b})^n$$

und hieraus wird nach §. 36

$$(\sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Da nun die gegebene Zahl ab wieder zum Vorschein kommt, so ist $\sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$ die richtige Wurzel, w. z. b. w.

§. 196.

Zusatz. Wurzeln mit gleichen Wurzel=Exponenten werden multiplicirt, indem man ihre Zahlen multiplicirt.

$$\sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

§. 197.

Lehrsatz. Wurzeln mit gleichen Wurzel=Exponenten werden dividirt, indem man ihre Zahlen dividirt.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Beweis. Man mache die Probe der Division, so erhält man mit Anwendung des vorigen Satzes

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \, . \, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} \, . \, b} = \sqrt[n]{a}.$$

Also kommt der gegebene Dividend wieder zum Vorschein, und mithin ist der Quotient richtig, w. z. b. w.

§. 198.

Lehrsatz. Eine Wurzel wird mit einem gegebenen Exponenten potenzirt, indem man ihre Zahl mit diesem Exponenten potenzirt.

$$(\sqrt[r]{a})^n = \sqrt[r]{a^n}.$$

Beweis. Nach dem Begriffe des Potenzirens ist

$$(\sqrt[r]{a})^n = \sqrt[r]{a} \, . \, \sqrt[r]{a} \, . \, \sqrt[r]{a} \, \ldots \, (n\text{mal})$$

Wenn man diese hier angezeigte Multiplication nach §. 196 ausführt, so folgt

$$(\sqrt[r]{a})^n = \sqrt[r]{a \, . \, a \, . \, a \, \ldots \, (n\text{mal})}$$

und dies ist kürzer

$$(\sqrt[r]{a})^n = \sqrt[r]{a^n}$$

w. z. b. w.

§. 199.

Zusatz. Aus einer Potenz wird eine Wurzel gezogen, indem man aus der Basis dieser Potenz die Wurzel zieht und dieselbe mit dem Exponenten dieser Potenz potenzirt.

$$\sqrt[r]{a^n} = (\sqrt[r]{a})^n.$$

§. 200.

Lehrsatz. Aus einer Potenz wird eine Wurzel gezogen, indem man den Potenz-Exponenten durch den Wurzel-Exponenten dividirt.

$$\sqrt[r]{a^n} = a^{\frac{n}{r}}.$$

Beweis. Man mache die Probe des Wurzelausziehens, so hat man mit Anwendung des Lehrsatzes §. 184.

$$\left(a^{\frac{n}{r}}\right)^r = a^{\frac{n}{r} \cdot r} = a^n.$$

Da hier die gegebene Zahl a^n wieder zum Vorschein kommt, so ist $a^{\frac{n}{r}}$ die richtige Wurzel, w. z. b. w.

Anmerkung. In diesem Satze liegt der Ursprung der Potenzen mit Bruch-Exponenten (s. §. 206).

§. 201.

Lehrsatz. Eine Wurzel, deren Wurzel-Exponent ein Product ist, wird gefunden, indem man nach einander die Wurzeln auszieht, deren Wurzel-Exponenten die Factoren dieses Products sind.

$$\sqrt[nr]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}.$$

Beweis. Man mache die Probe des Wurzelausziehens, indem man die gefundene Wurzel mit dem gegebenen Exponenten potenzirt, nämlich

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}\right)^{nr}.$$

Wendet man hierauf den Satz §. 185 an, indem man zuerst mit dem Factor n potenzirt, so erhält man (§. 36.)

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}\right)^n = \sqrt[r]{a}.$$

Wird dieses Resultat weiter mit dem Factor r potenzirt, so kommt

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}\right)^{nr} = \left(\sqrt[r]{a}\right)^r = a.$$

Hier ist die gegebene Zahl wieder zum Vorschein gekommen, folglich war die angezeigte Wurzel richtig, w. z. b. w.

§. 202.

Zusatz. Aus einer Wurzel wird eine Wurzel gezogen, indem man die Wurzel-Exponenten multiplicirt.

$$\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[nr]{a}.$$

Potenzen mit algebraischen ganzen Exponenten.

§. 203.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl mit einem gegebenen positiven oder negativen Exponenten zu potenziren.

Auflösung. Wenn der Exponent positiv ist, so setze man die Basis selbst so viel mal als Factor, wie der Zahlwerth des Exponenten anzeigt.

Wenn der Exponent negativ ist, so setze man das Umgekehrte der Basis so viel mal als Factor, wie der Zahlwerth des Exponenten anzeigt.

Beispiele. Man findet $5^{+2} = 5 . 5 = 25$, $(\frac{2}{7})^{+3} = \frac{2}{7} . \frac{2}{7} . \frac{2}{7} = \frac{8}{343}$, $(3\frac{1}{4})^{+2} = \frac{13}{4} . \frac{13}{4} = 10\frac{9}{16}$.

Dagegen $5^{-2} = \frac{1}{5} . \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$, $(\frac{2}{7})^{-3} = \frac{7}{2} . \frac{7}{2} . \frac{7}{2} = 42\frac{7}{8}$, $(3\frac{1}{4})^{-2} = \frac{4}{13} . \frac{4}{13} = \frac{16}{169}$.

§. 204.

Lehrsatz. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem Umgekehrten derselben Potenz, mit positivem Exponenten genommen.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Beweis. Der vorigen Aufgabe gemäß ist

$$a^{-n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots (n \text{ mal})$$

und wenn man diese Brüche nach §. 100 multiplicirt, so erhält man

$$a^{-n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots (n \text{ mal})}$$

d. i. kürzer

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

w. z. b. w.

§. 205.

Lehrsatz. Eine Potenz mit dem Exponenten Null hat immer den Werth Eins.

$$a^0 = 1.$$

Beweis. Nach §. 43 ist $0 = 1 - 1$. Also hat man

$$a^0 = a^{1-1}$$

und dieses heißt, man soll die Basis a selbst und das Umgekehrte von a als Factor setzen. Mithin erhält man

$$a^0 = a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

w. z. b. w.

Potenzen mit Bruch-Exponenten.

§. 206.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl mit einem gegebenen Bruch-Exponenten zu potenziren.

Auflösung. Man zerlege die Basis in so viel gleiche Factoren wie der Nenner des Exponenten anzeigt, und setze einen solchen Factor so viel mal als Factor, wie der Zähler des Exponenten vorschreibt.

Wenn der Bruch-Exponent überdies negativ ist, so nehme man dieselben Operationen an dem Umgekehrten der Basis vor.

Beispiele. Es wird $8^{\frac{2}{3}} = 2 . 2 = 4$, $25^{\frac{3}{2}} = 5 . 5 . 5 = 125$, $16^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, $(\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $(3\frac{3}{8})^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} . \frac{2}{3} . \frac{2}{3} . \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$.

§. 207.

Lehrsatz. Eine Potenz mit einem Bruch-Exponenten ist einer Wurzel gleich, indem man den Nenner des Bruch-Exponenten zum Wurzel-Exponenten macht.

$$a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^n}.$$

Beweis. Nach der vorigen Aufgabe ist

$$a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a} . \sqrt[r]{a} . \sqrt[r]{a} \ldots (n \text{ mal})$$

und wenn man diese Wurzeln nach §. 196 multiplicirt, so erhält man

$$a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a . a . a \ldots . (n \text{ mal})}$$

d. i. kürzer

$$a^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^n}.$$

w. z. b. w.

§. 208.

Lehrsatz. Das Wurzelausziehen kann immer in ein Potenziren verwandelt werden, indem man das Umgekehrte des Wurzel-Exponenten zum Potenz-Exponenten macht.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[\frac{n}{r}]{a} = a^{\frac{r}{n}}.$$

Beweis. Man mache in allen diesen Fällen die Probe des

Wurzelausziehens, mit Anwendung des Lehrsatzes §. 184. Alsdann erhält man

1) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}.n} = a^1 = a.$

2) $\left(a^{-\frac{1}{n}}\right)^{-n} = a^{-\frac{1}{n}.-n} = a^1 = a.$

3) $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{n}{r}} = a^{\frac{r}{n}.\frac{n}{r}} = a^1 = a.$

Hier erscheint in allen Fällen wieder die gegebene Zahl a, folglich sind die angezeigten Potenzen die richtigen Wurzeln w. z. b. w.

Anmerkung. Der Fall $\sqrt[0]{a}$ mußte hier ausgeschlossen bleiben, weil er zu unendlich großen Zahlen führt, welche in der Elementar-Mathematik nicht erschöpfend behandelt werden können. Es ist nämlich

$$\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty}.$$

Nur der Fall $\sqrt[0]{1}$ kann hier leicht noch erledigt werden; denn man wird aus §. 205 ohne Mühe schließen, daß der Werth von $\sqrt[0]{1}$ jeder beliebigen Zahl gleich ist.

Beispiele zur Uebung.

§. 209.

Potenzen mit absoluten ganzen Exponenten. Anwendung der Sätze §. 174 — 188.

Multipliciren.

1) $a^3 . a^7 = a^{10}$ 2) $b^{x-y} . b^y = b^x$ 3) $2^6 . 5^6 = 10^6$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 . b^7 = a^7$ 5) $4a^2b^3 . 9\,a^5b = 36\,a^7b^4$

6) $a^x . \left(\frac{1}{a}\right)^x = 1$ 7) $5\,a^3b^4 . 2\,ab^6 . a^2b = 10\,a^6b^{11}$

8) $(a+b)^{m-2n} . (a+b)^{m+n} . (a+b) = (a+b)^{2m-n+1}$

9) $\left(\frac{a^2b}{c^2}\right)^m . \left(\frac{b^2c}{a^2}\right)^m . \left(\frac{c^2a}{b^2}\right)^m = (abc)^m$

10) $(2\,a^3b^5 - 5\,a^2c^6 + 9\,a^3b^2c^3)\,.\,3\,a^2bc^2 = 6\,a^5b^6c^2$
$- 15\,a^4bc^8 + 27\,a^5b^3c^5$

11) $(a^m + b^p - 2\,c^n)\,.\,(2\,a^m - 3\,b^p) = 2\,a^{2m} - a^mb^p$
$- 4\,a^mc^n - 3\,b^{2p} + 6\,b^pc^n$

Zu berechnen:

12) $x^2\,.\,x^7 =$ 13) $a^{m-n}\,.\,a^{2n-m} =$ 14) $(1\frac{2}{3})^6\,.\,(1\frac{1}{5})^6 =$

15) $\left(\frac{7\,a^2}{3}\right)^2 . \left(\frac{3\,b}{a}\right)^2 =$ 16) $7\frac{1}{2}\,a^5bc^4\,.\,3\frac{5}{6}\,ab^5c^2 =$

17) $(a^mb^{n-1} - 9\,ab^m + 12\,b^{2m-n})\,.\,3\,a^nb^m =$

18) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{2\,c^3d^4}{b^4} - \frac{7\,c^2}{2\,a^4b^2}\right) . \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2\,c^3d^4}{b^4} - \frac{7\,c^2}{2\,a^4b^2}\right) =$

Dividiren.

19) $a^{11} : a^7 = a^4$ 20) $7^{12} : 7^9 = 7^3$ 21) $27^2 : 3^2 = 9^2$

22) $\frac{3\,a^3d}{c^3} : \frac{2\,a^2d^3}{5\,c^4} = \frac{15\,ac}{2\,d^2}$ 23) $(11\frac{1}{5})^3 : (1\frac{3}{5})^3 = 7^3$

24) $(x^{24m-16n} - x^{6m-4n}) : (x^{6m-4n} - 1) = x^{18m-12n}$
$+ x^{12m-8n} + x^{6m-4n}$

Zu berechnen:

25) $a^{x-y} : a^y =$ 26) $(7\,x)^5 : (2\,x)^5 =$

27) $(5a^mx^2 - 12\,a^{m-1}b^2x^3 + a^{m-2}) : 3\,a^3x^3 =$

28) $(a^mb^n - 4\,a^{m-1}b^{2n} - 27\,a^{m-2}b^{3n} + 42\,a^{m-3}b^{4n}) :$
$(a^nb^n - 7\,a^{n-1}b^{2n}) =$

Potenziren.

29) $(-7)^3 = -343$ 30) $(-2\,a^2b)^4 = 16\,a^8b^4$

31) $(7\frac{3}{4})^2 = 60\frac{1}{16}$ 32) $(-2\frac{2}{5}\,x^3y^3)^3 = -13\frac{103}{125}\,x^9y^9$

33) $\left(\frac{2\,a^4b^2}{3\,c^3}\right)^4 = \frac{16\,a^{16}b^8}{81\,c^{12}}$ 34) $\left[(a^3bc^2)^5\right]^6 = a^{90}b^{30}c^{60}$

35) $(3\,a + 5\,b^3)^2 = 9\,a^2 + 30\,ab^3 + 25\,b^6$

36) $(\frac{1}{2}\,ab - \frac{2}{3}\,bc)^2 = \frac{1}{4}\,a^2b^2 - \frac{2}{3}\,ab^2c + \frac{4}{9}\,b^2c^2$

37) $(12 - 5\,x)^3 = 1728 - 2160\,x + 900\,x^2 - 125\,x^3$

Zu berechnen:

38) $\left(-\frac{7\,a^3}{b^2}\right)^4 =$ 39) $\left(\frac{5\,(a+b)}{4\,c^6}\right)^4 =$

40) $(\frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}bc)^3 =$

41) $(5a - b + 2c)^2 =$

42) $\left(\frac{3a^2b}{c^3} + \frac{3ac^2}{b^3}\right)^2 =$

43) $\left(\frac{x}{y} - \frac{3x^2}{y^2} + z\right)^3 =$

44) $(7 - 2x)^4 =$

45) $\left[(a^2 - 5b^2)^2\right]^3 =$

§. 210.

Wurzeln mit absoluten ganzen Exponenten. Anwendung der Sätze §. 193—202.

Multipliciren.

1) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{b^2c} = \sqrt[n]{abc}$

2) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{216} = 6$

3) $5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50}$

4) $\frac{7}{2} \cdot \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2058}$

5) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}$

6) $(9 - 7\sqrt{13}) \cdot (5 - 6\sqrt{13}) = 591 - 89\sqrt{13}$

7) $(2\sqrt{6} - 3\sqrt{5}) \cdot (4\sqrt{3} - \sqrt{10}) = 39\sqrt{2} - 16\sqrt{15}$

8) $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

9) $(\sqrt{a} + c\sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt{a} - c\sqrt[3]{b}) = a - c^2\sqrt[3]{b^2}$

10) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 1$

Zu berechnen:

11) $\sqrt[3]{4} \cdot 7\sqrt[3]{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} =$

12) $\sqrt[4]{a^3bc} \cdot \sqrt[4]{a^7b^3c^{10}} \cdot \sqrt[4]{a^2b^2c} =$

13) $(m - n) \cdot \sqrt{\frac{m+n}{m-n}} =$

14) $(3\sqrt{45} - 7\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{1\frac{4}{5}} + 2\sqrt{9\frac{4}{5}}) =$

15) $(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{8} - 10\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) =$

16) $(5\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{2}) \cdot (-3\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}) =$

17) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{7}} =$

18) $\sqrt[n]{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt[n]{a - \sqrt{b}} =$

Dividiren.

19) $5\sqrt{12} : 2\sqrt{3} = 5$ 20) $8 : \sqrt{8} = \sqrt{8}$

21) $ab^2c^3 : \sqrt[3]{a^3bc^5} = \sqrt[3]{b^5c^4}$ 22) $\sqrt[5]{64} : 2 = \sqrt[5]{2}$

23) $\sqrt{ab^2 - b^2c} : \sqrt{a - c} = b$

24) $(\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4) : \sqrt{8} = 5 - \sqrt{2}$

Zu berechnen:

25) $a : \sqrt{a} =$ 26) $\sqrt{a^2 - z^2} : (a - z) =$

27) $\sqrt[6]{a^9b^8c^5} : \sqrt[6]{a^3b^2c^4} =$ 28) $1 : \sqrt{1\frac{13}{36}} =$

29) $(6 + 2\sqrt{3}) : \sqrt{6} =$ 30) $(2\sqrt{32} + 3\sqrt{2} + 4) : 4\sqrt{8} =$

Potenziren.

31) $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{32}$ 32) $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

33) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$

34) $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c})^2 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 2\sqrt[4]{ab} + 2\sqrt[4]{ac} + 2\sqrt[4]{bc}$

Zu berechnen:

35) $(\sqrt[7]{a^3b^5})^3 \,.\, (\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4 =$ 36) $(\sqrt[5]{3})^2 =$

37) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5 =$ 38) $(\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2})^3 =$

39) $(\sqrt{12} - 3\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 =$

Wurzelausziehen.

40) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ 41) $\sqrt{5\frac{1}{16}} = 2\frac{1}{4}$ 42) $\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$

43) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 44) $\sqrt[3]{\frac{13}{4}} = \sqrt[3]{\frac{26}{8}} = \frac{\sqrt[3]{26}}{8}$

45) $\sqrt{+a^2b^4} = \pm ab^2$ 46) $\sqrt[3]{-a^6b^9} = -a^2b^3$

47) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \,.\, 2} = 2\sqrt{2}$ 48) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \,.\, 5} = 2\sqrt[3]{5}$

49) $\sqrt{+a^5b^6} = \pm a^2b^3\sqrt{a}$ 50) $\sqrt[3]{+a^8b^9c} = +a^2b^3\sqrt[3]{a^2c}$

51) $\sqrt[3]{-16a^{12}} = -2a^4\sqrt[3]{2}$ 52) $\sqrt[4]{+16a^5b^9} = \pm 2ab^2\sqrt[4]{ab}$

53) $\sqrt[5]{\sqrt{129}} = \sqrt[10]{129}$ 54) $\sqrt[3]{6\sqrt{2}} = \sqrt[6]{72}$

55) $\sqrt[5]{a^2\sqrt[3]{ab}} = \sqrt[15]{a^7b}$ 56) $\sqrt{\dfrac{a^2b}{\sqrt[3]{a^5b^2}}} = \sqrt[6]{ab}$

57) $\sqrt[12]{8} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[4]{2}$ 58) $\sqrt[6]{a^4b^2} = \sqrt[3]{a^2b}$

Zu berechnen:

59) $\sqrt{10\frac{6}{25}} =$ 60) $\sqrt[3]{\frac{64}{729}} =$ 61) $\sqrt[4]{\dfrac{16a^4}{b^{12}}} =$

62) $\sqrt{+9a^6b^2} =$ 63) $\sqrt[3]{+\dfrac{64a^3}{125b^6c^9}} =$ 64) $\sqrt[4]{+5\frac{1}{16}a^{12}b^4} =$

65) $\sqrt{128} =$ 66) $\sqrt{50} =$ 67) $\sqrt[3]{1080} =$

68) $\sqrt{+36a^7b^3} =$ 69) $\sqrt[3]{-16a^9b^{10}} =$ 70) $\sqrt[3]{+7x^3y} =$

71) $\sqrt[3]{\sqrt{729}} =$ 72) $\sqrt[3]{12\sqrt[3]{9}} =$ 73) $\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}} =$

74) $\sqrt{\dfrac{a^3\sqrt[3]{a^2b}}{b\sqrt[3]{ab^2}}} =$ 75) $\sqrt[8]{a^6b^4} =$ 76) $\sqrt[10]{32} =$

§. 211.

Potenzen mit algebraischen ganzen Exponenten. Anwendung der Sätze §§. 203—205.

Multipliciren und Dividiren.

1) $5a^{-4}b^2 \,.\, 3a^{-1}b^3 = 15a^{-5}b^5 = \dfrac{15b^5}{a^5}$

2) $\dfrac{1}{3a^{-3}b^{-7}c} \cdot \dfrac{1}{4a^{-m}b^7} = \dfrac{1}{12a^{-m-3}c} = \dfrac{a^{m+3}}{12c}$

3) $\frac{7}{3}\,a^5 : \frac{2}{5}\,a^8 = \frac{35}{6}\,a^{-3} = \dfrac{35}{6a^3}$

4) $\frac{5}{3}\,a^{-7}b^3c : \frac{1}{2}\,a^{-9}b^{-5}c^3d^2 = \frac{10a^2b^8}{3c^2d^2}$

5) $(a^3b^{-4} - b^{-5}cd^3e + 3c^mf^{-3})\,.\,2bc^{-2}d = \frac{2a^3d}{b^3c^2} - \frac{2d^4e}{b^4c} + \frac{6bc^{m-2}d}{f^3}$

6) $(a^{-3} - 8b^{-3}) : (a^{-1} - 2b^{-1}) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}$

Zu berechnen:

7) $9a^{-7}b^2\,.\,8a^{-9}b^{-9} =$ 8) $7x^{-2}\,.\,x^2y =$

9) $11x^{-1}y : 2x^3y^{-2}z^2 =$ 10) $1 : 3a^{-2} =$

11) $(a^3b^{-9} - 5a^2b^{-7} - 2ab^{-5})\,.\,(7a^{-4}b^{-1} - 3a^{-5}b) =$

12) $(a^4x^{-2} - 16a^{-2}x^6) : (a^2x^{-1} - 4a^{-1}x^3) =$

Potenziren und Wurzelausziehen.

13) $7^{-2} = \frac{1}{49}$ 14) $(\frac{1}{3})^{-3} = 27$ 15) $(5\frac{1}{2})^{-2} = \frac{4}{121}$

16) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ 17) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{b^3}{a^3}$ 18) $\left(\frac{5x^2}{2y}\right)^{-2} = \frac{4y^2}{25x^4}$

19) $(-a^2)^{-3} = -\frac{1}{a^6}$ 20) $(-b^{-3})^4 = \frac{1}{b^{12}}$

21) $(a^{-1})^{-1} = a$ 22) $\sqrt{a^{-4}b^{-6}} = \frac{1}{a^2b^3}$

23) $\sqrt[3]{27a^{-8}} = \frac{3\sqrt[3]{a}}{a^3}$ 24) $\sqrt[5]{a^{-2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$

25) $\sqrt{a^{-2}\sqrt{a^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a}}$ 26) $\sqrt[6]{a^{-4}b^4} = \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$

27) $\sqrt[8]{(a^{-2})^{-5}} = \sqrt[4]{a^5}$

Zu berechnen:

28) $(6\frac{2}{3})^{-1} =$ 29) $\left(\frac{a^2b}{c}\right)^{-4} =$ 30) $\left(\frac{1}{6^{-2}}\right)^{-2} =$

31) $(-5^2)^{-2} =$ 32) $(-a)^{-1} =$ 33) $\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-4}\right]^{-4} =$

34) $\sqrt{+a^{-6}b^2} =$ 35) $\sqrt[3]{-a^6b^{-7}c^{-2}} =$

36) $\sqrt[3]{+a^{-1}\sqrt{b^{-1}}} =$ 37) $\sqrt{a^5b^{-4}c^{-3}\sqrt{d}} =$

38) $\sqrt[6]{a^{-2}x^2b^{-8}} =$

§. 212.

Potenzen mit Bruch-Exponenten. Anwendung der Sätze §§. 206—208.

Multipliciren und Dividiren.

1) $a^{\frac{3}{4}} \,.\, a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$ 2) $a^{-\frac{2}{3}} \,.\, a^{\frac{1}{4}} = a^{-\frac{5}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^5}}$

3) $\frac{3a^2b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{2}{3}}} \,.\, \frac{5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{5}}}{c^{\frac{1}{2}}} = \frac{15a^{\frac{7}{3}}b^{\frac{9}{10}}}{c^{\frac{7}{6}}} = \frac{15a^2}{c}\sqrt[30]{\frac{a^{10}b^{27}}{c^5}}$

4) $\sqrt{a} \,.\, 7\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \,.\, 7a^{\frac{1}{3}} = 7a^{\frac{5}{6}} = 7\sqrt[6]{a^5}$

5) $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{7}{5}}b^{\frac{3}{4}} = a^2b^{-\frac{1}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt[4]{b}}$

6) $\sqrt{a^{-9}}\,\sqrt[3]{b^4} : 8\sqrt[5]{a^2}\,\sqrt{b} = a^{-\frac{9}{2}}\,b^{\frac{4}{3}} : 8a^{\frac{2}{5}}\,b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}a^{-\frac{49}{10}}\,b^{\frac{5}{6}} =$
$\frac{\sqrt[6]{b^5}}{8\sqrt[10]{a^{49}}}$.

Zu berechnen:

7) $a^{-\frac{3}{4}}b^2 \,.\, a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{3}{2}}c =$ 8) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2}}\,\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} =$

9) $(\sqrt[5]{ab^3} + 3\sqrt[5]{a^{-4}b^8}) \,.\, (\sqrt{ab} + 2b^{-2}\sqrt{a^{-1}b}) =$

10) $\frac{ab^{\frac{2}{3}}}{c} : \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{9}{4}}} =$ 11) $a^2\sqrt{a^3b} : \sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{b^7} =$

12) $(\sqrt[12]{a^{10}b^9} - \sqrt[10]{a^7} \,.\, \sqrt[6]{b^5} + a\sqrt[4]{b^3}) : \sqrt[6]{a^4b^3} =$

Potenziren und Wurzelausziehen.

13) $(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{9}} = \sqrt[36]{a^9b^8}$

14) $\left[(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}\right]^{-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{20}} = \frac{1}{\sqrt[20]{a}}$

15) $\sqrt[4]{\left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}\right)^{3}} = \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a^4 b}$

16) $\sqrt[-2]{a^5\sqrt{b}} = (a^5 b^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{5}{2}} b^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{a^2\sqrt[4]{a^2 b}}$

17) $\sqrt[\frac{2}{3}]{25} = 25^{\frac{3}{2}} = 125$ 18) $\sqrt[-4]{81} = 81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

Zu berechnen:

19) $\sqrt[6]{(a^3 b\sqrt[5]{a^3 bc})^5} =$ 20) $\left(\frac{a^2 c}{b^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

21) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b^2}}{c^6 d^5}} =$ 22) $\sqrt[\frac{2}{3}]{f^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{2}}} =$

23) $\sqrt[-1]{10\,a^{-3}} =$ 24) $\sqrt[3\frac{1}{2}]{-128\,a^{14}\,b^{-21}} =$

Achter Abschnitt.

Rechnung mit dekadischen Zahlen.

---

§. 213.

Erklärung. Unter einem Zahlensystem versteht man eine übersichtliche Anordnung aller Zahlen, zu dem doppelten Zweck:

1) von größeren Zahlen sich eine deutliche Vorstellung machen zu können, und

2) solche Zahlen mit einer geringen Anzahl von Zeichen schreiben zu können.

Den gleichen Zweck verfolgt man schon im täglichen Leben durch die verschiedenen Unterabtheilungen, nach denen man Münzen, Gewichte, Längenmaße, Hohlmaße 2c. einzutheilen pflegt. Nur herrscht in der Bildung dieser Unterabtheilungen viel Willkür und Regellosigkeit; erst in der neuesten Zeit hat man den Anfang gemacht, durch Einführung der Decimal-Eintheilung diese Unterabtheilungen mit dem gebräuchlichen Zahlensystem in Einklang zu bringen.

§. 214.

Erklärung. Zur Herstellung eines Zahlensystems nimmt man eine absolute ganze Zahl als gegeben an, welche die Grundzahl des Zahlensystems genannt wird, und bildet alle Potenzen dieser Grundzahl mit ganzen Exponenten.

Jede Zahl kann sodann wie eine Summe von Theilen dargestellt werden, von denen jeder eine Potenz der Grundzahl enthält, versehen mit einem Coefficienten, welcher kleiner als die Grundzahl ist.

Z. B. es sei 6 die gegebene Grundzahl. Die Potenzen dieser Grundzahl sind $6^0 = 1$, $6^1 = 6$, $6^2 = 36$ 2c. und in diesem Systeme nimmt z. B. die Zahl hundert folgende Gestalt an:

$$2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0.$$

Denn die Summe dieser drei Theile, wenn man für die Potenzen der Grundzahl ihre vorigen Werthe setzt, giebt wieder die Zahl hundert. Die Coefficienten 2, 4, 4 sind sämmtlich kleiner als die Grundzahl 6.

Es sei 10 die gegebene Grundzahl, deren Potenzen sind $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, 2c. In diesem Systeme erhält z. B. die Jahrszahl der Erbauung Roms folgende Gestalt:

$$7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Denn die Addition dieser Theile bringt wieder jene Jahrszahl hervor. Auch hier sind die Coefficienten 7, 5, 3 sämmtlich kleiner als die gegebene Grundzahl 10.

§. 215.

Erklärung. Die Potenzen der Grundzahl eines Zahlensystems werden die Einheiten dieses Zahlensystems genannt. Diese Einheiten sind von derjenigen Ordnung, welche ihr Exponent anzeigt.

Mit diesen Benennungen kann man die vorige Zahl

$$2 \,.\, 6^2 + 4 \,.\, 6^1 + 4 \,.\, 6^0$$

aussprechen: 2 Einheiten der 2ten Ordnung, und 4 Einheiten der 1sten Ordnung, und 4 Einheiten der 0ten Ordnung im System der Grundzahl 6.

Ebenso die vorige Zahl

$$7 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0$$

kann man aussprechen: 7 Einheiten der 2ten Ordnung, und 5 Einheiten der 1sten Ordnung, und 3 Einheiten der 0ten Ordnung im System der Grundzahl 10.

§. 216.

Erklärung. Das bei uns gebräuchliche Zahlensystem hat zur Grundzahl die Zahl zehn, und wird daher das dekadische Zahlensystem oder das Decimalsystem genannt.

Seine Einheiten heißen dekadische Einheiten, und führen überdies zum Theil besondere Namen: 10^2 Hundert, 10^3 Tausend, 10^6 Million, 10^{12} Billion, 10^{18} Trillion, 2c. aus denen die Namen der übrigen zusammengesetzt werden.

Die Zahl zehn als Grundzahl des Zahlensystems ist so alt, wie die überlieferte Weltgeschichte reicht, und bis auf den heutigen Tag bei fast allen civilisirten Völkern im Gebrauch gewesen. Vermuthlich hat dieser Gebrauch in den zehn Fingern der Hände seine Entstehung gefunden, an denen man zählte, bevor eine schriftliche Aufzeichnung stattfand.

Man erzählt außerdem von dem Gebrauch der Grundzahl 2 bei den alten Chinesen, der Grundzahl 4 bei einem Volke in Thracien (nach Aristoteles), der Grundzahl 5 bei einem Negervolke am Senegal, und selbst der Grundzahl 20 bei einem eingeborenen Volke in Südamerika, welche Grundzahlen merkwürdiger Weise sich sämmt-

lich auf eine ähnliche Entstehung wie die Grundzahl 10 würden zurückführen lassen.

§. 217.

Erklärung. Zum Schreiben der dekadischen Zahlen dienen die bekannten neun Ziffern

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Diese Ziffern werden unmittelbar an einander gerückt, so daß man aus ihrer Stelle die Ordnung erkennt, welcher sie angehören. Zur Ausfüllung leerer Ordnungen wird das Zeichen 0 gebraucht.

So z. B. schreibt man

$$753 \text{ für } 7 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^0$$
$$5400 \text{ für } 5 \,.\, 10^3 + 4 \,.\, 10^2$$

u. s. w., was als hinreichend bekannt darf angesehen werden.

Zuweilen ist es zweckmäßig, eine Ordnungszahl wirklich beizuschreiben, z. B.

$$\overset{2}{7}53 \text{ oder } 75\overset{0}{3} \text{ statt } 753,$$
$$\overset{3}{5}4 \text{ oder } 5\overset{2}{4} \text{ statt } 5400$$

wo man nicht selten, wie in dem zweiten hier aufgeführten Falle, sich das Hinschreiben mehrerer Nullen ersparen kann.

Die kurze und höchst sinnreich ausgedachte Methode, vermöge deren man mit neun Ziffern und dem bedeutungslosen Zeichen 0 jede noch so große ganze Zahl schreiben kann, findet sich schon bei den alten Indern im Gebrauch; von da haben die Araber sie kennen gelernt und von den Arabern endlich ist sie zu uns gekommen. Den Griechen und Römern dagegen war sie völlig unbekannt. Man nennt den Bischof Gerbert, später Papst Sylvester II., als denjenigen, welcher um das Jahr 980 von den Arabern in Spanien zuerst die Ziffern zu uns herüber geholt hat. Daher werden auch diese Ziffern bei uns noch heute arabische Ziffern genannt. Ihre Gestalten sind übrigens sowohl in der Sanscrit-Schrift der Inder als auch bei den Arabern merklich verschieden von den unsrigen; selbst in den Handschriften des 13ten Jahr-

hunderts, bei Roger Baco, Sacro Bosco u. A., findet man noch sehr abweichende Formen, und erst mit der Erfindung der Buchdruckerkunst scheinen die heutigen Gestalten der Ziffern sich festgestellt zu haben.

Anmerkung. Die Zahlzeichen der Griechen und der Römer beruheten auf einem von dem vorigen wesentlich verschiedenen Princip. Der Vergleichung wegen mag die Bezeichnungsweise der Römer, welche noch heute vielfach im Gebrauch ist, hier eine kurze Erläuterung finden.

Die Römer schufen zunächst selbständige Zeichen für die dekadischen Einheiten, nämlich sie bezeichneten

Eins durch eine Linie, d. i. den Buchstaben I;

Zehn durch zwei sich kreuzende Linien, woraus der Buchstabe X wurde;

Hundert durch drei Linien in der Stellung ⊏, woraus durch Abrundung der Ecken der Buchstabe C entstand;

Tausend durch vier Linien in der Stellung ⊓⊓, welches Zeichen entweder durch Abrundung in CIↃ oder auch in den verwandten Buchstaben M überging.

Darüber hinaus behalf man sich nur wieder mit denselben Zeichen, denen Worte beigefügt wurden.

Sollte nun eine dekadische Einheit mehrere Mal wiederholt werden, so setzte man das Zeichen dieser Einheit eben so oft eins neben das andere. Weil aber auf diese Weise eine zu große Häufung von Zeichen, bis zu dem Neunfachen eines einzelnen, entstehen konnte, so bildete man ferner Zeichen für die Hälften der höheren Einheiten, und zwar für

Fünf die Hälfte des Zeichens X, horizontal durchgetheilt, was den Buchstaben V gab; für

Funfzig die Hälfte des Zeichens ⊏, horizontal durchgetheilt, woraus der Buchstabe L wurde; endlich für

Fünfhundert die Hälfte des Zeichens ⊓⊓ oder CIↃ, vertical durchgetheilt, woraus IↃ oder der Buchstabe D wurde.

Um nun aber auch selbst eine viermalige Wiederholung eines und desselben Zeichens unnöthig zu machen, führte man schließlich noch eine subtractive Bedeutung der Zeichen ein, indem man fest-

setzte: daß ein kleineres Zeichen, welches einem größeren vorgesetzt wird, stets eine Subtraction des kleineren von dem größeren anzeigen solle.

Z. B. 39 = XXXIX   429 = CDXXIX
40 = XL   1284 = MCCLXXXIV
41 = XLI   1909 = MCMIX

Die große Unbequemlichkeit dieser Bezeichnungsweise offenbart sich sogleich, wenn man nur den Versuch machen will, ein paar größere in dieser Weise geschriebene Zahlen mit einander zu multipliciren. Die Division größerer Zahlen wird beinahe unausführbar.

§. 218.

Erklärung. Brüche im dekadischen Zahlensystem, oder Decimalbrüche, werden wie dekadische ganze Zahlen geschrieben, und von den ganzen Zahlen durch ein Komma (,) getrennt.

Wenn keine ganze Zahl vorhanden ist, so tritt an deren Stelle 0.

So z. B. schreibt man

$$4{,}95$$

für $4 \,.\, 10^0 + 9 \,.\, 10^{-1} + 5 \,.\, 10^{-2}$ oder 4 Einheiten der 0ten Ordnung, und 9 Einheiten der — 1sten Ordnung, und 5 Einheiten der — 2ten Ordnung;

$$0{,}027$$

für $2 \,.\, 10^{-2} + 7 \,.\, 10^{-3}$ oder: 2 Einheiten der — 2ten Ordnung, und 7 Einheiten der — 3ten Ordnung;

u. s. w., wo jedesmal mit der Ordnungszahl — 1 der Decimalbruch beginnt. Man spricht diese Zahlen am kürzesten aus: 4 Ganze und 95 Hundertel, und: 27 Tausendtel.

Zuweilen ist es auch hier zweckmäßig, eine Ordnungszahl wirklich beizuschreiben, z. B.

$$\overset{0}{\smile}495 \text{ oder } \overset{-2}{\overbrace{495}} \text{ statt } 4{,}95$$

$$\overset{-2}{\overbrace{27}} \text{ oder } \overset{-3}{\overbrace{27}} \text{ statt } 0{,}027$$

wo allemal das Komma wegbleiben, mitunter auch das Hinschreiben von Nullen erspart werden kann.

§. 219.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl in ein beliebiges Zahlensystem zu übertragen, dessen Grundzahl gegeben ist.

Auflösung. Man bilde die Einheiten des neuen Zahlensystems durch Potenzirung der Grundzahl mit allen ganzen Exponenten. Darauf dividire man die gegebene Zahl durch die höchste dieser Einheiten, welche in ihr enthalten ist; den Rest dividire man durch die nächstkleinere Einheit; den folgenden Rest wieder durch die nächstkleinere Einheit, u. s. f. Die gefundenen Quotienten sind die Ziffern der gegebenen Zahl in dem neuen Zahlensysteme.

Das Schreiben der Zahlen in dem neuen Zahlensysteme geschieht nach denselben Gesetzen wie bei dekadischen Zahlen.

Um jede gegebene Zahl in dem neuen Zahlensysteme schreiben zu können, muß man so viel Ziffern haben wie die um Eins verkleinerte Grundzahl des neuen Zahlensystems anzeigt. Diese Ziffern werden an einander gerückt, so daß man aus ihrer Stelle die Ordnung erkennt, welcher sie angehören.

Beispiel 1. Um die Jahrszahl 753 in das System der Grundzahl 6 zu übertragen, hat man:

Einheiten des Systems:	Berechnung der Ziffern:
$6^0 = 1$	$753 : 216 = 3$
	648
$6^1 = 6$	$105 : 36 = 2$
	72
$6^2 = 36$	$33 : 6 = 5$
	30
$6^3 = 216$	$3 : 1 = 3$
	3
ꝛc.	0

Also nimmt die Jahrszahl der Erbauung Roms, im System der Grundzahl 6 geschrieben, folgende Gestalt an:

$$3 \,.\, 6^3 + 2 \,.\, 6^2 + 5 \,.\, 6^1 + 3 \,.\, 6^0$$

oder mit Weglassung der Grundzahl:

3253.

Beispiel 2. Im ähnlicher Weise überträgt man den Bruch $\frac{3}{8}$ in das System der Grundzahl 6 wie folgt:

Einheiten des Systems:	Berechnung der Ziffern:
$6^{-1} = \frac{1}{6}$	$\frac{3}{8} : \frac{1}{6} = 2$
	$\frac{1}{3}$
$6^{-2} = \frac{1}{36}$	$\frac{1}{24} : \frac{1}{36} = 1$
	$\frac{1}{36}$
$6^{-3} = \frac{1}{216}$	$\frac{1}{72} : \frac{1}{216} = 3$
	$\frac{1}{72}$
2c.	0

Also erhält der Bruch $\frac{3}{8}$, im Systeme der Grundzahl 6 geschrieben, die folgende Gestalt

$$2 \,.\, 6^{-1} + 1 \,.\, 6^{-2} + 3 \,.\, 6^{-3}$$

oder mit Weglassung der Grundzahl:

0,213.

Man sieht, wie der Gang der Rechnung bei Brüchen genau derselbe bleibt wie bei ganzen Zahlen, nur wird die Rechnung mit Brüchen etwas mühsamer. Auch kann bei Brüchen der Fall eintreten, daß die Rechnung ohne Ende fortläuft, während sie bei ganzen Zahlen jederzeit mit Einheiten der 0ten Ordnung schließen muß.

Als Probe für die richtige Rechnung kann man die gefundenen Einheiten addiren, wodurch die gegebene Zahl wieder zum Vorschein kommen muß. Nämlich

$$3 \,.\, 216 + 2 \,.\, 36 + 5 \,.\, 6 + 3$$

muß wieder 753, und

$$2 \,.\, \tfrac{1}{6} + 1 \,.\, \tfrac{1}{36} + 3 \,.\, \tfrac{1}{216}$$

muß wieder $\frac{3}{8}$ geben.

Addition dekadischer Zahlen.

§. 220.

Aufgabe. Zwei oder mehrere gegebene dekadische Zahlen zu addiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebenen Zahlen so unter einander, daß Einheiten von einerlei Ordnung unter einander zu stehen kommen, und beginne die Addition von der rechten Seite. Wenn die Summe in irgend einer Ordnung mehr als 9 beträgt, so übertrage man für jede 10 Einheiten dieser Ordnung eine Einheit in die nächsthöhere Ordnung.

Beispiel. Die Zahlen 94 + 3,691 + 521,6 geben

```
 94
   3,691
521,6
―――――――
619,291.
```

Subtraction dekadischer Zahlen.

§. 221.

Aufgabe. Zwei gegebene dekadische Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. Man schreibe die gegebenen Zahlen so unter einander, daß Einheiten von einerlei Ordnung unter einander zu stehen kommen, und beginne die Subtraction von der rechten Seite. Wenn in irgend einer Ordnung der Minuend weniger beträgt als der Subtrahend, so nehme man im Minuend eine Einheit der nächsthöheren Ordnung zu Hülfe.

Beispiel. Die Zahlen 26,94 — 9,124 geben

```
26,94
 9,124
――――――
17,816
```

Multiplication dekadischer Zahlen.

§. 222.

Lehrsatz. Die Ordnungszahl des Products zweier dekadischen Zahlen wird gefunden, indem man die Ordnungszahlen der Factoren addirt.

$$\overset{\overset{n}{\smile}}{a} \,.\, \overset{\overset{r}{\smile}}{b} = \overset{\overset{n+r}{\smile}}{ab}.$$

Beweis. Die Zahl $\overset{\overset{n}{\smile}}{a}$ bedeutet a Einheiten der $n$ten Ordnung, und die Zahl $\overset{\overset{r}{\smile}}{b}$ bedeutet b Einheiten der $r$ten Ordnung. Oder es ist

$$\overset{\overset{n}{\smile}}{a} = a \,.\, 10^n$$

$$\overset{\overset{r}{\smile}}{b} = b \,.\, 10^r.$$

Die Multiplication dieser beiden Gleichungen giebt, indem man rechts die Sätze §§. 25 und 178 anwendet

$$\overset{\overset{n}{\smile}}{a} \,.\, \overset{\overset{r}{\smile}}{b} = ab \,.\, 10^{n+r}.$$

Da aber $ab \,.\, 10^{n+r}$ so viel bedeutet wie ab Einheiten der $(n+r)$ten Ordnung, so kann man statt dieser letzten Gleichung auch schreiben

$$\overset{\overset{n}{\smile}}{a} \,.\, \overset{\overset{r}{\smile}}{b} = \overset{\overset{n+r}{\smile}}{ab}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Es ist $8000 \,.\, 0{,}07 = \overset{\overset{3}{\smile}}{8} \,.\, \overset{\overset{-2}{\smile}}{7} = \overset{\overset{1}{\smile}}{56} = 560.$

§. 223.

Zusatz. Eine dekadische Zahl wird mit 10 oder mit einer Potenz von 10 multiplicirt, indem man in ihr das Komma um so viel Stellen zur Rechten rückt wie der Exponent dieser Potenz anzeigt.

$$\text{Z. B. } 73{,}452 \,.\, 10^2 = 7345{,}2$$

$$73{,}452 \,.\, 10^5 = 7345200.$$

§. 224.

Aufgabe. Zwei gegebene dekadische Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. 1) Wenn der Multiplicator einzifferig ist, so multiplicire man mit ihm, der Reihe nach, jede einzelne Ziffer des Multiplicand. Man beginne dabei von der rechten Seite, und

wenn im Product in irgend einer Ordnung mehr als 9 Einheiten entstehen, so übertrage man für jede 10 Einheiten dieser Ordnung eine Einheit in die nächsthöhere Ordnung.

Die Ordnungszahl des Products bestimme man sogleich bei der Multiplication der niedrigsten Ziffer nach §. 222.

Z. B. es sei zu multipliciren 59,264. 700, so schreibe man

$$\begin{array}{r} \scriptstyle -3 \\ 59264 \\ \scriptstyle 2 \\ 7 \\ \hline \scriptstyle -1 \\ 414848 \end{array}$$

also ist das Product = 41484,8.

2) Wenn der Multiplicator mehrzifferig ist, so bilde man auf die vorige Weise aus jeder Ziffer des Multiplicators ein Partial-Product (§. 22), und wenn man nach §. 220 alle Partial-Producte unter einander schreibt und addirt, so ist die erhaltene Summe das gesuchte Total-Product.

Die Ordnungszahl des Products bestimme man auch hier sogleich bei der Multiplication der niedrigsten Ziffern nach §. 222.

Z. B. es sei zu multipliciren 384,3 . 0,736, so schreibt man

$$\begin{array}{r} \scriptstyle -1 \\ 3843 \\ \scriptstyle -3 \\ 736 \\ \hline \scriptstyle -4 \\ 23058 \\ 11529 \\ 26901 \\ \hline \scriptstyle -4 \\ 2828448 \end{array}$$

also ist das Product = 282,8448.

§. 225.

Zusatz. Das Product zweier dekadischen Zahlen enthält so viel Bruchstellen, wie beide Factoren zusammen genommen.

Man kann also zwei Zahlen, welche Decimalbrüche enthalten, mit Wegwerfung des Komma wie ganze Zahlen multipliciren,

muß hinterher aber im Product so viel Bruchstellen wieder abschneiden wie beide Factoren zusammen genommen enthalten.

M. s. das zweite Beispiel des vorigen §.

Dieser Gang der Rechnung kann unter Umständen bequemer sein als das directe Verfahren des vorigen §.

Division dekadischer Zahlen.

§. 226.

Lehrsatz. Die Ordnungszahl des Quotienten zweier dekadischen Zahlen wird gefunden, indem man von der Ordnungszahl des Dividend die Ordnungszahl des Divisors subtrahirt.

$$\overset{n}{\overbrace{a}} : \overset{r}{\overbrace{b}} = \frac{\overset{n-r}{\overbrace{a}}}{b}.$$

Beweis. Die Zahl $\overset{n}{\overbrace{a}}$ bedeutet a Einheiten der $n$ten Ordnung, und die Zahl $\overset{r}{\overbrace{b}}$ bedeutet b Einheiten der $r$ten Ordnung. Oder es ist

$$\overset{n}{\overbrace{a}} = a \,.\, 10^n$$
$$\overset{r}{\overbrace{b}} = b \,.\, 10^r$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen mit Anwendung von §. 180, so erhält man

$$\overset{n}{\overbrace{a}} : \overset{r}{\overbrace{b}} = \frac{a}{b} \,.\, 10^{n-r}.$$

Da nun $\frac{a}{b} \,.\, 10^{n-r}$ so viel bedeutet wie $\frac{a}{b}$ Einheiten der $(n-r)$ten Ordnung, so kann man diese letzte Gleichung auch schreiben

$$\overset{n}{\overbrace{a}} : \overset{r}{\overbrace{b}} = \frac{\overset{n-r}{\overbrace{a}}}{b}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Es ist $80 : 0{,}04 = \overset{1}{\overbrace{8}} : \overset{-2}{\overbrace{4}} = \overset{3}{\overbrace{2}} = 2000.$

§. 227.

Zusatz. Eine dekadische Zahl wird durch 10 oder durch eine Potenz von 10 dividirt, indem man in ihr das Komma um so viel Stellen zur Linken rückt wie der Exponent dieser Potenz anzeigt.

Z. B. $596{,}2 : 10^2 = 5{,}962$

$596{,}2 : 10^4 = 0{,}05962.$

§. 228.

Aufgabe. Zwei gegebene dekadische Zahlen durch einander zu dividiren.

Auflösung. 1) Wenn der Divisor einzifferig ist, so dividire man durch ihn, der Reihe nach, jede einzelne Ziffer des Dividend. Man beginne dabei von der linken Seite, und wenn in irgend einer Ordnung des Dividend ein Rest bleibt, welcher kleiner als der Divisor ist, so übertrage man für jede Einheit dieses Restes 10 Einheiten in die nächstniedrigere Ordnung.

Die Ordnungszahl des Quotienten bestimme man sogleich bei der Division der höchsten Ziffer nach §. 226.

Z. B. es sei zu dividiren 81,756 : 600, so schreibe man

$\overbrace{81756}^{1} : \overbrace{6}^{2} = \overbrace{13626}^{-1}$ oder kürzer $\overbrace{81756}^{1} : \overbrace{6}^{2} = \overbrace{13626}^{-1}$

```
6                    21
--                   --
21                    37
18                    --
--                     15
 37                    --
 36                     36
 --                     --
  15                     0
  12
  --
   36
   36
   --
    0
```

also ist der Quotient $= 0{,}13626$.

2) Wenn der Divisor mehrzifferig ist, so dividire man die erste Ziffer des Dividend (oder nöthigenfalls die beiden ersten Ziffern

des Dividend) durch die erste Ziffer des Divisors, und bestimme so die erste Ziffer des Quotienten. Diese multiplicire man mit dem ganzen Divisor, subtrahire das dadurch erhaltene erste Partial-Product von dem Dividend, und mit dem gebliebenen Rest beginne man wieder wie von vorn zur Bestimmung der zweiten Ziffer des Quotienten. U. s. f.

Die Ordnungszahl des Quotienten bestimme man auch hier sogleich bei der Division der höchsten Ziffern nach §. 226.

Z. B. es sei zu dividiren 58,656 : 0,0376, so schreibe man

$$\overset{1}{\overbrace{5}}8656 : \overset{-2}{\overbrace{3}}76 = \overset{3}{\overbrace{1}}56$$

```
 58656 : 376 = 156
 376
 ----
 2105
 1880
 ----
  2256
  2256
  ----
     0
```

also ist der Quotient = 1560.

Oder es sei zu dividiren 1,8326 : 4760, so schreibe man

$$\overset{-1}{\overbrace{1}}8326 : \overset{3}{\overbrace{4}}76 = \overset{-4}{\overbrace{3}}85$$

```
 18326 : 476 = 385
 1428
 ----
 4046
 3808
 ----
  2380
  2380
  ----
     0
```

also ist der Quotient = 0,000385.

§. 229.

Zusatz. Die Division zweier dekadischen Zahlen kann man immer in eine Division ganzer Zahlen verwandeln, wenn man Dividend und Divisor gleichzeitig mit einer so hohen Potenz von 10 multiplicirt, daß in beiden die Kommata ans Ende rücken.

So kann man die drei Divisionen des vorigen §. verwandeln in

1) 81756 : 600000
2) 586560 : 376
3) 18326 : 47600000

wo im Quotienten erst dann Bruchstellen entstehen, wenn man dem letzten Reste der Division Nullen anhängt.

Diese Umwandlung der Division kann unter Umständen eine bequemere Rechnung liefern als die directe Division des vorigen §.

Verwandlung der Brüche in Decimalbrüche.

§. 230.

Aufgabe. Einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung. Man dividire den Zähler durch den Nenner nach den Regeln der dekadischen Division (§. 228); der Quotient dieser Division ist der gesuchte Decimalbruch.

Beispiele. $\frac{5}{8} = 0,625$, $\frac{3}{11} = 0,2727 \ldots$, 2c.

Anmerkung. Umgekehrt kann man also auch jede Division dekadischer Zahlen, vermöge des §. 229, wie die Verwandlung eines Bruches in einen Decimalbruch ansehen, und deshalb können die hier folgenden Sätze auch allgemein auf jede Division dekadischer Zahlen angewendet werden.

§. 231.

Lehrsatz. Wenn ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, in einen Decimalbruch verwandelt wird, so geht die Rechnung auf, wenn der Nenner nur aus den einfachen Factoren 2 und 5 besteht.

Dagegen geht die Rechnung nicht auf, wenn der Nenner auch andere, oder nur andere einfache Factoren als 2 und 5 enthält.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ der gegebene Bruch. Dividirt man, der vorigen Aufgabe gemäß, a durch b, so muß man dem Zähler a eine oder mehrere Nullen anhängen. Jedes Anhängen einer Null kann aber wie eine Multiplication mit 10 angesehen werden, oder da 10 aus den einfachen Factoren 2 und 5 besteht, so kommen durch jedes Anhängen einer Null zu dem Dividend a die einfachen Factoren

2 und 5. Wenn nun 1) der Divisor b gleichfalls nur aus den einfachen Factoren 2 und 5 besteht, so muß es möglich sein, durch Anhängen einer hinreichenden Anzahl von Nullen an den Dividend a diesem Dividend so viel mal die einfachen Factoren 2 und 5 hinzuzufügen, daß der also umgewandelte Dividend alle einfachen Factoren des Divisors b in sich enthält. Also muß nach dem Lehrsatz §. 66 in diesem Falle die Rechnung aufgehen, w. z. b w.

Wenn dagegen 2) der Divisor b auch andere, oder nur andere einfache Factoren als 2 und 5 enthält, so kann durch das Anhängen von Nullen an den Dividend, welches stets nur die einfachen Factoren 2 und 5 dem Dividend hinzufügt, niemals bewirkt werden, daß der Dividend alle einfachen Factoren des Divisors b in sich enthalte. Also kann nach dem Lehrsatz §. 66 in diesem Falle die Rechnung nicht aufgehen, w. z. b. w.

Beispiel. 1) Der Bruch $\frac{11}{40}$ giebt, wenn man den Nenner 40 in seine einfachen Factoren zerlegt,

$$\frac{11}{2.2.2.5}.$$

Wenn man aber dem Zähler dreimal die einfachen Factoren 2 und 5 hinzufügt, so erhält man

$$\frac{11.2.5.2.5.2.5}{2.2.2.5}$$

und hier lehrt der Augenschein, daß der Zähler jetzt alle einfachen Factoren des Nenners in sich enthält, d. h. durch den Nenner theilbar ist. Also muß die Verwandlung des Bruchs $\frac{11}{40}$ in einen Decimalbruch nach Anhängung von drei Nullen aufgehen.

Die wirkliche Rechnung giebt $\frac{11}{40} = 0{,}275$.

2) Der Bruch $\frac{11}{60}$ giebt ebenso, wenn man den Nenner 60 in seine einfachen Factoren zerlegt,

$$\frac{11}{2.2.3.5}.$$

Wenn man hierin dem Zähler, so oft man will, die einfachen Factoren 2 und 5 hinzufügt, z. B.

$$\frac{11.\ 2.\ 5.\ 2.\ 5.\ 2.\ 5\ \ldots}{2.\ 2.\ 3.\ 5.}$$

so überzeugt man sich leicht, daß wegen des störenden Factors 3, den der Nenner enthält, niemals alle einfachen Factoren des Nenners im Zähler enthalten sein können, d. h. niemals der Zähler

durch den Nenner theilbar sein wird. Also wird die Verwandlung des Bruchs $\frac{11}{60}$ in einen Decimalbruch niemals aufgehen.

Die wirkliche Rechnung giebt $\frac{11}{60} = 0,18333 \ldots$

§. 232.

Zusatz. Wenn ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, in einen Decimalbruch verwandelt wird, so enthält, wenn die Rechnung aufgeht, der entstehende Decimalbruch so viel Stellen, wie derjenige von den beiden einfachen Factoren 2 und 5 im Nenner vorhanden ist, welcher am meisten vorhanden ist.

Denn eben so viel Nullen müssen dem Zähler angehängt werden, damit der Zähler alle einfachen Factoren des Nenners in sich enthält.

Z. B. der Bruch $\frac{11}{40}$ liefert einen Decimalbruch von drei Stellen, weil der einfache Factor 2, welcher im Nenner am meisten vorhanden ist, dreimal in ihm vorhanden ist.

§. 233.

Lehrsatz. Wenn ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, in einen Decimalbruch verwandelt wird, so enthält, wenn die Rechnung nicht aufgeht, der entstehende Decimalbruch eine periodische Wiederkehr der nämlichen Ziffern, oder kürzer eine Periode.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ der gegebene Bruch. Da, der Voraussetzung gemäß, die Division $a : b$ nicht aufgeht, so wird überall wo man abbrechen mag ein Rest bleiben, welcher kleiner als der Divisor b ist. Solcher Reste, welche kleiner als b sind, kann es aber im Ganzen nur $b - 1$ geben; wenn man also die Division unbestimmt weit fortsetzt, so muß nothwendig spätestens nach $b - 1$ Schritten ein Rest wiederkehren, welcher schon dagewesen ist. Diesem Reste wird wieder eine Null angehängt u. s. f.; es kehrt demnach von dieser Stelle eine Rechnung wieder, welche schon dagewesen ist, und mithin wiederholen sich auch von dieser Stelle die Ziffern des Quotienten in der nämlichen Ordnung, d. h. sie bilden eine Periode, w. z. b. w.

Beispiele. $\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857 \ldots.$
$\frac{5}{27} = 0{,}185\ 185 \ldots.$
$\frac{25}{88} = 0{,}284\ 09\ 09 \ldots.$

Anmerkung. Periodische Decimalbrüche zeigen, wie schon die gegebenen Beispiele beweisen, unter einander Verschiedenheiten, die hier nur kurz mögen angedeutet werden. Man unterscheide:

1) Der Decimalbruch enthält eine reine Periode (wie in den beiden ersten der vorstehenden Beispiele). Dieser Fall tritt immer ein, wenn der Nenner des gegebenen Bruchs nur aus einfachen Factoren besteht, welche von 2 und 5 verschieden sind.

2) Der Decimalbruch enthält eine oder mehrere nichtperiodische Stellen, welche der Periode vorhergehen (wie in dem dritten der vorigen Beispiele). Dieser Fall tritt immer ein, wenn der Nenner des gegebenen Bruchs die einfachen Factoren 2 und 5 gemischt mit andern einfachen Factoren enthält.

Der Beweis kann hier nicht gegeben werden.

§. 234.

Zusatz. Die Periode eines Decimalbruchs kann höchstens so viel Stellen haben, wie der um Eins verminderte Nenner des gegebenen Bruchs anzeigt.

Denn spätestens nach so viel Schritten muß in der Division ein Rest wiederkehren, welcher schon dagewesen ist, folglich im Quotienten die Periode sich wiederholen.

Man sehe die vorigen Beispiele.

§. 235.

Aufgabe. Einen gegebenen periodischen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Man setze den gegebenen Bruch gleich x, und suche aus dieser Gleichung zwei Gleichungen abzuleiten, durch deren Subtraction die unendlich fortlaufenden Decimalbrüche wegfallen. Die folgenden Beispiele werden dies am besten erläutern.

Beispiel 1. Der gegebene Decimalbruch enthalte eine reine Periode, z. B. 0,407 407 407 .... Man setze

$$x = 0{,}407\ 407\ 407 \ldots.$$

und bilde die beiden Gleichungen

$$1000\,x = 407,\ 407\ 407\ \ldots$$
$$x = 0,\ 407\ 407\ \ldots$$

Die Subtraction dieser beiden Gleichungen giebt

$$999\,x = 407$$

und daraus findet sich der gesuchte Werth

$$x = \tfrac{407}{999} = \tfrac{11}{27}.$$

Beispiel 2. Der gegebene Decimalbruch enthalte nichtperiodische Stellen, z. B. 0,51 7623 7623 .... Man setze

$$x = 0{,}51\ 7623\ 7623\ \ldots$$

und bilde die beiden Gleichungen

$$1000\,000\,x = 51\ 7623{,}7623\ \ldots$$
$$100\,x = 51{,}7623\ \ldots$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man

$$999\,900\,x = 51\,7572$$

und daraus den gesuchten Werth

$$x = \tfrac{517572}{999900} = \tfrac{1307}{2525}.$$

Diese Aufgabe kann auch nach §. 173 aufgelöst werden, indem man den periodischen Decimalbruch wie eine unendliche geometrische Progression ansieht, deren Glieder die einzelnen Perioden des Decimalbruchs sind.

Anmerkung. Da vermöge dieser Aufgabe ein periodischer Decimalbruch jederzeit in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden kann, so darf man die periodischen Decimalbrüche nicht zu den irrationalen Zahlen (§ 190) rechnen; denn ihr Werth kann unter der Form eines gewöhnlichen Bruchs immer vollkommen genau dargestellt werden.

Potenzirung dekadischer Zahlen.

§. 236.

Lehrsatz. Die Ordnungszahl der Potenz einer dekadischen Zahl wird gefunden, indem man die Ordnungszahl der Basis mit dem Exponenten multiplicirt.

$$\left(\overset{n}{\smile}{a}\right)^r = \overset{nr}{\smile}{a^r}.$$

B e w e i s. Die Zahl $\overset{n}{\breve{a}}$ bedeutet a Einheiten der $n$ten Ordnung oder es ist

$$\overset{n}{\breve{a}} = a \,.\, 10^n$$

Potenzirt man diese Gleichung mit dem Exponenten r, so erhält man mit Anwendung der §§. 182 und 184

$$\left(\overset{n}{\breve{a}}\right)^r = a^r \,.\, 10^{nr}$$

und da $a^r \,.\, 10^{nr}$ so viel bedeutet wie a^r Einheiten der nrten Ordnung, so kann man diese letzte Gleichung auch schreiben

$$\left(\overset{n}{\breve{a}}\right)^r = \overset{nr}{\breve{a^r}}$$

w. z. b. w.

B e i s p i e l e. Es ist $8000^2 = \left(\overset{3}{\breve{8}}\right)^2 = \overset{6}{\breve{64}} = 64\,000\,000.$

Ebenso $(0{,}07)^3 = \left(\overset{-2}{\breve{7}}\right)^3 = \overset{-6}{\breve{343}} = 0{,}000\,343.$

§. 237.

Aufgabe. Eine gegebene dekadische Zahl zum Quadrat zu erheben.

A u f l ö s u n g. 1) Wenn die gegebene Zahl zweizifferig ist, so betrachte man die beiden Ziffern wie die beiden Theile eines Binomiums $a + b$ und verfahre nach der Formel des §. 187

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Man beginne die Rechnung von der linken Seite, und lasse die einzelnen Werthe von a^2, $2ab$ und b^2 in den allmälig niedrigeren Ordnungen auf einander folgen.

Die Ordnungszahl des gesuchten Quadrats bestimme man sogleich bei der Quadrirung der höchsten Ziffer nach §. 236.

Z. B. es sei die Zahl 57 zum Quadrat zu erheben, so setze man $\overset{1}{\breve{3}} = a$ und $\overset{0}{\breve{7}} = b$. Alsdann wird

$$\begin{array}{rl} a^2 = & \overset{2}{\breve{9}} \\ 2ab = & 42 \\ b^2 = & 49 \\ \hline & \overset{2}{\breve{1}}369 \end{array}$$

Also ist $37^2 = 1369$.

2) Wenn die gegebene Zahl mehrzifferig ist, so betrachte man zuerst die erste Ziffer wie den ersten Theil a und die zweite Ziffer wie den zweiten Theil b des Binomiums $a + b$, und verfahre damit wie vorhin. Darauf betrachte man die beiden ersten Ziffern wie a und die dritte Ziffer wie b; darauf die drei ersten Ziffern wie a und die vierte Ziffer wie b; u. s. f. und lasse je die Werthe von $2ab$ und b^2 in den allmälig niedrigeren Ordnungen auf einander folgen.

Die Ordnungszahl des Quadrats bestimme man auch hier sogleich bei der Quadrirung der höchsten Ziffer nach §. 236.

Z. B. es sei die Zahl 37,456 zum Quadrat zu erheben, so schreibe man

$$
\begin{array}{llllr}
 & & & a^2 & = \overset{2}{\breve{9}} \\
 & & a^2 = & 2ab & = 42 \\
 & a^2 = & & b^2 & = 49 \\
a^2 = & & 2ab & & = 296 \\
 & & b^2 & & = 16 \\
 & 2ab & & & = 3740 \\
 & b^2 & & & = 25 \\
2ab & & & & = 44940 \\
b^2 & & & & = 36 \\
\hline
 & & & & \overset{2}{\breve{1}}402951936
\end{array}
$$

Also ist $37,456^2 = 1402,951936$.

§. 238.

Zusatz. Wenn eine dekadische Zahl zum Quadrat erhoben wird, so beginnt die Rechnung mit dem Quadrat der höchsten Ziffer und schließt mit dem Quadrat der niedrigsten Ziffer.

Die Quadrate der einzelnen Ziffern treten in die geraden Ordnungen, und die doppelten Producte ($2ab$) in die zwischenliegenden ungeraden Ordnungen.

Dies folgt aus dem Gange der vorstehenden Rechnung.

§. 239.

Aufgabe. Eine gegebene dekadische Zahl zum Cubus zu erheben.

Auflösung. 1) Wenn die gegebene Zahl zweizifferig ist, so betrachte man die beiden Ziffern wie die beiden Theile eines Binomiums $a + b$ und verfahre nach der Formel des §. 187

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Man beginne die Rechnung von der linken Seite, und lasse die einzelnen Werthe von a^3, $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3 in den allmälig niedrigeren Ordnungen auf einander folgen.

Die Ordnungszahl des gesuchten Cubus bestimme man sogleich bei der Cubirung der höchsten Ziffer nach §. 236.

Z. B. es sei die Zahl 560 zum Cubus zu erheben, so setze man $\overset{2}{\overbrace{5}} = a$ und $\overset{1}{\overbrace{6}} = b$. Alsdann wird

$$\begin{array}{rcr} a^3 & = & 1\overset{6}{\overbrace{25}} \\ 3a^2b & = & 450 \\ 3ab^2 & = & 540 \\ b^2 & = & 216 \\ \hline & & 1\overset{6}{\overbrace{75}}616 \end{array}$$

Also ist $560^3 = 175616000$.

2) Wenn die gegebene Zahl mehrzifferig ist, so dehne man das vorige Verfahren ebenso wie bei der Erhebung zum Quadrat (§. 237) nach und nach auf die einander folgenden Ziffern der gegebenen Zahl aus.

Z. B. es sei die Zahl 562,7 zum Cubus zu erheben, so schreibe man

$$\begin{array}{l} a^3 = \left\{ \begin{array}{l} a^3 = \left\{ \begin{array}{rcl} a^3 & = & 1\overset{6}{\overbrace{25}} \\ 3a^2b & = & 450 \\ 3ab^2 & = & 540 \\ b^3 & = & 216 \end{array} \right. \\ 3a^2b \quad = \quad 18816 \\ 3ab^2 \quad = \quad 672 \\ b^3 \quad = \quad 8 \end{array} \right. \\ 3a^2b \quad = \quad 6632724 \\ 3ab^2 \quad = \quad 82614 \\ b^3 \quad = \quad 343 \\ \hline \qquad\qquad 1\overset{6}{\overbrace{78}}168426883 \end{array}$$

Also ist $562{,}7^3 = 178168426{,}883$.

§. 240.

Zusatz. Wenn eine dekadische Zahl zum Cubus erhoben wird, so beginnt die Rechnung mit dem Cubus der höchsten Ziffer und schließt mit dem Cubus der niedrigsten Ziffer.

Die Cuben der einzelnen Ziffern treten in Ordnungen, welche durch 3 theilbar sind, und die dreifachen Producte ($3a^2b$ und $3ab^2$) der Reihe nach in die zwischenliegenden Ordnungen.

Wurzelausziehung aus dekadischen Zahlen.

§. 241.

Lehrsatz. Die Ordnungszahl der Wurzel aus einer dekadischen Zahl wird gefunden, indem man die Ordnungszahl der gegebenen Zahl durch den Wurzel-Exponenten dividirt.

$$\sqrt[r]{\overset{n}{\breve{a}}} = \overset{\frac{n}{r}}{\breve{\sqrt[r]{a}}}.$$

Beweis. Die Zahl $\overset{n}{\breve{a}}$ bedeutet a Einheiten der $n$ten Ordnung, oder es ist

$$\overset{n}{\breve{a}} = a \cdot 10^n.$$

Wenn man aus dieser Zahl die $r$te Wurzel zieht, so erhält man mit Anwendung der Sätze §§. 195 und 200

$$\sqrt[r]{\overset{n}{\breve{a}}} = \sqrt[r]{a} \cdot 10^{\frac{n}{r}}$$

und da $\sqrt[r]{a} \cdot 10^{\frac{n}{r}}$ so viel bedeutet wie $\sqrt[r]{a}$ Einheiten der $\frac{n}{r}$ten Ordnung, so kann man diese letzte Gleichung auch schreiben:

$$\sqrt[r]{\overset{n}{\breve{a}}} = \overset{\frac{n}{r}}{\breve{\sqrt[r]{a}}}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Es wird $\sqrt[3]{64000} = \sqrt[3]{\overset{3}{\breve{64}}} = \overset{1}{\breve{4}} = 40$. Ebenso

$$\sqrt{0{,}0009} = \sqrt{\overset{-4}{\underset{\smile}{9}}} = \overset{-2}{\underset{\smile}{3}} = 0{,}03.$$

Bei der Anwendung dieses Lehrsatzes darf man nicht übersehen, daß die Ordnungszahl der gegebenen Zahl durch den gegebenen Wurzel-Exponenten theilbar sein muß. Im entgegengesetzten Fall hat man zuvor die gegebene Zahl in eine so niedrige Ordnung zu übertragen, daß diese Theilbarkeit stattfindet.

So ist z. B. $\sqrt[3]{800000} = \sqrt[3]{\overset{5}{\underset{\smile}{8}}}$ nicht unmittelbar anzugeben. Man setzt deshalb

$$\sqrt[3]{800000} = \sqrt[3]{\overset{3}{\underset{\smile}{800}}} = \overset{1}{\underset{\smile}{9}} \ldots$$

§. 242.

Aufgabe. Aus einer gegebenen dekadischen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung. Die Rechnung hat den umgekehrten Gang des §. 237 zu nehmen.

Man suche die höchste gerade Ordnung in der gegebenen Zahl auf, und ziehe aus derselben die Quadratwurzel, wodurch man die erste Ziffer der gesuchten Wurzel, oder a, erhält.

Um die zweite Ziffer der Wurzel, oder b, zu finden, übertrage man den Rest in die nächstfolgende ungerade Ordnung und dividire durch das Doppelte der gefundenen Ziffer, oder durch $2a$. Der Quotient giebt den gesuchten Werth von b, und dieser muß die Probe aushalten, daß nicht nur der Werth des Products $2ab$, sondern auch in der nächstfolgenden geraden Ordnung der Werth von b^2 sich subtrahiren läßt.

Um die dritte Ziffer der Wurzel zu finden, betrachte man die beiden gefundenen Ziffern wie a und die gesuchte dritte Ziffer wie b, und verfahre zur Auffindung des Werthes von b wie vorhin. U. s. f.

Die Ordnungszahl der Wurzel bestimme man sogleich bei der Auffindung der höchsten Ziffer nach §. 241.

Beispiele. 1) Die Quadratwurzel aus 140625 findet man wie folgt.

$$\sqrt{\overset{4}{\breve{14}}0625} = \overset{2}{\breve{3}}\,7\,5$$

$$\begin{array}{rrl}
a^2 = & 9 & \quad a\ b\ . \\
(2a = 6) & \overline{50} & \quad \overbrace{a\ \ b} \\
2ab = & 42 & \\
 & \overline{86} & \\
b^2 = & 49 & \\
(2a = 74) & \overline{372} & \\
2ab = & 370 & \\
 & \overline{25} & \\
b^2 = & 25 & \\
 & \overline{0} &
\end{array}$$

Also ist $\sqrt{140625} = 375$.

Man kann die Rechnung etwas abkürzen, indem man je die Summe $2ab + b^2$ für sich berechnet und subtrahirt, wobei es zweckmäßig ist, zuerst b^2 und darauf $2ab$ auszurechnen. Das vorige Beispiel nimmt in dieser Abkürzung folgende Gestalt an.

$$\sqrt{\overset{4}{\breve{14}}0625} = \overset{2}{\breve{3}}\,7\,5$$

$$\begin{array}{rrl}
a^2 = & 9 & \quad a\ b\ . \\
(2a = 6) & \overline{506} & \quad \overbrace{a\ \ b} \\
2ab + b^2 = & 469 & \\
(2a = 74) & \overline{3725} & \\
2ab + b^2 = & 3725 & \\
 & \overline{0} &
\end{array}$$

2) Wenn eine Null in der Wurzel erscheint, so fällt die Bildung von $2ab + b^2$ von selbst aus, und man geht sogleich zu der folgenden ungeraden Ordnung über. Z. B. die Quadratwurzel aus 16,5649 erhält man wie folgt.

$$\sqrt{\overset{0}{\underset{\smile}{16}}5649} = \overset{0}{\underset{\smile}{4}}\,0\,7$$

$$\begin{array}{rll} a^2 = & 16 & \quad ab \\ (2a = 8) & \overline{56} & \quad \overset{\frown}{a}\,b \\ 2ab + b^2 = & 0 & \\ (2a = 80) & \overline{5649} & \\ 2ab + b^2 = & 5649 & \\ & \overline{0} & \end{array}$$

Also ist $\sqrt{16{,}5649} = 4{,}07$.

3) Die Quadratwurzelausziehung aus Decimalbrüchen befolgt genau dieselben Regeln. Z. B. um die Quadratwurzel aus 0,000841 zu finden, rechne man wie folgt.

$$\sqrt{\overset{-4}{\underset{\smile}{8}}41} = \overset{-2}{\underset{\smile}{2}}9$$

$$\begin{array}{rll} a^2 = & 4 & \quad ab \\ (2a = 4) & \overline{441} & \\ 2ab + b^2 = & 441 & \\ & \overline{0} & \end{array}$$

Also ist $\sqrt{0{,}000841} = 0{,}029$.

Ein gewöhnlicher Bruch muß zuvor in einen Decimalbruch verwandelt werden, wenn man die vorigen Regeln anwenden will.

Anmerkung. Der Rest einer Quadratwurzelausziehung, nachdem das Quadrat der letzten Ziffer der Wurzel subtrahirt worden ist, darf höchstens gleich dem Doppelten der bis dahin gefundenen Wurzel sein. Sollte der Rest größer werden, so ist dies ein Beweis, daß die letzte Ziffer der Wurzel zu klein genommen wurde.

Der Beweis hievon ist leicht zu führen, indem man die Quadrate a^2 und $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ mit einander vergleicht.

§. 243.

Zusatz. Die Quadratwurzel aus einer dekadischen Zahl enthält, wenn sie aufgeht, so viel Stellen, wie die gegebene Zahl gerade Ordnungen besitzt.

Oder: Man zerlege die gegebene Zahl von der Rechten nach der Linken in Classen von je zwei Stellen. So viel Classen entstehen, so viel Stellen wird, wenn die Rechnung aufgeht, die Quadratwurzel enthalten. Z. B. die Zahlen des vorigen §.

14 | 06 | 25 | und 16, | 56 | 49 |

geben je drei Classen, also enthält die Quadratwurzel von diesen beiden Zahlen drei Stellen. Und die Zahl

0, | 00 | 08 | 41 |

giebt vier Classen, also enthält ihre Quadratwurzel vier Stellen.

Wenn die Quadratwurzelausziehung nicht aufgeht, so kann man sie mit Anhängung von Nullen beliebig weit fortsetzen. Die Wurzel ist in diesem Falle irrational.

§. 244.

Aufgabe. Aus einer gegebenen dekadischen Zahl die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflösung. Die Rechnung hat den umgekehrten Gang von derjenigen des §. 239 zu nehmen.

Man suche die höchste durch 3 theilbare Ordnung in der gegebenen Zahl auf, und ziehe aus derselben die Cubikwurzel, wodurch man die erste Ziffer der gesuchten Wurzel, oder a, erhält.

Um die zweite Ziffer der Wurzel, oder b, zu finden, übertrage man den Rest in die nächstniedrigere Ordnung und dividire durch das dreifache Quadrat der gefundenen Ziffer, oder durch $3a^2$. Der Quotient giebt den gesuchten Werth von b, und dieser muß die Probe aushalten, daß nicht nur der Werth von $3a^2b$, sondern auch in den nächstniedrigeren Ordnungen der Reihe nach die Werthe von $3ab^2$ und b^3 subtrahirt werden können.

Um die dritte Ziffer der Wurzel zu finden, betrachte man die beiden gefundenen Ziffern wie a und die gesuchte dritte Ziffer wie b, und verfahre zur Auffindung von b wie vorhin. U. s. f.

Die Ordnungszahl der Wurzel bestimme man auch hier sogleich bei der Auffindung der höchsten Ziffer nach §. 241.

Beispiel. Die Cubikwurzel aus 177504328 findet man wie folgt.

$$\sqrt[3]{\overset{6}{\breve{1}}77\overset{}{5}04328} = \overset{2}{\breve{5}}\,6\,2$$

$$\begin{array}{rrl}
a^3 = & 125 & \quad a\,b\,. \\
(3a^2 = 75) & 525 & \quad \overset{\frown}{a}\;b \\
3a^2b = & 450 & \\
 & 750 & \\
3ab^2 = & 540 & \\
 & 2104 & \\
b^3 = & 216 & \\
(3a^2 = 9408) & 18883 & \\
3a^2b = & 18816 & \\
 & 672 & \\
3ab^2 = & 672 & \\
 & 8 & \\
b^3 = & 8 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Also ist $\sqrt[3]{177504328} = 562$.

Man kann auch hier, wie beim Quadratwurzelausziehen, die Rechnung etwas abkürzen, indem man je die Summe $3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$ für sich berechnet und subtrahirt; jedoch wird die Abkürzung hier minder erheblich. Das vorige Beispiel nimmt damit folgende Gestalt an.

$$\sqrt[3]{\overset{3}{\breve{1}}77504328} = \overset{2}{\breve{5}}\,6\,2$$

$$\begin{array}{rrl}
a^3 = & 125 & \quad a\,b\,. \\
(3\,a^2 = 75) & 52504 & \quad \overset{\frown}{a}\;b \\
3\,a^2b = & 450 & \\
3\,ab^2 = & 540 & \\
b^3 = & 216 & \\
 & 50616 & \\
(3a^2 = 9408) & 1888328 & \\
3a^2b = & 18816 & \\
3ab^2 = & 672 & \\
b^3 = & 8 & \\
 & 1888328 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Im Uebrigen wiederholen sich hier ähnliche Bemerkungen wie beim Quadratwurzelausziehen, sowohl über das Vorkommen einer Null in der Wurzel, als auch über das Wurzelausziehen aus Brüchen.

§. 245.

Zusatz. Die Cubikwurzel aus einer dekadischen Zahl enthält, wenn sie aufgeht, so viel Stellen, wie die gegebene Zahl durch 3 theilbare Ordnungen besitzt.

Oder: Man zerlege die gegebene Zahl von der Rechten nach der Linken in Classen von je drei Stellen. So viel Classen entstehen, so viel Stellen wird, wenn die Rechnung aufgeht, die Cubikwurzel enthalten. Z. B. die Zahl des vorigen §.

177 | 504 | 328 |

giebt drei Classen, also enthält ihre Cubikwurzel drei Stellen.

Wenn die Cubikwurzelausziehung nicht aufgeht, so kann man sie mit Anhängung von Nullen beliebig weit fortsetzen. Die Wurzel ist in diesem Falle irrational.

Anmerkung. In ähnlicher Weise wie Quadrat- und Cubikwurzeln lassen sich auch die Ausziehungen der vierten, fünften rc. Wurzel ausführen, worüber die betreffenden Regeln leicht nach dem Vorigen entwickelt werden können. Doch finden diese Wurzelausziehungen nicht leicht eine ernstliche Anwendung, da man meistentheils mit Logarithmen kürzer zum Ziele kommt.

Beispiele zur Uebung.

§. 246.

Addition dekadischer Zahlen. Anwendung von §. 220.

$$1)\quad \begin{array}{r} 397{,}25 \\ 16{,}41 \\ \hline 413{,}66 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r} 0{,}294 \\ 1{,}706 \\ \hline 2 \end{array} \qquad 3)\quad \begin{array}{r} 19{,}22405 \\ 6{,}436 \\ \hline 25{,}66005 \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{r} 12{,}856 \\ 508{,}7 \\ 0{,}6194 \\ \hline 522{,}1754 \end{array} \qquad 5)\quad \begin{array}{r} 1234{,}99607 \\ 710 \\ 41{,}019296 \\ \hline 1986{,}015366 \end{array}$$

Auszurechnen:

6) 12,0134 + 196,785 + 7,00006 = 215,79846

7) 8,6 + 17,035 + 930 + 0,0124 + 200 = 1145,6474

8) 0,78 + 181,2 + 45,943 + 1,87 + 0,071 = 229,864

9) 54,9 + 2274 + 8,071 + 0,19 + 17,80912 =

10) 8,008 + 91,7 + 0,00764 + 452,1924 =

§. 247.

Subtraction dekadischer Zahlen. Anwendung von §. 221.

1)	2)	3)
59,736	11,932	129,785
17,295	7,28	3,9076
42,441	4,652	125,8774

4)	5)
1280,001	0,7
54,2978	0,0015
1225,7032	0,6985

Auszurechnen:

6) 0,975 — 0.421674 = 0,553326

7) 23,005 — 5,76947 = 17,23553

8) 97,5 — 0,000074 = 97,499926

9) 0,037 — 0,036252 =

10) 380 — 24,975 =

§. 248.

Multiplication dekadischer Zahlen. Anwendung der §§. 222 — 225.

1) 36,9 . 7 = 258,3 2) 5798 . 0,4 = 2319,2

3) 94,667 . 0,05 = 4,73335 4) 0,07 . 0,09 = 0,0063

5) 5,769 . 36 = 207,684 6) 6709 . 6,7 = 44950,3

7) 0,00563 . 17 = 0,09571

8) 3785 . 0,0000054 = 0,020439 9) 1,38 . 8,7 = 12,006

10) 0,579 . 3100 = 1794,9 11) 113,5 . 7200 = 817200

12) 45,607 . 18,04 = 822,75028

Auszurechnen:

13) 0,923 . 70 = 14) 6170 . 0,03 = 15) 7,85 . 32,4 =
16) 0,0731 . 4500 = 17) 0,7439 . 6,309 =
18) 59260 . 97,05 = 19) 0,00942 . 0,00207 =
20) 0,1257 . 63000000 =

§. 249.

Division dekadischer Zahlen. Anwendung der §§. 226 — 229.

1) 4,8223 : 7 = 0,6889 2) 27,3 : 8 = 3,4125
3) 53 : 0,00008 = 662500 4) 231,48 : 9000 = 0,02572
5) 400 : 0,25 = 1600 6) 56,7 : 24 = 2,3625
7) 42 : 0,014 = 3000 8) 374 : 2,4 = 155,8333 . . .
9) 38076 : 137 = 277,92700729 . . .
10) 0,5 : 76,91342 = 0,00650081 . . .
11) 1 : 365,25 = 0,0027378507 . . .
12) 0,046 : 0,00762089 = 6,0360404 . . .

Auszurechnen:

13) 27 : 12 = 14) 5640 : 0,0015 =
15) 170,9 : 4000 = 16) 28,778 : 0,064 =
17) 182,94 : 1,79203 = 18) 0,07 : 0,00135 =
19) 0,592 : 88,3726 = 20) 0,1 : 0,59237 =

§. 250.

Verwandlung der Brüche in Decimalbrüche. Anwendung des §. 230.

1) $\frac{1}{2}$ = 0,5 2) $\frac{3}{4}$ = 0,75 3) $\frac{3}{8}$ = 0,375
4) $\frac{11}{20}$ = 0,55 5) $\frac{17}{40}$ = 0,425 6) $\frac{6}{125}$ = 0,048
7) $\frac{2}{3}$ = 0,666 . . . 8) $\frac{6}{11}$ = 0,54 54 . . .
9) $\frac{5}{7}$ = 0,714285 . . . 10) $\frac{11}{27}$ = 0,407 407 . . .
11) $\frac{4}{15}$ = 0,2666 . . . 12) $\frac{24}{35}$ = 0,6 857142 . . .

Auszurechnen:

13) $\frac{5}{16} =$ 14) $\frac{371}{800} =$ 15) $\frac{16}{625} =$ 16) $\frac{99}{250} =$

17) $\frac{4}{9} =$ 18) $\frac{5}{12} =$ 19) $\frac{8}{13} =$ 20) $\frac{1}{88} =$

§. 251.

Potenzirung dekadischer Zahlen. Anwendung der §§. 236 — 240.

Quadrate.

1) $57^2 = 3249$ 2) $104^2 = 10816$

3) $7{,}87^2 = 61{,}9369$ 4) $0{,}024^2 = 0{,}000576$

5) $4590^2 = 21068100$ 6) $56{,}124 = 3149{,}903376$

Auszurechnen:

7) $8{,}1^2 =$ 8) $993^2 =$ 9) $7012^2 =$

10) $71000^2 =$ 11) $0{,}36^2 =$ 12) $0{,}00759^2 =$

Cuben.

13) $46^3 = 97336$ 14) $106^3 = 1191016$

15) $2{,}58^3 = 17{,}173512$ 16) $0{,}023^3 = 0{,}000012167$

17) $9600^3 = 884736000000$ 18) $36{,}8^3 = 49836{,}032$

Auszurechnen:

19) $85^3 =$ 20) $904^3 =$ 21) $1245^3 =$

22) $640^3 =$ 23) $0{,}72^3 =$ 24) $0{,}0138^3 =$

§. 252.

Wurzelausziehen aus dekadischen Zahlen. Anwendung der §§. 241 — 245.

Quadratwurzeln.

1) $\sqrt{8464} = 92$ 2) $\sqrt{61009} = 247$

3) $\sqrt{786769} = 887$ 4) $\sqrt{1635841} = 1279$

5) $\sqrt{937{,}5844} = 30{,}62$ 6) $\sqrt{381182{,}76} = 617{,}4$

7) $\sqrt{6811200900} = 82530$ 8) $\sqrt{0{,}25836889} = 0{,}5083$

9) $\sqrt{0{,}00582169} = 0{,}0763$ 10) $\sqrt{0{,}0003214849} = 0{,}01793$

11) $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$
12) $\sqrt{3} = 1,73205080\ldots$
13) $\sqrt{5} = 2,23606797\ldots$
14) $\sqrt{6} = 2,44948974\ldots$
15) $\sqrt{18439} = 135,7902\ldots$
16) $\sqrt{1,1029} = 1,0501$
17) $\sqrt{0,00064} = 0,0252\ldots$
18) $\sqrt{0,001} = 0,0316\ldots$
19) $\sqrt{\frac{3}{5}} = 0,77458\ldots$
20) $\sqrt{\frac{5}{6}} = 0,91286\ldots$

Auszurechnen:

21) $\sqrt{956484} =$
22) $\sqrt{6849217600} =$
23) $\sqrt{41605800625} =$
24) $\sqrt{2499700009} =$
25) $\sqrt{227,7081} =$
26) $\sqrt{0,013689} =$
27) $\sqrt{0,004096} =$
28) $\sqrt{0,00000729} =$
29) $\sqrt{13} =$
30) $\sqrt{9,6} =$
31) $\sqrt{0,003} =$
32) $\sqrt{0,014} =$
33) $\sqrt{\frac{7}{8}} =$
34) $\sqrt{1\frac{5}{9}} =$

Cubikwurzeln.

35) $\sqrt[3]{274625} = 65$
36) $\sqrt[3]{2460375} = 135$
37) $\sqrt[3]{49836032} = 368$
38) $\sqrt[3]{64481201} = 401$
39) $\sqrt[3]{313323545088} = 6792$
40) $\sqrt[3]{371,694959} = 7,19$
41) $\sqrt[3]{934,007359375} = 9,775$
42) $\sqrt[3]{0,588480472} = 0,838$
43) $\sqrt[3]{0,001771561} = 0,121$
44) $\sqrt[3]{0,000007880599} = 0,0199$
45) $\sqrt[3]{12} = 2,2894\ldots$
46) $\sqrt[3]{82} = 4,3444\ldots$
47) $\sqrt[3]{687} = 8,8237\ldots$
48) $\sqrt[3]{5,8} = 1,7967\ldots$
49) $\sqrt[3]{\frac{7}{11}} = 0,8601\ldots$
50) $\sqrt[3]{1\frac{9}{25}} = 1,1079\ldots$

Auszurechnen:

51) $\sqrt[3]{681472} =$
52) $\sqrt[3]{17173512} =$
53) $\sqrt[3]{74088000} =$
54) $\sqrt[3]{29704593673} =$

55) $\sqrt[3]{0,011089567} =$ 56) $\sqrt[3]{0,000405224} =$

57) $\sqrt[3]{9} =$ 58) $\sqrt[3]{0,0512} =$

59) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} =$ 60) $\sqrt[3]{5\frac{1}{3}} =$

Neunter Abschnitt.

Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade.

---

§. 253.

Erklärung. Unter einer Gleichung vom zweiten Grade, oder einer quadratischen Gleichung, versteht man eine Gleichung, welche das Quadrat der Unbekannten, jedoch keine höhere Potenz derselben enthält.

Nicht immer kann man auf den ersten Blick einer Gleichung ansehen, ob sie eine quadratische ist oder nicht; vielmehr zeigt sich dies häufig erst bei der weiteren Entwickelung der Gleichung. Z. B. die Gleichung

$$x + 7 = \frac{x + 26}{x - 10}$$

wird bei weiterer Entwickelung eine quadratische Gleichung; dagegen die Gleichung

$$\frac{x + 7}{x - 11} = \frac{x + 26}{x - 10}$$

wird nur eine Gleichung vom ersten Grade.

§. 254.

Erklärung. Man unterscheidet reine und gemischte quadratische Gleichungen.

Eine reine quadratische Gleichung ist eine quadratische Gleichung, welche von der Unbekannten nur das Quadrat enthält.

Eine gemischte quadratische Gleichung dagegen ist eine quadratische Gleichung, welche von der Unbekannten sowohl das Quadrat als auch die erste Potenz enthält.

So ist z. B. eine reine quadratische Gleichung

$$7\,x^2 = 63,$$

dagegen eine gemischte quadratische Gleichung

$$7\,x^2 - 11x = 30.$$

§. 255.

Erklärung. Die Werthe der Unbekannten einer quadratischen Gleichung werden die Wurzeln der quadratischen Gleichung genannt.

Es wird sich sogleich zeigen (§. 256 u. §. 258), daß jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln besitzt. So z. B. hat die reine quadratische Gleichung

$$7x^2 = 63$$

die beiden Wurzeln $+3$ und -3. Die gemischte quadratische Gleichung

$$7x^2 - 11x = 30$$

hat die beiden Wurzeln $+3$ und $-\frac{10}{7}$.

Jede der beiden Wurzeln muß, für die Unbekannte in der gegebenen Gleichung an die Stelle gesetzt, diese Gleichung zu einer identischen Gleichung machen. Darin besteht die Probe für die richtige Auflösung der gegebenen Gleichung.

Reine quadratische Gleichungen.

§. 256.

Aufgabe. Eine gegebene reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung. Man verfahre zuerst wie bei Gleichungen vom ersten Grade, indem man das Quadrat der Unbekannten wie Unbekannte ansieht. Sobald alsdann das Quadrat der Unbekannten auf einer Seite der Gleichung allein steht, ziehe man noch auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel aus, wodurch man die Unbekannte findet.

Da man überdies nach §. 193 jeder Quadratwurzel das doppelte Vorzeichen $\pm$ geben muß, so zeigt sich zugleich, daß jede reine quadratische Gleichung zwei Wurzeln besitzt, welche sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden.

Beispiel 1. Es sei gegeben

$$12x^2 = 1452.$$

Man erhält daraus zuerst durch Division

$$x^2 = 121$$

und darauf durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x = \pm 11.$$

Also sind $+11$ und -11 die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung.

$$\text{Probe } 12 \,.\, 121 = 1452.$$

Beispiel 2. Es sei gegeben

$$ax^2 = b.$$

Man erhält durch Division

$$x^2 = \frac{b}{a}$$

und darauf durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Also sind $+\sqrt{\frac{b}{a}}$ und $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung.

$$\text{Probe } a \,.\, \frac{b}{a} = b.$$

Anmerkung. Wenn die Wurzeln imaginär werden, so treten die Bestimmungen der Anmerkung zu §. 193 in Kraft.

Gemischte quadratische Gleichungen.

§. 257.

Erklärung. Eine gemischte quadratische Gleichung wird geordnet genannt, wenn auf der einen Seite der Gleichung das Quadrat der Unbekannten voransteht, und darauf die erste Potenz der Unbekannten, mit einem Coefficienten versehen,

nachfolgt; auf der andern Seite dagegen nur bekannte Zahlen enthalten sind.

Eine gemischte quadratische Gleichung nimmt, geordnet, die Gestalt an

$$x^2 + fx = g$$

wo f den bekannten Coefficienten von x, und g das bekannte Glied bedeutet. Diese Gestalt kann immer durch Anwendung der Methoden des §. 118 hergestellt werden.

§. 258.

Aufgabe. Eine gegebene gemischte quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung. Die gegebene Gleichung sei bereits geordnet, und habe dadurch die Gestalt angenommen

$$x^2 + fx = g.$$

Um aus dieser Gleichung die Quadratwurzel ziehen zu können, muß man zuvor nach dem Vorbilde der Gleichung §. 187

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

den zweitheiligen Ausdruck $x^2 + fx$ durch einen noch zu suchenden dritten Theil zu einem vollständigen Quadrate ergänzen.

Zur Auffindung dieses dritten Theils setze man

$$1) \quad a^2 = x^2$$

oder $a = x$. Ferner

$$2) \quad 2ab = fx$$

und wenn man dies durch die vorige Gleichung $a = x$ dividirt, so erhält man

$$2b = f$$

und daraus

$$b = \frac{f}{2}.$$

Endlich wird durch Quadrirung dieser letzten Gleichung

$$3) \quad b^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

und mithin ist der hier gefundene Werth $\left(\frac{f}{2}\right)^2$ derjenige dritte

Theil, welcher zu dem zweitheiligen Ausdrucke $x^2 + fx$ addirt ein vollständiges Quadrat $x^2 + fx + \left(\frac{f}{2}\right)^2$ hervorbringt, dessen Wurzel $x + \frac{f}{2}$ ist.

Nun addire man zu der gegebenen Gleichung

$$x^2 + fx = g$$

die identische Gleichung

$$\left(\frac{f}{2}\right)^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

wodurch man erhält

$$x + fx + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + g.$$

Hieraus ziehe man die Quadratwurzel, so wird

$$x + \frac{f}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}.$$

Endlich transponire man $\frac{f}{2}$, so hat man

$$x = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g},$$

welches die gesuchte Auflösung ist.

Man sieht sogleich aus dem doppelten Vorzeichen $\pm$ der Quadratwurzel, daß der gefundene Ausdruck für x zwei Werthe liefert. Also hat jede gemischte quadratische Gleichung zwei Wurzeln, welche sich nur im Vorzeichen der Quadratwurzel von einander unterscheiden.

Beispiel. Es sei die Gleichung gegeben

$$x^2 - 12x = 28.$$

Um zunächst den zweitheiligen Ausdruck $x^2 - 12x$ zu einem vollständigen Quadrate von der Form $a^2 + 2ab + b^2$ zu ergänzen, setze man

$$1) \quad a^2 = x^2$$

oder $a = x$. Ferner

$$2) \quad 2ab = -12x$$

woraus folgt $2b = 12$, oder $b = 6$. Endlich wird hieraus

3) $b^2 = 36$.

Nun addire man zu der gegebenen Gleichung

$$x^2 - 12x = 28$$

die identische Gleichung

$$36 = 36$$

wodurch man erhält

$$x^2 - 12x + 36 = 64,$$

ziehe hieraus die Quadratwurzel, welches giebt

$$x - 6 = \pm 8,$$

und transponire endlich 6, so hat man

$$x = 6 \pm 8$$

d. i. $x = +14$ oder -2

Also sind $+14$ und -2 die beiden Wurzeln der gegebenen Gleichung

Probe 1) $196 - 12 \,.\, 14 = 28$

2) $4 + 12 \,.\, 2 = 28$.

§. 259.

Zusatz. Die Wurzeln einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung werden gefunden, indem man das Entgegengesetzte der Hälfte des Coefficienten der Unbekannten nimmt, und dazu addirt die positiv oder negativ genommene Quadratwurzel aus dem Quadrate der Hälfte dieses Coefficienten plus dem bekannten Gliede.

Dies ist eine Uebersetzung der Gleichung

$$x = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}.$$

aus der Sprache der Algebra in die deutsche Sprache. Es ist damit eine Regel gegeben, durch welche man im Stande ist, aus einer geordneten quadratischen Gleichung sogleich die Wurzeln niederzuschreiben, ohne daß man nöthig hätte, in jedem besonderen Falle von neuem wieder die Entwickelung des vorigen §. durchzumachen.

So kann man z. B. aus der gegeben Gleichung

$$x^2 - 12x = 28$$

nach der vorigen Regel sogleich niederschreiben

$$x = 6 \pm \sqrt{36 + 28}$$
$$= 6 \pm \sqrt{64}$$
$$= 6 \pm 8$$
$$= +14 \text{ oder } -2, \text{ wie oben.}$$

Dieses Verfahren ist für den praktischen Gebrauch, seiner Kürze wegen, immer vorzuziehen.

§. 260.

Aufgabe. Aus einer gegebenen geordneten quadratischen Gleichung die Natur der Wurzeln dieser Gleichung zu erkennen.

Auflösung. Nach §. 258 hat die gegebene Gleichung

$$x^2 + fx = g$$

die Auflösung

$$x = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}.$$

Aus der Betrachtung dieses Werthes von x kann man folgende Schlüsse ziehen:

1) Wenn g positiv ist, so wird der Zahlwerth von $\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}$ größer als der Zahlwerth von $\frac{f}{2}$. Folglich sind die beiden Wurzeln der Gleichung reell und von ungleichen Vorzeichen.

2) Wenn g negativ ist und der Zahlwerth von g kleiner als $\left(\frac{f}{2}\right)^2$, so wird der Zahlwerth von $\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}$ kleiner als der Zahlwerth von $\frac{f}{2}$. Folglich sind die beiden Wurzeln der Gleichung reell und von gleichen Vorzeichen.

3) Wenn g negativ ist und der Zahlwerth von g gleich $\left(\frac{f}{2}\right)^2$, so wird $\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g} = 0$. Folglich sind die beiden Wurzeln der Gleichung reell und einander gleich.

4) Wenn g negativ ist und der Zahlwerth von g größer als

$\left(\frac{f}{2}\right)^2$, so wird $\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}$ imaginär. Folglich sind auch die beiden Wurzeln der Gleichung imaginär.

5) Wenn g Null ist, so ist auch die eine Wurzel der Gleichung $= 0$, die andere dagegen $= -f$.

Beispiele: 1)	$x^2 + 12x = 28$,	Wurzeln:	$-14, +2$
	$x^2 - 12x = 28$	"	$+14, -2$
2)	$x^2 + 12x = -27$	Wurzeln	$-9, -3$
	$x^2 - 12x = -27$	"	$+9, +3$
3)	$x^2 + 12x = -36$	"	$-6, -6$
	$x^2 - 12x = -36$	"	$+6, +6$
4)	$x^2 + 12x = -40$	"	$-6+\sqrt{-4}, -6-\sqrt{-4}$
	$x^2 - 12x = -40$	"	$6+\sqrt{-4}, 6-\sqrt{-4}$
5)	$x^2 + 12x = 0$	"	$0, -12$
	$x^2 - 12x = 0$	"	$0, +12$

§. 261.

Lehrsatz. Die Summe der beiden Wurzeln einer geordneten quadratischen Gleichung ist gleich dem Entgegengesetzten des Coefficienten der Unbekannten, und das Product der beiden Wurzeln ist gleich dem Entgegengesetzten des bekannten Gliedes.

Beweis. Nach §. 258 hat die Gleichung

$$x^2 + fx = g$$

die beiden Wurzeln

$$-\frac{f}{2} + \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}$$

$$\text{und } -\frac{f}{2} - \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}.$$

Wenn man diese beiden Werthe addirt, so erhält man zur Summe

$$-f$$

d. i. das Entgegengesetzte des Coefficienten von x, w. z. b. w.

Wenn man aber dieselben beiden Werthe multiplicirt, so erhält man zum Product

$$-g$$

d. i. das Entgegengesetzte des bekannten Gliedes, w. z. b. w.

Beispiele s. d. vorigen §.

Man kann von diesem Satze Gebrauch machen als Probe für die richtige Auflösung einer gemischten quadratischen Gleichung, an der Stelle derjenigen Probe, welche im §. 255 angezeigt worden ist.

Man kann aber auch diesen Satz gebrauchen, um quadratische Gleichungen zu bilden, welche gegebene Wurzeln besitzen sollen. Es werde z. B. eine Gleichung zu bilden verlangt, welche die Wurzeln $+34$ und -5 besitzt. Die Summe dieser beiden Wurzeln ist $= +29$ und das Product derselben $= -170$: folglich ist

$$x^2 - 29x = 170$$

die gesuchte Gleichung, deren Wurzeln sind $+34$ und -5.

§. 262.

Aufgabe. Eine Gleichung aufzulösen von der Form

$$x^{2n} + fx^n = g,$$

wo n eine beliebige Zahl bedeutet.

Auflösung. Man betrachte zuerst x^n wie die Unbekannte, zu deren Auffindung man aus §. 258 hat

$$x^n = -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}.$$

Sodann wird durch Ausziehung der $n$ten Wurzel

$$x = \sqrt[n]{-\frac{f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2 + g}}$$

was zu suchen war.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung gegeben

$$x^6 - 19x^3 = 216.$$

Hier ist $n = 3$. Also wird

$$x^3 = \tfrac{19}{2} \pm \sqrt{\tfrac{361}{4} + 216}$$
$$= +27 \text{ oder } -8$$

und daraus

$$x = \sqrt[3]{+27} \text{ oder } \sqrt[2]{-8}$$
$$= +3 \text{ oder } -2.$$

Beispiel 2. Es sei die Gleichung gegeben

$$\sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[5]{x} = -2.$$

Hier ist $n = \frac{1}{5}$ (s. §. 200). Also wird

$$\sqrt[5]{x} = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - 2}$$
$$= +2 \text{ oder } +1$$

und daraus

$$x = (+2)^5 \text{ oder } (+1)^5$$
$$= +32 \text{ oder } +1.$$

Beispiele zur Uebung.

§. 263.

Reine quadratische Gleichungen.

Mit Ziffern:

1) $12x^2 - 7 = 185$ Wurzeln: ± 4

2) $\dfrac{9}{x} + 3x = 4x$ " ± 3

3) $11 - \dfrac{x+25}{x^2} = 3 - \dfrac{x-25}{x^2}$ " $\pm 2\frac{1}{2}$

4) $\dfrac{x}{x+9} + \dfrac{x}{x-9} = \dfrac{32}{7}$ " ± 12

5) $\dfrac{x+11}{x-11} + \dfrac{x-11}{x+11} = \dfrac{2026}{45}$ " $\pm 11\frac{1}{2}$

6) $6x^2 - 7x(x-8) = 56x - 100.$ " ± 10

Mit Buchstaben:

7) $ax^2 - b = c$ Wurzeln: $\pm\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}$

8) $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x-a}{x+a} = 1$ " $\pm a\sqrt{-3}$

§. 264.

Gemischte quadratische Gleichungen.

Mit Ziffern:

1) $x^2 + 6x = 27$ Wurzeln: $3, -9$

2) $x^2 - 12x = -27$ " $3, 9$

3) $x^2 - 5\frac{3}{4}x = 18$ " $8, -2\frac{1}{4}$

4) $-x^2 + 7x = 3\frac{1}{4}$ " $6\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

5) $5x^2 + 12x = 44$ " $2, -4\frac{2}{5}$

6) $12x^2 = 21 + \frac{1}{4}x$ " $1\frac{1}{3}, -1\frac{5}{16}$

7) $4x^2 - 9x = 5x^2 - 255\frac{3}{4} - 8x$ " $15\frac{1}{2}, -16\frac{1}{2}$

8) $\frac{x}{x+60} = \frac{7}{3x-5}$ " $14, -10$

9) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{x-4} = -\frac{2}{3}$ " $1, 5$

10) $\frac{8x}{x+2} - 6 = \frac{20}{3x}$ " $10, -\frac{2}{3}$

11) $\frac{3}{4}x^2 - 9x = 0$ " $12, 0$

12) $\frac{x}{4} + \frac{25}{x} = 3$ " $6 \pm 8\sqrt{-1}$

Mit Buchstaben:

13) $\frac{x}{a^2-b^2} = \frac{1}{2a-x}$ Wurzeln: $a+b, a-b$

14) $adx - acx^2 = bcx - bd$ " $\frac{d}{c}, -\frac{b}{a}$

15) $\frac{x}{a+x} + \frac{a+x}{x} = \frac{5}{2}$ " $a, -2a$

16) $a^2x^2 - a^2(x+b^2) = ab(x-ab)$ " $a+b, 0$

17) $a^2x^2 - \frac{2ax}{b} + \frac{1}{b^2} = 0$ " $\frac{1}{ab}, \frac{1}{ab}$

18) $x + \frac{a}{bx} = c$ " $\frac{bc \pm \sqrt{b^2c^2-4ab}}{2b}$

Gleichungen, welche wie quadratische aufgelöst werden können:

19) $x^4 - 74x^2 = -1225$ Wurzeln: $\pm 5, \pm 7$

20) $3x^6 + 81 = 84x^3$ " $1, 3$

21) $x^4 + 4abx^2 = (a^2 - b^2)^2$ Wurzeln: $\pm(a-b), \pm(a+b)\sqrt{-1}$

22) $x + \sqrt{x} = 20$ „ 16, 25

23) $\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x^2} = 350$ „ 343, $-364\frac{148}{343}$

24) $\sqrt[3]{x^2} - n(n+1) = -\sqrt[3]{x}$ „ $n^3, -(n+1)^3$

§. 265.

Aufgaben, welche auf quadratische Gleichungen führen.

1) Man kauft für 2500 Thaler Pferde, jedes Pferd kostet viermal so viel Thaler, als Pferde sind. Wie viel hat man gekauft?

Antw. 25 Pferde.

2) Ein Rechteck hält in der Länge 6 Ruthen mehr als in der Breite, und sein Inhalt beträgt 91 Quadratruthen. Wie lang ist es?

Antw. 13 Ruthen.

3) Man will 175 Thaler unter eine gewisse Anzahl Personen vertheilen. Es bleiben aber 2 Personen aus, und deshalb erhält jede der anwesenden Personen 10 Thaler mehr. Unter wie viel Personen sollte anfangs vertheilt werden?

Antw. 7 Personen.

4) Jemand kauft einige Tücher zu gleichen Preisen für 60 Thaler. Wären der Tücher für eben das Geld 3 mehr gewesen, so wäre ihm das Stück um einen Thaler wohlfeiler gekommen. Wie viel Tücher hat er gekauft?

Antw. 12 Stück.

5) Eine Mauer wird von zwei Maurern, von denen der eine $1\frac{1}{2}$ Tage später zu arbeiten anfängt als der andere, in $5\frac{1}{2}$ Tagen ausgeführt. Um die Mauer allein zu vollenden, würde der erste 3 Tage weniger gebrauchen als der zweite. In wie viel Tagen bringt jeder einzeln die Mauer zu Stande?

Antw. Der erste in 8 und der zweite in 11 Tagen.

6) Ein Reisender gebraucht zu einer Reise von 315 Meilen 18 Tage

mehr als ein zweiter, welcher täglich zwei Meilen mehr zurücklegt. Wie viel Tage gebraucht jeder zu dieser Reise?

Antw. Der erste 63 und der zweite 45 Tage.

Zehnter Abschnitt.

Logarithmen.

---

§. 266.

Erklärung*). Unter einem logarithmischen System versteht man den Inbegriff aller Logarithmen, welche zu einerlei Basis gehören.

Ein logarithmisches System wird in einer logarithmischen Tafel niedergelegt.

Der Erste, welcher den Gedanken faßte ein logarithmisches System zu entwerfen, war der schottische Baron Napier in einer zu Edinburg im Jahre 1614 gedruckten Schrift. Dieses System beruhte jedoch auf einer von der heutigen sehr verschiedenen Anschauung, indem es sich auf die Vergleichung einer arithmetischen und einer geometrischen Progression stützte, welche zuerst von Michael Stiffel (in dessen Arithmetik, Nürnberg 1544) in Anregung gebracht worden war. Will man dem Napier'schen System, nach heutiger Weise, eine Basis zu Grunde legen, so kommt man auf die irrationale Zahl 2,71828..., und mit dieser Basis ist das Napier'sche System noch gegenwärtig in der höheren Mathematik von vielfacher Anwendung.

Napier selbst erkannte den Mangel seines Systems für den praktischen Gebrauch, und vereinigte sich mit Briggs, Professor zu Oxford, zur Herstellung eines neuen Systems, welches die Zahl 10 zur Basis hatte. Die erste logarithmische Tafel, welche dieses

*) Hier sind zuvor die §§. 38 — 40 zu wiederholen.

System darstellte, ließ Briggs, nach Napier's Tode, im Jahre 1618 drucken, und sie bildet den Ausgangspunkt für alle später erschienenen und immer mehr vervollständigten logarithmischen Tafeln.

Ungefähr zu derselben Zeit, und unabhängig von Napier, entwarf auch der Schweizer Justus Byrg, welcher als Astronom zu Cassel lebte, zum Gebrauch bei seinen astronomischen Rechnungen ein logarithmisches System, welches sehr nahe mit dem Napier'schen übereinstimmt. Seine Tafel, welche im Jahre 1620 zu Prag gedruckt wurde, unterscheidet sich von der Napier'schen nur in der Anordnung, indem Byrg die Logarithmen voranstellte und ihnen die zugehörigen Zahlen nachfolgen ließ: eine Einrichtung, welche später auch die Engländer unter dem Namen der Anti-Logarithmen in den Gebrauch aufgenommen haben. Die Byrg'schen Tafeln sind übrigens wenig bekannt geworden; erst Kästner am Schlusse des vorigen Jahrhunderts hat das Verdienst die Erfindung Byrg's wieder aus der Vergessenheit hervorgerufen zu haben.

Von den logarithmischen Systemen, pflegt man, innerhalb der Gränzen der Elementar-Mathematik, diejenigen Fälle völlig auszuschließen, wo entweder die gegebene Zahl, oder die gegebene Basis, oder beide zugleich negativ sind. Denn in diesen Fällen würde ein großer Theil aller Logarithmen imaginär werden (s. d. Erklärung §. 192), also über die Gränzen der Elementar-Mathematik hinaus fallen. Dagegen für eine positive gegebene Zahl und eine positive Basis ist der Logarithmus immer reell, d. h. entweder eine algebraische ganze Zahl, oder ein algebraischer Bruch, oder eine algebraische Irrationalzahl, wie sich bald zeigen wird.

Anmerkung. Das Wort Logarithmus, welches Napier eingeführt hat, bedeutet nach seiner Entstehung so viel wie: Zahl der Verhältnisse, und hängt mit der Anschauung zusammen, welche Napier von den Logarithmen hatte. Denkt man sich z. B. die Zahl 10 als Basis eines logarithmischen Systems, so kann man das Verhältniß 1 : 10 das Grundverhältniß dieses Systems nennen, und aus diesem Verhältnisse kann man das Verhältniß 1 : 1000 durch dreimalige Zusammensetzung herleiten, indem $(1:10)^3 = 1:1000$ ist. So bedeutet 3 die Zahl der Verhältnisse, welche man zusammensetzen muß, um das Verhältniß 1 : 1000 hervorzubringen, d. i. den Logarithmus von 1000.

§. 267.

Erklärung. Unter Briggischen Logarithmen versteht man Logarithmen desjenigen logarithmischen Systems, welches der Basis 10 zugehört.

Dieses System bietet besondere Erleichterungen dar, weil die Basis desselben mit der Grundzahl des Zahlensystems zusammenfällt.

Man ist übereingekommen, bei Briggischen Logarithmen, ihres häufigen Gebrauches wegen, die Angabe der Basis wegzulassen, indem man diese stillschweigend voraussetzt. So z. B. schreibt man

$$\log 1000 = 3 \quad \text{statt} \quad \overset{10}{\log}\, 1000 = 3$$

Die Briggischen Logarithmen haben den Namen nach ihrem ersten Berechner Briggs erhalten, s. d. vorigen §.

§. 268.

Erklärung. Die Logarithmen werden in den logarithmischen Tafeln als ganze Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen aufgeführt.

Die ganze Zahl eines Logarithmus wird die Kennziffer (oder Charakteristik), und der angehängte Decimalbruch die Mantisse des Logarithmus genannt.

Für den gewöhnlichen Gebrauch reichen Tafeln mit fünfstelligen Mantissen vollkommen aus. Zu genaueren Rechnungen hat man siebenstellige Mantissen.

Berechnung der Logarithmen.

§. 269.

Lehrsatz. Der Logarithmus von Eins ist in jedem logarithmischen Systeme = 0.

In Buchstaben:

$$\overset{x}{\log}\, 1 = 0$$

wo x eine beliebige Zahl bedeutet.

Beweis. Man mache die Probe des Logarithmirens (§. 39), indem man die gegebene Basis x mit dem angezeigten Logarithmus 0 potenzirt. Diese Potenzirung ergiebt nach §. 205

$$x^0 = 1.$$

Hier ist die gegebene Zahl 1 wieder zum Vorschein gekommen, also ist 0 der richtige Logarithmus, w. z. b. w.

§. 270.

Lehrsatz. Der Logarithmus der Basis ist in jedem logarithmischen Systeme = 1.

In Buchstaben:

$$\overset{x}{\log}\, x = 1$$

wo x eine beliebige Zahl bedeutet.

Beweis. Man mache die Probe des Logarithmirens, indem man die gegebene Basis x mit dem angezeigten Logarithmus 1 potenzirt. Diese Potenzirung giebt

$$x^1 = x.$$

Hier ist die gegebene Zahl x wieder zum Vorschein gekommen, also ist 1 der richtige Logarithmus, w. z. b. w.

§. 271.

Zusatz. Der Logarithmus einer jeden Potenz der logarithmischen Basis ist gleich dem Exponenten dieser Potenz.

So ist z. B.

$$\overset{x}{\log}\,(x^2) = 2\,, \qquad \overset{x}{\log}\,(x^3) = 3\,, \text{ rc.}$$

Ebenso

$$\overset{x}{\log}\left(\frac{1}{x}\right) = -1\,, \quad \overset{x}{\log}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\,, \quad \overset{x}{\log}\left(\frac{1}{x^3}\right) = -3\,, \text{ rc.}$$

wie man leicht durch die Probe nachweist.

Allgemein ist

$$\overset{x}{\log}\,(x^n) = n.$$

Man kann mit Hülfe dieses Satzes sehr leicht das Skelett eines jeden logarithmischen Systems entwerfen, sobald die logarithmische Basis gegeben ist, d. h. alle diejenigen Logarithmen dieses Systems angeben, welche algebraische ganze Zahlen werden.

Nimmt man z. B. die Zahl 10 zur Basis, so erhält man folgende Werthe:

Entwurf einer Tafel der Briggischen Logarithmen.

Num.	Log.	Num.	Log.
1	0	1	0
10	1	0,1	— 1
100	2	0,01	— 2
1000	3	0,001	— 3
10000	4	0,0001	— 4
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

§. 272.

Lehrsatz. In jedem logarithmischen Systeme wird der Logarithmus eines Products gefunden, indem man die Logarithmen der Factoren dieses Products addirt.

In Buchstaben

$$\overset{x}{\log}\,(a\,.\,b) = \overset{x}{\log}\,a + \overset{x}{\log}\,b.$$

Beweis. Man setze zur Abkürzung

$$\overset{x}{\log}\,a = n$$

$$\overset{x}{\log}\,b = r$$

so erhält man durch Addition dieser beiden Gleichungen

$$\overset{x}{\log}\,a + \overset{x}{\log}\,b = n + r. \qquad (1)$$

Aber die Zahlen n und r müssen nach §. 39 die Probe aushalten

$$x^n = a$$

$$x^r = b.$$

Die Multiplication dieser beiden Gleichungen giebt nach §. 178

$$x^{n+r} = a\,.\,b$$

und wenn man in dieser Gleichung den Exponenten $n + r$ wie Unbekannte ansieht, und die Gleichung für $n + r$ auflöst, so folgt

$$n + r = \overset{x}{\log} (a \,.\, b). \qquad (2)$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) endlich schließt man

$$\overset{x}{\log} (a \,.\, b) = \overset{x}{\log}\, a + \overset{x}{\log}\, b$$

w. z. b. w.

Beispiel. In der Tafel der fünfstelligen Briggischen Logarithmen findet man

$$\log\ 7 = 0{,}84510$$
$$\log 12 = 1{,}07918.$$

Die Summe dieser beiden Logarithmen ist

$$1{,}92428$$

und dies ist in derselben Tafel genau der Logarithmus von 84, oder von 7 . 12.

§. 273.

Lehrsatz. In jedem logarithmischen Systeme wird der Logarithmus eines Quotienten gefunden, indem man von dem Logarithmus des Dividenden den Logarithmus des Divisors subtrahirt.

In Buchstaben

$$\overset{x}{\log} \left(\frac{a}{b}\right) = \overset{x}{\log}\, a - \overset{x}{\log}\, b.$$

Beweis. Man setze zur Abkürzung

$$\overset{x}{\log}\, a = n$$
$$\overset{x}{\log}\, b = r$$

so erhält man durch Subtraction dieser beiden Gleichungen

$$\overset{x}{\log}\, a - \overset{x}{\log}\, b = n - r. \qquad (1)$$

Aber die Zahlen n und r müssen nach §. 39 die Probe aushalten

$$x^n = a$$
$$x^r = b.$$

Die Division dieser beiden Gleichungen giebt nach §. 180

$$x^{n-r} = \frac{a}{b}$$

und wenn man in dieser Gleichung den Exponenten $n - r$ wie Unbekannte ansieht und die Gleichung für $n - r$ auflöst, so folgt

$$n - r = \overset{x}{\log}\left(\frac{a}{b}\right). \qquad (2)$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) endlich schließt man

$$\overset{x}{\log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{x}{\log}\, a - \overset{x}{\log}\, b$$

w. z. b. w.

Beispiel. In der Tafel der fünfstelligen Logarithmen findet man

$$\log 72 = 1{,}85733$$
$$\log 18 = 1{,}25527.$$

Die Differenz dieser beiden Logarithmen ist

$$0{,}60206$$

und dies ist in derselben Tafel der Logarithmus von 4, oder von 72 : 18.

§. 274.

Lehrsatz. **In jedem logarithmischen Systeme wird der Logarithmus einer Potenz gefunden, indem man den Logarithmus der Basis dieser Potenz mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt.**

In Buchstaben

$$\overset{x}{\log}\,(a^b) = b\,.\,\overset{x}{\log}\, a.$$

Beweis. Man setze zur Abkürzung

$$\overset{x}{\log}\, a = n$$

so erhält man durch Multiplication dieser Gleichung mit der identischen Gleichung $b = b$

$$b\,.\,\overset{x}{\log}\, a = bn. \qquad (1)$$

Aber die Zahl n muß nach §. 39 die Probe aushalten

$$x^n = a.$$

Die Potenzirung dieser Gleichung mit dem Exponenten b giebt nach §. 184

$$x^{bn} = a^b$$

und wenn man in dieser letzten Gleichung den Exponenten bn wie Unbekannte ansieht, und die Gleichung für bn auflöst, so folgt

$$bn = \overset{x}{\log}\,(a^b). \qquad (2)$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) endlich zieht man den Schluß

$$\overset{x}{\log}\,(a^b) = b\,.\,\overset{x}{\log}\,a$$

w. z. b. w.

Beispiel. In der Tafel der fünfstelligen Logarithmen findet man

$$\log 4 = 0{,}60206.$$

Multiplicirt man diesen Logarithmus mit 3, so erhält man

$$1{,}80618$$

und dies ist in derselben Tafel der Logarithmus von 64, oder von 4^3.

§. 275.

Lehrsatz. In jedem logarithmischen Systeme wird der Logarithmus einer Wurzel gefunden, indem man den Logarithmus der Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, durch den Wurzel-Exponenten dividirt.

In Buchstaben

$$\overset{x}{\log}\,(\sqrt[b]{a}) = \frac{\overset{x}{\log}\,a}{b}.$$

Beweis. Man setze zur Abkürzung

$$\overset{x}{\log}\,a = n$$

so erhält man, wenn man diese Gleichung durch die identische Gleichung $b = b$ dividirt

$$\frac{\overset{x}{\log}\, a}{b} = \frac{n}{b}. \qquad (1)$$

Aber die Zahl n muß nach §. 39 die Probe aushalten

$$x^n = a.$$

Die Ausziehung der $b$ten Wurzel aus dieser Gleichung giebt nach §. 200

$$x^{\frac{n}{b}} = \sqrt[b]{a}$$

und wenn man in dieser letzten Gleichung den Exponenten $\frac{n}{b}$ wie Unbekannte ansieht, und die Gleichung für $\frac{n}{b}$ auflöst, so folgt

$$\frac{n}{b} = \overset{x}{\log}\,(\sqrt[b]{a}). \qquad (2)$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) endlich zieht man den Schluß

$$\overset{x}{\log}\,(\sqrt[b]{a}) = \frac{\overset{x}{\log}\, a}{b}$$

w. z. b. w.

Beispiel. In der Tafel der fünfstelligen Logarithmen findet man

$$\log 64 = 1{,}80618.$$

Dividirt man diesen Logarithmus durch 2, so erhält man

$$0{,}90309$$

und dies ist in derselben Tafel der Logarithmus von 8, oder von $\sqrt{64}$.

§. 276.

Aufgabe. Aus den gegebenen Logarithmen zweier Zahlen, in irgend einem logarithmischen Systeme, den Logarithmus der mittleren geometrischen Proportionale dieser beiden Zahlen in demselben Systeme zu finden.

Auflösung. Es seien a und b die beiden gegebenen Zahlen, und $\overset{x}{\log}\, a$ und $\overset{x}{\log}\, b$ die gegebenen Logarithmen dieser beiden Zahlen im Systeme der Grundzahl x.

Die mittlere geometrische Proportionale der beiden Zahlen a und b ist nach §. 153

$$\sqrt{ab}$$

und den Logarithmus derselben findet man aus den bekannten Logarithmen von a und b wie folgt.

Nach §. 272 ist

$$\overset{x}{\log}\,(ab) = \overset{x}{\log}\,a + \overset{x}{\log}\,b.$$

Nach §. 275 ist ferner

$$\overset{x}{\log}\,(\sqrt{ab}\,) = \frac{\overset{x}{\log}\,(ab)}{2}$$

folglich wenn man hierin für $\overset{x}{\log}\,(ab)$ seinen vorigen Werth substituirt

$$\overset{x}{\log}\,(\sqrt{ab}) = \frac{\overset{x}{\log}\,a + \overset{x}{\log}\,b}{2}$$

was zu suchen war.

In Worten: Der Logarithmus der mittleren geometrischen Proportionale zweier Zahlen, in irgend einem logarithmischen Systeme, wird gefunden, indem man die Summe der Logarithmen dieser beiden Zahlen, in demselben Systeme genommen, durch 2 dividirt.

Oder (nach §. 145): Der Logarithmus der mittleren geometrischen Proportionale zweier Zahlen, in irgend einem logarithmischen Systeme, ist gleich der mittleren arithmetischen Proportionale der Logarithmen dieser beiden Zahlen, in demselben Systeme genommen.

Beispiel. Die beiden Zahlen 9 und 16 haben zur mittleren geometrischen Proportionale die Zahl 12. Nun findet man in der Tafel der fünfstelligen Briggischen Logarithmen

$$\log\ 9 = 0{,}95424$$

$$\log 16 = 1{,}20412$$

und die halbe Summe dieser beiden Logarithmen ist

$$1{,}07918.$$

Dies ist aber in derselben Tafel genau der Logarithmus von 12.

§. 277.

Aufgabe. Von einer gegebenen Zahl für eine gegebene Basis den Logarithmus zu berechnen.

Auflösung. Man suche diejenigen beiden benachbarten Potenzen der logarithmischen Basis auf, zwischen denen die gegebene Zahl enthalten ist und deren Logarithmen nach §. 271 bekannt sind. Von diesen beiden Potenzen berechne man die mittlere geometrische Proportionale, und zugleich nach dem vorigen §. deren Logarithmus. Dadurch hat man die gegebene Zahl zwischen zwei engere Gränzen eingeschlossen als vorhin, und von diesen Gränzen berechne man wieder die mittlere geometrische Proportionale, und zugleich nach dem vorigen §. deren Logarithmus. Jetzt hat man die gegebene Zahl zwischen zwei noch engere Gränzen eingeschlossen; mit diesen Gränzen fahre man wieder fort wie vorhin u. s. w. Wenn man dieses Verfahren hinreichend fortsetzt, so kann man der gegebenen Zahl so nahe kommen, und mithin den gesuchten Logarithmus derselben so genau berechnen wie man will.

Das Verfahren wird von selbst seinen Abschluß finden, wenn die beiden Gränzen, welche die gegebene Zahl zwischen sich enthalten, einander so nahe gerückt sind, daß ihre Logarithmen in so viel Decimalstellen, wie man bestimmen will, zusammenfallen. Denn alsdann hat man auch den gesuchten Logarithmus auf eben so viel Decimalstellen genau.

Beispiel. Es sei log 25 im Briggischen Systeme zu berechnen. Die Zahl 25 liegt zwischen den beiden dekadischen Einheiten 10 und 100, deren Logarithmen sind 1 und 2, und von diesen Werthen ausgehend, nimmt die Rechnung folgenden Gang.

Berechnung von log 25.

Gränzen, welche die gegebene Zahl einschließen	Deren Logarithmen	Mittlere geometrische Proportionale	Deren Logarithmus
10 100	1 2	31,6228	1,50000
10 31,6228	1 1,50000	17,7828	1,25000
17,7828 31,6228	1,25000 1,50000	23,7139	1,37500
23,7139 31,6228	1,37500 1,50000	27,3844	1,43750
23,7139 27,3844	1,37500 1,43750	25,4829	1,40625
23,7139 25,4829	1,37500 1,40625	24,5825	1,39063
24,5825 25,4829	1,39063 1,40625	25,0288	1,39844
24,5825 25,0288	1,39063 1,39844		

Die beiden letzten Logarithmen stimmen auf zwei Decimalstellen mit einander überein, folglich hat man auf zwei Decimalstellen genau

$$\log 25 = 1{,}39\ldots$$

Wollte man den gesuchten Logarithmus auf drei oder mehr Decimalstellen genau haben, so müßte man die vorige Rechnung weiter fortsetzen.

Man übersieht leicht, wie mühsam diese Rechnung wird, wenn

man nur einigermaßen genaue Resultate haben will. Doch kann man sich wenigstens einen Begriff davon machen, wie auf diesem Wege eine vollständige logarithmische Tafel hat berechnet werden können. Kürzere Methoden zur Berechnung der logarithmischen Tafeln lehrt die höhere Mathematik.

§. 278.

Aufgabe. Aus einer schon vorhandenen logarithmischen Tafel den Logarithmus einer gegebenen Zahl für eine beliebige Basis zu finden.

Auflösung. Es sei x diejenige Basis, für welche eine logarithmische Tafel schon als vorhanden vorausgesetzt wird, und es werde für eine neue Basis y der Logarithmus der Zahl a gesucht.

Man setze zur Abkürzung

$$\overset{y}{\log}\, a = m \qquad (1)$$

so muß die Zahl m nach §. 39 die Probe aushalten.

$$y^m = a.$$

Wenn man nun in dieser Gleichung auf beiden Seiten die Logarithmen für die Basis x nimmt, so erhält man mit Anwendung von §. 274

$$m \,.\, \overset{x}{\log}\, y = \overset{x}{\log}\, a$$

und daraus ist

$$m = \frac{\overset{x}{\log}\, a}{\overset{x}{\log}\, y}. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) endlich zieht man den Schluß

$$\overset{y}{\log}\, a = \frac{\overset{x}{\log}\, a}{\overset{x}{\log}\, y}$$

was zu suchen war.

In Worten: Der Logarithmus einer Zahl für eine neue Basis wird gefunden, indem man den Logarithmus dieser Zahl für die anfängliche Basis dividirt durch den Logarithmus der neuen Basis für die anfängliche Basis.

Beispiel. Man sucht den Logarithmus von 25 für die Basis

3, indem man eine Tafel der Briggischen Logarithmen als gegeben voraussetzt. Nach dem vorstehenden Satze hat man

$$\overset{3}{\log}\, 25 = \frac{\log 25}{\log 3}.$$

Nun ist aus der Tafel

$$\log 25 = 1{,}39794$$
$$\log\ 3 = 0{,}47712$$

und die Division dieser beiden Zahlen giebt*)

$$
\begin{array}{r l}
1{,}39794 & : 0{,}47712 = 2{,}92996 \\
95424 & \\
\hline
44370 & \\
42941 & \\
\hline
1429 & \\
954 & \\
\hline
475 & \\
429 & \\
\hline
46 & \\
43 & \\
\hline
3 & \\
3 & \\
\hline
\end{array}
$$

Also ist

$$\overset{3}{\log}\, 25 = 2{,}92996.$$

Man kann auf diese Weise leicht jede gegebene logarithmische Tafel in eine logarithmische Tafel für eine beliebige neue Basis umwandeln, indem man alle Tafellogarithmen durch den Tafellogarithmus der neuen Basis dividirt.

Eigenschaften der Briggischen Logarithmen.

§. 279.

Lehrsatz. Der Briggische Logarithmus einer ganzen Zahl ist entweder gleichfalls eine ganze Zahl, oder eine irrationale Zahl.

---

*) Die Rechnung wird hier am kürzesten nach der sogenannten abgekürzten Division geführt, deren Gang man leicht aus dem Beispiele erkennen wird.

Beweis. Daß der Briggische Logarithmus einer ganzen Zahl in gewissen Fällen gleichfalls eine ganze Zahl ist, hat sich im §. 271 gezeigt; denn die Briggischen Logarithmen aller genauen Potenzen von 10 haben diese Eigenschaft. Daß man ferner dem Logarithmus einer ganzen Zahl, welche nicht Potenz von 10 ist, durch ganze Zahlen und Brüche so nahe kommen kann wie man will, geht aus §. 277 hervor. Es bleibt also nur noch zu beweisen übrig, daß der Briggische Logarithmus einer ganzen Zahl niemals genau einem Bruche oder einer gemischten Zahl gleich sein kann.

Es sei a irgend eine ganze Zahl, und man setze

$$\log a = \frac{n}{r}$$

wo n und r relative Primzahlen sind. Soll diese Gleichung richtig sein, so muß der Bruch $\frac{n}{r}$ die Probe aushalten

$$10^{\frac{n}{r}} = a$$

oder wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit r potenzirt

$$10^n = a^r.$$

Nun besteht 10 aus den einfachen Factoren 2 . 5, folglich wird auch 10^n nur die einfachen Factoren 2 und 5, jeden n mal gesetzt, enthalten. Dasselbe muß aber, vermöge der letzten Gleichung, auch von a^r gelten, und dies ist nur möglich, wenn die ganze Zahl a gleichfalls nur die einfachen Factoren 2 und 5, jeden gleich viel mal gesetzt, in sich enthält, d. h. wenn a eine von den Potenzen 10, 100, 1000, 2c. ist. Für jeden anderen Werth von a kann also $\log a$ niemals einem Bruche oder einer gemischten Zahl gleich sein, w. z. b. w.

Jede Tafel der Briggischen Logarithmen giebt also für die Logarithmen aller ganzen Zahlen, welche nicht genaue Potenzen von 10 sind, nur angenäherte Werthe.

Anmerkung. Daß die Briggischen Logarithmen aller unächten Brüche oder gemischten Zahlen gleichfalls irrational sind, folgt unmittelbar aus §. 189.

§. 280.

Lehrsatz. Die Briggischen Logarithmen aller ganzen und gemischten Zahlen sind positiv, und die Briggischen Logarithmen aller ächten Brüche sind negativ.

Beweis. 1) Alle ganzen und gemischten Zahlen füllen die Intervalle der Reihe

$$1 , 10 , 100 , 1000 , \text{rc.}$$

folglich müssen die Logarithmen derselben die Intervalle der Reihe

$$0 , 1 , 2 , 3 , \text{rc.}$$

ausfüllen, d. h. sie müssen positiv sein, w. z. b. w.

2) Alle ächten Brüche, in der Form von Decimalbrüchen ausgedrückt, füllen die Intervalle der Reihe

$$1 , 0{,}1 , 0{,}01 , 0{,}001 , \text{rc.}$$

folglich müssen die Logarithmen derselben die Intervalle der Reihe

$$0 , -1 , -2 , -3 , \text{rc.}$$

ausfüllen, d. h. sie müssen negativ sein, w. z. b. w.

§. 281.

Erklärung. Die Briggischen Logarithmen der ächten Brüche werden für den Gebrauch bei praktischen Rechnungen immer unter die Form gebracht, daß ihre Mantisse positiv, und mithin nur ihre Kennziffer negativ ist.

Die Kennziffer wird in diesem Falle der Mantisse nachgesetzt.

Es sei z. B. der Logarithmus des Bruches $\frac{3}{7}$ zu bestimmen. Aus der logarithmischen Tafel hat man

$$\log 3 = 0{,}47712$$

$$\log 7 = 0{,}84510$$

und hieraus erhält man unmittelbar mit Anwendung von §. 273 durch Subtraction der Logarithmen

$$\log \tfrac{3}{7} = -\ 0{,}36798. \qquad (1)$$

Aber dieser Logarithmus hat nicht die gebräuchliche Form. Um die letztere zu erhalten, addire man zu der Kennziffer des Minuend so viel Einheiten, wie zur Ausführung der Subtraction nöthig sind, und füge dieselben Einheiten mit dem negativen Vorzeichen wieder bei. Alsdann hat man

$$\log 3 = 1,47712 \quad 1$$

$$\log 7 = 0,84510$$

und die Subtraction der Logarithmen giebt jetzt

$$\log \tfrac{3}{7} = 0,63202 \ -1 \qquad (2)$$

wo die Mantisse positiv geblieben ist, und ihr die negative Kennziffer nachfolgt, wie verlangt wurde.

Es ist nicht schwer durch eine Probe nachzuweisen, daß die Logarithmen in (1) und (2) einerlei Werth haben.

Anmerkung. Es giebt Fälle, in denen die hier vorgeschriebene Form (2) der Logarithmen ächter Brüche nicht gebraucht werden kann, sondern man zu (1) zurückkehren muß, z. B. bei der Auflösung der Exponentialgleichungen. Solche Fälle bleiben hier vorläufig außer Betracht.

§. 282.

Lehrsatz. Die Briggischen Logarithmen aller dekadischen Zahlen, welche mit denselben Ziffern in derselben Reihefolge geschrieben werden (oder welche sich nur durch die Stellung des Komma von einander unterscheiden), haben einerlei Mantisse.

Beweis. Es sei a irgend eine dekadische Zahl. Wenn man in dieser Zahl dem Komma irgend eine andere Stelle giebt, so sagt dies nach den §§. 223 u. 227 eben so viel, als ob man die Zahl mit irgend einer Potenz von 10 multiplicirt oder durch dieselbe dividirt habe; oder auch als ob man die Zahl mit einer Potenz 10^n multiplicirt habe, wo n irgend eine algebraische ganze Zahl bedeutet. Die Zahl a erlangt durch diese Aenderung den Werth

$$10^n \,.\, a.$$

Will man von dieser veränderten Zahl den Briggischen Logarithmus angeben, so hat man nach §. 272

$$\log (10^n \cdot a) = \log (10^n) + \log a$$

oder da $\log (10^n) = n$ ist (§. 271), so wird

$$\log (10^n \,.\, a) = n + \log a.$$

d. h. die Umstellung des Komma in der gegebenen Zahl um n Stel=

len hat zur Folge, daß der Logarithmus der gegebenen Zahl um die Zahl n vergrößert oder verkleinert wird. Nun ist n eine ganze Zahl, deshalb kann deren Addition zu $\log a$ in allen Fällen nur auf die Kennziffer von $\log a$ Einfluß haben, und mithin bleibt die Mantisse von $\log a$ unverändert, w. z. b. w.

Beispiel. Aus den Tafeln ist

$$\log 73 = 1{,}86332.$$

Multiplicirt man hierin die Zahl mit 100, so muß man zu dem Logarithmus 2 addiren, und erhält

$$\log 7300 = 3{,}86332.$$

Dividirt man aber dieselbe Zahl durch 1000, so muß man zu dem Logarithmus -3 addiren, und erhält

$$\log 0{,}073 = 1{,}86332 - 3$$

d. i.

$$\log 0{,}073 = 0{,}86332 - 2.$$

In beiden Fällen ist die Mantisse des Logarithmus unverändert geblieben.

§. 283.

Lehrsatz. Die Kennziffer des Briggischen Logarithmus einer dekadischen Zahl ist immer gleich der höchsten Ordnungszahl dieser Zahl.

Beweis. Es sei a irgend eine dekadische Zahl, und die höchste Ziffer derselben sei von der Ordnung n. Alsdann ist der Werth von a zwischen den beiden Gränzen enthalten

$$a > 10^n \quad \text{und} \quad a < 10^{n+1},$$

und hieraus folgt, indem man von den Zahlen zu den Logarithmen übergeht

$$\log a > n \quad \text{und} \quad \log a < n + 1.$$

Demnach muß $\log a = n +$ einem positiven ächten Bruche sein, und da dieser positive ächte Bruch immer die Mantisse des Logarithmus darstellt, so ist n die Kennziffer dieses Logarithmus. Aber n war, vermöge der Voraussetzung, zugleich die höchste Ordnungszahl der gegebenen Zahl. Folglich ist die Kennziffer des Logarithmus gleich der höchsten Ordnungszahl der gegebenen Zahl, w. z. b. w.

Beispiele. 1) Es werde die Kennziffer des Logarithmus von 7300 gesucht. Da die höchste Ziffer dieser Zahl von der dritten Ordnung ist, so hat man

$$\overset{3}{7300} > 1000 \quad \text{und} \quad \overset{3}{7300} < 10000 \;.$$

folglich

$$\log \overset{3}{7300} > 3 \quad \text{und} \quad \log \overset{3}{7300} < 4$$

und daraus

$$\log \overset{3}{7300} = 3 + \text{Mantisse}.$$

Wenn man die Mantisse aus der logarithmischen Tafel hinzunimmt, so hat man vollständig

$$\log \overset{3}{7300} = 3{,}86332.$$

2) Es werde die Kennziffer des Logarithmus von 0,073 gesucht. Die höchste Ziffer dieser Zahl ist von der -2ten Ordnung, und mithin ist

$$0{,}\overset{-2}{073} > 0{,}01 \quad \text{und} \quad 0{,}\overset{-2}{073} < 0{,}1$$

folglich

$$\log 0{,}\overset{-2}{073} > -2 \quad \text{und} \quad \log 0{,}\overset{-2}{073} < -1$$

und daraus

$$\log 0{,}\overset{-2}{073} = -2 + \text{Mantisse}.$$

Wenn man die Mantisse aus der logarithmischen Tafel hinzunimmt, so hat man vollständig

$$\log 0{,}\overset{-2}{073} = 0{,}86332 - 2.$$

§. 284.

Zusatz. Die Kennziffer des Briggischen Logarithmus einer ganzen Zahl ist positiv, und um Eins kleiner als die Anzahl der Ziffern dieser Zahl.

Die Kennziffer des Briggischen Logarithmus eines Decimalbruchs ist negativ, und ihr Zahlwerth ist gleich der Anzahl aller Nullen, welche den Ziffern des Decimalbruchs vorhergehen.

Diese beiden Regeln folgen leicht aus dem vorigen Lehrsatze. Beispiele s. d. vorigen §.

Gebrauch der logarithmischen Tafeln.

§. 285.

Erklärung. Die Tafeln der Briggischen Logarithmen enthalten nur die Logarithmen der ganzen Zahlen, auch in der Regel nur die Mantissen dieser Logarithmen.

Daß diese Beschränkung für den Gebrauch ausreichend sei, folgt aus den §§. 282 und 283. Es ist demnach immer eine leichte Arbeit, zu einer Zahl, welche nicht die Gränzen der Tafel überschreitet, den Logarithmus aufzuschlagen, oder auch zu einem Logarithmus, welcher in der Tafel enthalten ist, die Zahl aufzuschlagen. Die Einrichtung der logarithmischen Tafeln ist nicht überall dieselbe, und man muß deshalb die Erläuterung zu Rathe ziehen, welche einer jeden Tafel vorangedruckt zu sein pflegt.

Die Tafeln mit fünfstelligen Mantissen erstrecken sich bis zu der Zahl 9999, die Tafeln mit siebenstelligen Mantissen bis zu der Zahl 99999. Ueber diese Gränzen hinaus kommen die folgenden beiden Aufgaben zur Anwendung.

§. 286.

Aufgabe. Zu einer gegebenen Zahl, welche nicht vollständig in der logarithmischen Tafel enthalten ist, den zugehörigen Logarithmus zu finden.

Auflösung. Diese Aufgabe erfordert eine Interpolirung der Tafel, deren Gang man am besten aus einem Beispiele entnehmen kann.

Beispiel. In einer Tafel mit fünfstelligen Mantissen werde gesucht

$$\log 462583.$$

Man entnehme aus der logarithmischen Tafel folgendes Bruchstück:

Zahlen	Differenz	Logarithmen	Differenz
4625	1	66502	9
4626		66511	

Hieraus hat man für die 4 ersten Ziffern der gegebenen Zahl unmittelbar

$$\log \overset{5}{\breve{4625}} = 5{,}66502$$

Für die fünfte Ziffer 8 addire man zu dieser Mantisse 0,8 der Differenz 9, d. i. = 7,2.

Für die sechste Ziffer 3 addire man ferner zu der Mantisse 0,03 der Differenz 9, d. i. = 0,27.

Also hat man

$$\begin{array}{rl} \log \overset{5}{\breve{4625}} & = 5{,}66502 \\ 8 & \ldots\ldots 7{,}2 \\ 3 & \ldots\ldots 0{,}27 \\ \hline \log \overset{5}{\breve{462583}} & = 5{,}66509 \end{array}$$

wo der Bruch 0,47 wegbleibt, weil er kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Hätte er mehr als $\frac{1}{2}$ betragen, so würde man dafür noch 1 in der letzten Stelle der Mantisse addirt haben.

§. 287.

Aufgabe. Zu einem gegebenen Logarithmus, welcher nicht genau in der logarithmischen Tafel enthalten ist, die zugehörige Zahl zu finden.

Auflösung. Diese Aufgabe erfordert wieder eine Interpolirung der Tafel, deren Gang die Umkehrung des vorigen ist.

Beispiel. In einer Tafel mit fünfstelligen Mantissen werde zu dem Logarithmus

$$2{,}51368$$

die Zahl gesucht. Man entnehme aus der logarithmischen Tafel folgendes Bruchstück:

Zahlen	Differenz	Logarithmen	Differenz
3263 3264	1	51362 51375	13

Hieraus findet man unmittelbar die 4 ersten Ziffern der gesuchten Zahl, nämlich

$$2{,}51368 = \log \overset{2}{\smile}326{,}3\ \ldots.$$

Um die folgenden Ziffern der gesuchten Zahl zu finden, dividire man die Differenz der Mantissen 51368 — 51362 = 6 durch die Differenz 13 nach den Regeln der dekadischen Division; die Stellen des hervorgehenden Decimalbruchs

$$\tfrac{6}{13} = 0{,}46\ \ldots$$

enthalten die gesuchten Ziffern.

Man hat also

$$\begin{array}{l} 2{,}51368 = \log \overset{2}{\smile}326{,}3 \\ \underline{\ 51362\ } \\ \quad\quad 60 : 13\ \ldots.\ 4 \\ \quad\quad \underline{52} \\ \quad\quad\quad 80 : 13\ \ldots.\ 6 \\ \quad\quad\quad \underline{78} \qquad \overline{326{,}346} \end{array}$$

Es ist nicht räthlich, mehr als zwei Ziffern durch diese Interpolirung zu bestimmen, da die folgenden Ziffern unsicher werden. Die letzte Ziffer nehme man immer, mit Rücksicht auf den wegzulassenden Rest, so genau wie möglich.

Anmerkung. Die Interpolirungen, welche dieser und der vorige §. fordern, kann man bei Tafeln mit fünfstelligen Mantissen immer leicht im Kopfe ausführen. Tafeln mit siebenstelligen Mantissen dagegen enthalten zur Erleichterung des Interpolirens kleine Hülfstafeln, über deren Gebrauch man die Erläuterungen nachlesen muß, welche den Tafeln vorangedruckt sind.

§. 288.

Aufgabe. Gegebene Zahlen mit Hülfe einer logarithmischen Tafel zu multipliciren.

Auflösung. Zu den gegebenen Zahlen suche man in der Tafel die Logarithmen, addire diese Logarithmen, und zu der Summe suche man in der Tafel wieder die Zahl. Diese Zahl ist das gesuchte Product.

Der Grund für dieses Verfahren beruhet in §. 272.

Beispiele. 1) Es werde das Product gesucht

$$3975{,}26 \;.\; 9{,}4478.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \log 3975{,}26 &= 3{,}59937 \\ \log 9{,}4478 &= 0{,}97533 \\ \text{Summe } &\; 4{,}57470 \end{aligned}$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$37557{,}5$$

welche das gesuchte Product ist.

2) Es werde das Product gesucht

$$16{,}748 \;.\; 0{,}0074912.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \log 16{,}748 &= 1{,}22396 \\ \log 0{,}0074912 &= 0{,}87455 - 3 \\ \text{Summe } &\; 2{,}09851 - 3 \\ &= 0{,}09851 - 1 \end{aligned}$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$0{,}125462$$

welche das gesuchte Product ist.

§. 289.

Aufgabe. Gegebene Zahlen mit Hülfe einer logarithmischen Tafel zu dividiren.

Auflösung. Zu den gegebenen Zahlen suche man in der Tafel die Logarithmen, subtrahire von dem Logarithmus des Dividend

den Logarithmus des Divisors, und zu der Differenz suche man in der Tafel wieder die Zahl. Diese Zahl ist der gesuchte Quotient.

Der Grund für dieses Verfahren beruhet in §. 273.

Beispiele. 1) Es werde der Quotient gesucht

$$29{,}746 : 7844{,}92.$$

Man erhält

$$\log\ 29{,}746 = 1{,}47343$$
$$\log\ 7844{,}92 = 3{,}89459$$

wofür man, damit die Subtraction ausgeführt werden kann, schreiben muß

$$\log\ 29{,}746 = 4{,}47343 - 3$$
$$\log\ 7844{,}92 = 3{,}89459$$
$$\text{Differenz } 0{,}57884 - 3$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$0{,}00379175$$

welche der gesuchte Quotient ist.

2) Es werde der Quotient gesucht

$$18{,}5741 : 0{,}009496.$$

Man erhält

$$\log\ 18{,}5741 = 1{,}26891$$
$$\log\ 0{,}009496 = 0{,}97754 - 3$$
$$\text{Differenz } 0{,}29137 + 3$$
$$= 3{,}29137$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$1956{,}00$$

welcher der gesuchte Quotient ist.

§. 290.

Erklärung. Unter der dekadischen Ergänzung einer gegebenen Zahl versteht man diejenige Zahl, welche übrig bleibt, wenn man die gegebene Zahl von 10 subtrahirt.

So ist z. B. von der Zahl 7 die dekadische Ergänzung = 3, oder kürzer geschrieben: D. E. 7 = 3. Ebenso: D. E. 3,746 = 6,254, u. s. w.

Die dekadische Ergänzung eines Logarithmus findet man am kürzesten, indem man alle Ziffern dieses Logarithmus von 9, und nur die letzte Ziffer von 10 subtrahirt, z. B.

$$\log 160 = 2{,}20412$$
$$\text{D. E. } \log 160 = 7{,}79588.$$

Wenn der Logarithmus eine negative Kennziffer besitzt, so muß man zu der dekadischen Ergänzung überdies diese Kennziffer, positiv genommen, addiren, z. B.

$$\log 0{,}006 = 0{,}77815 - 2$$
$$\text{D. E. } \log 0{,}006 = 9{,}22185 + 2$$
$$\text{d. i. } = 11{,}22185.$$

Zur Probe kann man wieder die Summe berechnen, welche 10 betragen muß.

§. 291.

Lehrsatz. Die Differenz zweier Zahlen kann immer gefunden werden, indem man zum Minuend die dekadische Ergänzung des Subtrahend addirt und von dieser Summe wieder 10 subtrahirt.

$$a - b = a + \text{D. E. } b - 10.$$

Beweis. Man mache die Probe der Subtraction, indem man zu der angezeigten Differenz

$$a + \text{D. E. } b - 10$$

den Subtrahend b addirt, also

$$(a + \text{D. E. } b - 10) + b.$$

Um diese Addition auszuführen, hat man nach §. 10.

$$(a + \text{D. E. } b - 10) + b = (\text{D. E. } b + b) + a - 10,$$

oder, weil nach der vorigen Erklärung die dekadische Ergänzung von b, und b, zur Summe 10 geben,

$$(a + \text{D. E. } b - 10) + b = 10 + a - 10,$$

oder endlich, weil $10 + a - 10 = a$ ist,

$$(a + \text{D. E. } b - 10) + b = a$$

Folglich kommt durch die Probe der Minuend a wieder zum Vorschein, und mithin ist „$a + \text{D. E. } b - 10$“ die richtige Differenz, w. z. b. w.

Beispiele. $12 - 7 = 12 + 3 - 10 = 5$.

Von besonderer Bequemlichkeit ist der Gebrauch der dekadischen Ergänzung bei der Subtraction der Logarithmen. Die beiden Beispiele des §. 289 würden hier zu rechnen sein wie folgt.

1) Es werde der Quotient gesucht

$$29{,}746 : 7844{,}92.$$

Man schreibe

$$\begin{array}{rrl} \log\ 29{,}746 = & 1{,}47343 & \\ \text{D. E. } \log\ 7844{,}92 = & 6{,}10541 & (-10) \\ \hline \text{Summe } & 7{,}57887 & -10 \\ = & 0{,}57884 & -3 \end{array}$$

wozu die Zahl 0,00379175 wie oben.

2) Es werde der Quotient gesucht

$$18{,}5741 : 0{,}009496.$$

Man schreibe

$$\begin{array}{rrl} \log\ 18{,}5741 = & 1{,}26891 & \\ \text{D. E. } \log\ 0{,}009496 = & 12{,}02246 & (-10) \\ \hline \text{Summe } & 13{,}29137 & -10 \\ = & 3{,}29137 & \end{array}$$

wozu die Zahl 1956,00 wie oben.

Wenn man die Subtraction der Zahl 10, welche der Gebrauch der dekadischen Ergänzung jederzeit fordert, nicht besonders in Anschlag bringen will, da sie sich immer ohne alle Mühe ausführen läßt, so hat man in dem vorstehenden Lehrsatze ein allgemeines Mittel, jede Subtraction von Logarithmen in eine Addition zu verwandeln. Für eine einzelstehende Subtraction wird man zwar von diesem Mittel nicht leicht Gebrauch machen; das eigentliche Anwendungsgebiet desselben wird erst durch den folgenden §. angezeigt.

§. 292.

Zusatz. Wenn eine Rechnung aus Factoren und Divisoren zusammengesetzt ist, so kann man den Logarithmus des Resultats durch eine einzige Addition von Logarithmen finden, indem man für jeden Logarithmus eines Divisors die dekadische Ergänzung dieses Logarithmus an die Stelle setzt.

Hinterher muß man sodann so viel mal 10 subtrahiren, wie man dekadische Ergänzungen gebraucht hat.

z. B. man würde ohne Gebrauch der dekadischen Ergänzung setzen:

$$\log \frac{abc}{de} = \log a + \log b + \log c - \log d - \log e.$$

Dagegen mit Gebrauch der dekadischen Ergänzung würde dieselbe Rechnung so stehen:

$$\log \frac{abc}{de} = \log a + \log b + \log c + \text{D. E.} \log d + \text{D. E.} \log e - 20.$$

Beispiel. Es sei zu berechnen

$$\frac{39{,}74 \,.\, 0{,}0861 \,.\, 470}{684 \,.\, 1{,}2475}.$$

Man schreibe

log	39,74	= 1,59923		
log	0,0861	= 0,93500	— 2	
log	470	= 2,67210		
D. E. log	684	= 7,16494	(— 10)	
D. E. log	1,2475	= 9,90396	(— 10)	
	Summe	22,27523	— 22	
		= 0,27523		

und zu diesem Logarithmus findet man die Zahl

1,88465.

Ohne den Gebrauch der dekadischen Ergänzung hätte man zwei Additionen und eine Subtraction auszuführen gehabt, wo man hier mit einer einzigen Addition ausreicht.

§. 293.

Aufgabe. Eine gegebene Zahl mit Hülfe einer logarithmischen Tafel zu einer Potenz zu erheben.

Auflösung. Zu der gegebenen Zahl suche man in der Tafel den Logarithmus, multiplicire diesen Logarithmus mit dem gegebenen Exponenten, und zu diesem Producte suche man in der Tafel wieder die Zahl. Diese Zahl ist die gesuchte Potenz.

Der Grund für dieses Verfahren beruhet in §. 274.

Beispiele. 1) Es sei zu potenziren

$$2{,}74119^6.$$

Man erhält

$$\log 2{,}74119 = 0{,}43794$$
$$.\,6$$
$$\text{Product } 2{,}62764$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$424{,}27$$

welche die gesuchte Potenz ist.

2) Es sei zu potenziren

$$0{,}000961^3.$$

Man erhält

$$\log 0{,}000961 = 0{,}98272 - 4$$
$$.\,3$$
$$\text{Product } 2{,}94816 - 12$$
$$= 0{,}94816 - 10$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$0{,}00000000088748$$

welche die gesuchte Potenz ist.

Anmerkung. Das Potenziren ist diejenige Rechnungsart, für welche der Gebrauch der logarithmischen Tafeln am meisten unsichere Resultate giebt. Man kann nämlich bei einigermaßen großen Exponenten die durch Interpolirung der Tafel gefundenen Ziffern der Potenz nicht mehr als zuverlässig verbürgen, und muß deshalb, wo es um größere Genauigkeit zu thun ist, Tafeln mit mehrstelligen Mantissen benutzen.

§. 294.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl mit Hülfe einer logarithmischen Tafel eine Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Zu der gegebenen Zahl suche man in der Tafel den Logarithmus, dividire diesen Logarithmus durch den gegebenen Wurzel-Exponenten, und zu diesem Quotienten suche man in der Tafel wieder die Zahl. Diese Zahl ist die gesuchte Wurzel.

Der Grund dieses Verfahrens beruhet in §. 275.

Beispiele. 1) Es sei auszuziehen

$$\sqrt[5]{3966{,}29}.$$

Man erhält

$$\log 3966{,}29 = 3{,}59858$$
$$:5$$
$$\text{Quotient } 0{,}71972$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$5{,}24467$$

welche die gesuchte Wurzel ist.

2) Es sei auszuziehen

$$\sqrt[3]{0{,}7589}.$$

Man erhält

$$\log 0{,}7589 = 0{,}88018 - 1$$

wofür man, damit die negative Kennziffer durch den Wurzel-Exponenten 3 theilbar ist, schreiben muß

$$\log 0{,}7589 = 2{,}88018 - 3$$
$$:3$$
$$\text{Quotient } 0{,}96006 - 1$$

und zu diesem Logarithmus ist die Zahl

$$0{,}91214$$

welche die gesuchte Wurzel ist.

Die in diesem letzten Beispiele enthaltene Umwandlung der negativen Kennziffer ist für den Gebrauch besonders zu beachten.

§. 295.

Zusatz. Nach dem Vorigen kann man mit Hülfe der logarithmischen Tafeln jedes Multipliciren in ein Addiren, jedes Dividiren in ein Subtrahiren, jedes Potenziren in ein Multipliciren, und jedes Wurzelausziehen in ein Dividiren verwandeln.

Das Addiren und das Subtrahiren fehlen in dieser Aufzählung. Beide Rechnungsarten kann man nicht mit Hülfe logarithmischer Tafeln ausführen, sondern man muß sie an den Zahlen selbst vornehmen. Dies ist nicht selten störend in logarithmischen Rechnungen, indem man im Laufe einer Rechnung genöthigt wird, zu den Logarithmen die Zahlen aufzuschlagen, an diesen Zahlen eine geforderte Addition oder Subtraction vorzunehmen, und von da wieder zu den Logarithmen überzugehen, um die Rechnung mit

Logarithmen weiter zu führen. Dadurch kann die Rechnung sehr umständlich werden; man vergleiche z. B. den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[3]{913,44} + \sqrt[3]{7,6012}}{12,49 \sqrt[4]{3}}.$$

In vielen Fällen ist man im Stande, einen gegebenen Ausdruck so umzuformen, daß die die logarithmische Rechnung störenden Additionen oder Subtractionen, welche er enthält, daraus verschwinden d. h. durch Multiplicationen oder Divisionen ersetzt werden. Man nennt dies: Einen Ausdruck für logarithmische Rechnung bequem einrichten. Beispiele dazu liefert die Trigonometrie.

Anmerkung. Man hat eigene Tafeln entworfen (die Gauß'schen Tafeln), welche dazu dienen, aus den bekannten Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus der Summe oder der Differenz dieser Zahlen zu finden. Diese Tafeln lassen sich in vielen Fällen mit Vortheil anwenden, auch ist ihr Gebrauch sehr einfach, doch kann die Theorie derselben hier nicht entwickelt werden.

Auflösung der Exponential-Gleichungen.

§. 296.

Erklärung. Unter einer Exponential-Gleichung versteht man eine Gleichung, in welcher die Unbekannte nur im Exponenten enthalten ist.

Im einfachsten Falle hat eine Exponential-Gleichung die Gestalt

$$a^x = b.$$

Diese Gleichung ist in anderer Beziehung schon in §. 278 vorgekommen.

§. 297.

Aufgabe. Eine gegebene Exponential-Gleichung aufzulösen.

Auflösung. Man nehme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung den Briggischen Logarithmus. Dadurch wird jeder Exponent in einen Factor verwandelt, und man kann also alsdann wie mit Gleichungen gewöhnlicher Art weiter verfahren.

Beispiele. 1) Es sei die Gleichung aufzulösen

$$a^x\, b^{2x} = c.$$

Durch Uebergang zu den Logarithmen erhält man

$$x \log a + 2x \log b = \log c$$

und daraus weiter

$$x (\log a + 2 \log b) = \log c$$

$$x = \frac{\log c}{\log a + 2 \log b}$$

was gesucht wurde.

2) Es sei die Gleichung aufzulösen

$$12{,}9 \,.\, 7^{3x} = \sqrt{\frac{1944}{2^x}}.$$

Durch Uebergang zu den Logarithmen erhält man

$$\log 12{,}9 + 3x \log 7 = \frac{\log 1944 - x \log 2}{2}$$

und daraus weiter

$$2 \log 12{,}9 + 6x \log 7 = \log 1944 - x \log 2$$

$$6x \log 7 + x \log 2 = \log 1944 - 2 \log 12{,}9$$

$$x (6 \log 7 + \log 2) = \log 1944 - 2 \log 12{,}9$$

$$x = \frac{\log 1944 - 2 \log 12{,}9}{6 \log 7 + \log 2}.$$

Nun gestaltet sich die numerische Rechnung wie folgt

log 1944 = 3,28870	log 7 = 0.84510
log 12,9 = 1,11059	. 6
. 2	Product 5,07060
Product 2,22118	log 2 = 0,30103
Differenz 1,06752	Summe 5,37163

1,06752 : 5,37163 = 0,19873

```
 53716
 53036
 48345
  4691
  4297
   394
   376
    18
    16
     2
```

Also ist endlich

$$x = 0{,}19873$$

was gesucht wurde.

Die letzte Division hätte man auch durch Logarithmen ausführen können, nämlich

$$\begin{aligned} \log 1{,}06752 &= 0{,}02837 \\ \log 5{,}37163 &= 0{,}73011 \\ \text{Differenz } & 0{,}29826 - 1 \end{aligned}$$

wozu die Zahl 0,198727 nahe wie vorhin.

Anmerkung. Exponential-Gleichungen, deren Seiten aus zwei oder mehreren durch + oder — verbundenen Gliedern bestehen, können vermöge des §. 295 auf diesem Wege nicht aufgelöst werden. Solche Gleichungen übersteigen die Kräfte der Elementar-Mathematik.

Beispiele zur Uebung.

§. 298.

Auffindung rationaler Logarithmen.

1) $\overset{6}{\log} 216 = 3$	2) $\overset{2}{\log} 4096 = 12$	3) $\overset{\frac{1}{5}}{\log} \frac{1}{25} = 2$
4) $\overset{\frac{2}{3}}{\log} \frac{16}{81} = 4$	5) $\overset{\frac{1}{2}}{\log} \frac{1}{32} = 5$	6) $\overset{0,5}{\log} 0{,}0625 = 4$
7) $\overset{2}{\log} \frac{1}{2} = -1$	8) $\overset{4}{\log} \frac{1}{64} = -3$	9) $\overset{\frac{2}{3}}{\log} \frac{3}{2} = -1$
10) $\overset{\frac{2}{5}}{\log} 15\frac{5}{8} = -3$	11) $\overset{2\frac{1}{3}}{\log} \frac{9}{49} = -3$	12) $\overset{\frac{3}{4}}{\log} 4\frac{52}{243} = -5$
13) $\overset{9}{\log} 3 = \frac{1}{2}$	14) $\overset{4}{\log} 32 = \frac{5}{2}$	15) $\overset{8}{\log} 4 = \frac{2}{3}$
16) $\overset{8}{\log} 16 = \frac{4}{3}$	17) $\overset{9}{\log} \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$	18) $\overset{\frac{4}{9}}{\log} 3\frac{3}{8} = -\frac{3}{2}$

Auszurechnen:

19) $\overset{0,2}{\log} 125 =$	20) $\overset{\frac{9}{16}}{\log} 4\frac{52}{243} =$	21) $\overset{3\frac{3}{8}}{\log} \frac{2}{3} =$
22) $\overset{\frac{27}{64}}{\log} 1\frac{7}{9} =$	23) $\overset{1\frac{1}{5}}{\log} \frac{5}{6} =$	24) $\overset{6,25}{\log} 0{,}064 =$

§. 299.

Logarithmen von Buchstaben-Ausdrücken. Anwendung der §§. 272 — 275.

1) $\log \frac{ab}{c} = \log a + \log b - \log c$

2) $\log (a^3 b^2) = 3 \log a + 2 \log b$

3) $\log \frac{a^2 c}{b d^3} = 2 \log a + \log c - \log b - 3 \log d$

4) $\log \frac{(ac^2)^3}{b} = 3 (\log a + 2 \log c) - \log b$

5) $\log \sqrt[4]{a^5 b^3} = \frac{5 \log a + 3 \log b}{4}$

6) $\log (a^3 \sqrt{b}) = 3 \log a + \frac{\log b}{2}$

7) $\log \sqrt[3]{\frac{a\sqrt{b}}{c^2}} = \frac{\log a + \frac{1}{2} \log b - 2 \log c}{3}$

8) $\log \frac{a^m}{\sqrt{ab^n}} = m \log a - \frac{\log a + n \log b}{2}$

Auszurechnen:

9) $\log \frac{a^2 b}{\sqrt{c}} =$ 10) $\log \left[(a^6 b^{-2})^3 \right] =$

11) $\log \left(6a^2 \sqrt[5]{\frac{a^2 b}{c^2 d}} \right) =$ 12) $\log \left[\left(a \sqrt{a \sqrt{b}}\right)^2 \right] =$

13) $\log \frac{1}{a \sqrt[4]{a^3 b}} =$ 14) $\log \left[a^{2m+1} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] =$

15) $\log \frac{a^m b^r \sqrt{c} \sqrt[3]{d}}{c^p d^q \sqrt[4]{ab}} =$ 16) $\log \sqrt{\frac{3a^2}{\sqrt{5b\sqrt{c}}}} =$

§. 300.

Berechnung von Zahlen-Ausdrücken mit Hülfe der logarithmischen Tafel.

1) $3748 \cdot 1{,}752 \cdot 40{,}65 = 266925$

2) $\frac{319 \cdot 765}{138} = 1768{,}36$

3) $\frac{213 \cdot 7{,}655}{3145 \cdot 718} = 0{,}000722067$

4) $\frac{47 \cdot 0{,}653 \cdot 12\frac{5}{6}}{3576 \cdot 1520} = 0{,}000072462$

5) $(\frac{9}{8})^{21} = 11{,}86322$

6) $0{,}877058^9 = 0{,}307083$

7) $(317\frac{3}{4})^{0,6} = 31,71402$

8) $2,358679^7 \,.\, 0,500897^{2\frac{1}{6}} = 100369,1$

9) $\sqrt[12]{3826,35} = 1,988682$

10) $\sqrt[5]{\frac{13}{16}} = 0,959322$

11) $\sqrt[9]{0,08} = 0,7553028$

12) $\sqrt[6]{(\frac{16}{17})^5 \,.\, (\frac{1}{20})^9} = 0,0106295$

13) $\sqrt[5]{2\frac{1}{3}\sqrt[4]{6}} = 1,295695$

14) $\sqrt[9]{0,8654\sqrt[7]{3,26}} = 1,0026987$

15) $\dfrac{(1\frac{1}{9})^6 \,.\, 5^{0,4}}{2\sqrt[3]{7}} = 0,9362754$

16) $\sqrt[11]{0,43\sqrt[10]{8\sqrt[7]{0,7}}} = 0,943382$

17) $\sqrt[3]{5,03 + \sqrt{0,2}} = 1,792020$

18) $\sqrt[5]{9,921 - 3\sqrt{5,02}} = 1,261866$

19) $\sqrt[8]{1,4782^3 - \sqrt[10]{0,08}} = 1,118706$

20) $(6\sqrt[7]{34} - 2\sqrt[5]{10})^7 = 645008,3$

Auszurechnen:

21) $7,9265 \,.\, 374 \,.\, 0,072901 =$

22) $640,92 : 0,94815 =$

23) $\sqrt[3]{\dfrac{66847 \,.\, 85920}{101105}} =$

24) $\sqrt{\dfrac{9,62^3 \,.\, 12,8^4}{18,11^5}} =$

25) $\dfrac{0,234^4 \,.\, \sqrt[5]{0,2}}{12^3 \,.\, \sqrt[6]{0,161}} =$

26) $\frac{\sqrt[6]{80,2349} \cdot \sqrt[8]{0,0037426}}{18,77914^2 \cdot \sqrt[9]{0,00584}} =$

27) $\frac{12,69^3 - 11,8852^2}{12,69^3 + 11,8852^2} =$

28) $\frac{872\sqrt{0,7} + \sqrt{66,92^3}}{0,0496506} =$

§. 301.

Exponential-Gleichungen.

Mit Buchstaben:

1) $a \cdot b^x = c$ Antw. $x = \frac{\log c - \log a}{\log b}$

2) $a^{3x} b^{4-x} = c^{2x-1}$ " $x = \frac{4 \log b + \log c}{\log b + 2 \log c - 3 \log a}$

3) $\sqrt[x]{ab^m} = \sqrt{c}$ " $x = \frac{2 (\log a + m \log b)}{\log c}$

4) $(a^x b^3)^x = b^{3x+2}$ " $x = \pm \sqrt{\frac{2 \log b}{\log a}}$

Mit Ziffern:

5) $3^4 \cdot 5^{6x-7} = 7^{1-x}$ " $x = 0,759965$

6) $3^{5x+7} = \sqrt[7]{5^{3x+1}}$ " $x = -1,553174$

7) $(\frac{1}{3})^{\frac{3}{x}} = (\frac{5}{7})^{\frac{9}{x}+11}$ " $x = 0,072298$

8) $\sqrt[x+1]{2} = 3^{x+2}$ " $\begin{cases} x = -0,5614215 \\ x = -2,4385785 \end{cases}$

Planimetrie.

Einleitung.

§. 1.

Erklärung. Den Gegenstand der Geometrie machen die Raumgrößen aus. Diese sind der Punkt, die Linie, die Fläche und der Körper.

Um sich von den Raumgrößen, welche die Geometrie als gegeben voraussetzt, eine deutliche Vorstellung zu machen, kann man einen doppelten Weg einschlagen.

Man kann 1) von dem Körper ausgehen. Alsdann ist die Fläche die Gränze eines Körpers, die Linie die Gränze einer Fläche, und der Punkt die Gränze einer Linie.

Man kann 2) von dem Punkt ausgehen. Alsdann ist die Linie der Weg, den ein in Bewegung gesetzter Punkt beschreibt; die Fläche der Weg, den eine in Bewegung gesetzte Linie beschreibt, vorausgesetzt, daß diese Linie nicht in sich selbst fortgeschoben wird; und der Körper der Weg, den eine in Bewegung gesetzte Fläche beschreibt, vorausgesetzt, daß diese Fläche nicht in sich selbst fortgeschoben wird.

Auf beiden Wegen zeigt sich, daß es außer den vier angegebenen Raumgrößen keine anderen geben kann. Ferner schließt man daraus: Der Körper hat drei Dimensionen oder Ausdehnungen, nämlich Länge, Breite und Dicke; die Fläche hat zwei Dimensionen,

nämlich Länge und Breite; die Linie hat eine Dimension, die Länge; und endlich der Punkt ist ohne alle Ausdehnung.

§. 2.

Erklärung. Die Linien werden eingetheilt in gerade Linien und krumme Linien.

Eine krumme Linie ist eine solche, von der kein Theil gerade ist.

Die gerade Linie ist einer strengen Erklärung nicht fähig. Euklides in seinen Elementen sagt: „Eine gerade Linie ist eine Linie, welche zwischen den in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt;" eine Erklärung, welche nach allgemeinem Zugeständniß dunkeler ist als das zu Erklärende. Verwandt mit ihr ist die Erklärung: „Eine gerade Linie ist eine Linie, deren Theile sämmtlich in einerlei Richtung liegen." Archimedes in dem Buche über die Kugel sagt: „Ich nehme an und setze als bekannt voraus, daß unter allen Linien, welche einerlei Endpunkte haben, die gerade Linie die kürzeste sei;" und daraus hat man die Erklärung gemacht: „Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten." Alle diese Erklärungen aber haben den gemeinschaftlichen Fehler, daß sie nur ein einzelnes Merkmal der geraden Linie angeben, ohne damit den Begriff der geraden Linie zu erschöpfen.

Dieser Mangel ist indessen nur mehr ein Mangel der Form, als dem Wesen nach. Der Begriff der geraden Linie ist einfach genug und jedermann klar; auch kann er nöthigenfalls zur vollen Klarheit dadurch gebracht werden, daß man sich den Begriff der krummen Linie daneben hält.

Anmerkung. Einen aus mehreren geraden Linien zusammengesetzten Zug nennt man zuweilen eine gebrochene Linie, so wie einen aus geraden und krummen Linien zusammengesetzten Zug eine gemischte Linie.

§. 3.

Erklärung. Die Flächen werden eingetheilt in ebene Flächen (oder Ebenen) und krumme Flächen.

Eine krumme Fläche ist eine solche, von der kein Theil eben ist.

Die ebene Fläche ist eben so wenig wie die gerade Linie einer strengen Erklärung fähig. Euklides sagt: „Eine Ebene ist eine

Fläche, welche zwischen den in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt." Eine andere Erklärung, welche auch schon die Griechen anführen, lautet: „Eine Ebene ist eine Fläche, in welche man nach allen Richtungen gerade Linien legen kann." Von dieser Erklärung gilt dasselbe, was von den Erklärungen der geraden Linie im vorigen §. gesagt worden ist.

§. 4.

Erklärung. Construiren heißt: Gegebene Raumgrößen zu einer vorgeschriebenen Verbindung zusammenstellen.

Das Ergebniß einer Construction führt den Namen Figur, im allgemeinsten Sinne dieses Wortes.

So z. B. construirt man einen Winkel, einen Kreis, eine Kugel rc., und der Winkel, der Kreis, die Kugel rc. sind Figuren, im weiteren Sinne dieses Wortes.

Im engeren Sinne gebraucht man das Wort Figur nur von den geschlossenen Figuren (s. unten).

§. 5.

Erklärung. Die Geometrie wird eingetheilt in die Planimetrie und die Stereometrie.

Die Planimetrie beschäftigt sich nur mit Constructionen, welche in einer Ebene ausgeführt werden können.

Die Stereometrie dagegen beschäftigt sich mit Constructionen, welche nicht in einer Ebene ausgeführt werden können.

Die Planimetrie, welche von der Ebene ihren Namen hat, construirt demnach nur mit Punkten und Linien. Die Stereometrie aber construirt mit Punkten, Linien, Flächen und Körpern, und hat von den Körpern als ihrem Hauptgegenstande ihren Namen erhalten.

§. 6.

Forderungssatz. Durch einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Ebene eine gerade Linie in diese Ebene zu legen, und dieselbe um einen in ihr angenommenen festen Punkt beliebig in dieser Ebene zu drehen.

Die beiden Forderungen, welche in diesem Satze ausgesprochen sind, bilden die Grundlage für alle Constructionen der Planimetrie. In den planimetrischen Zeichnungen gebraucht man zur Ausführung dieser beiden Forderungen das Lineal und den Zirkel.

Erster Abschnitt.

Constructionen aus zwei geraden Linien.

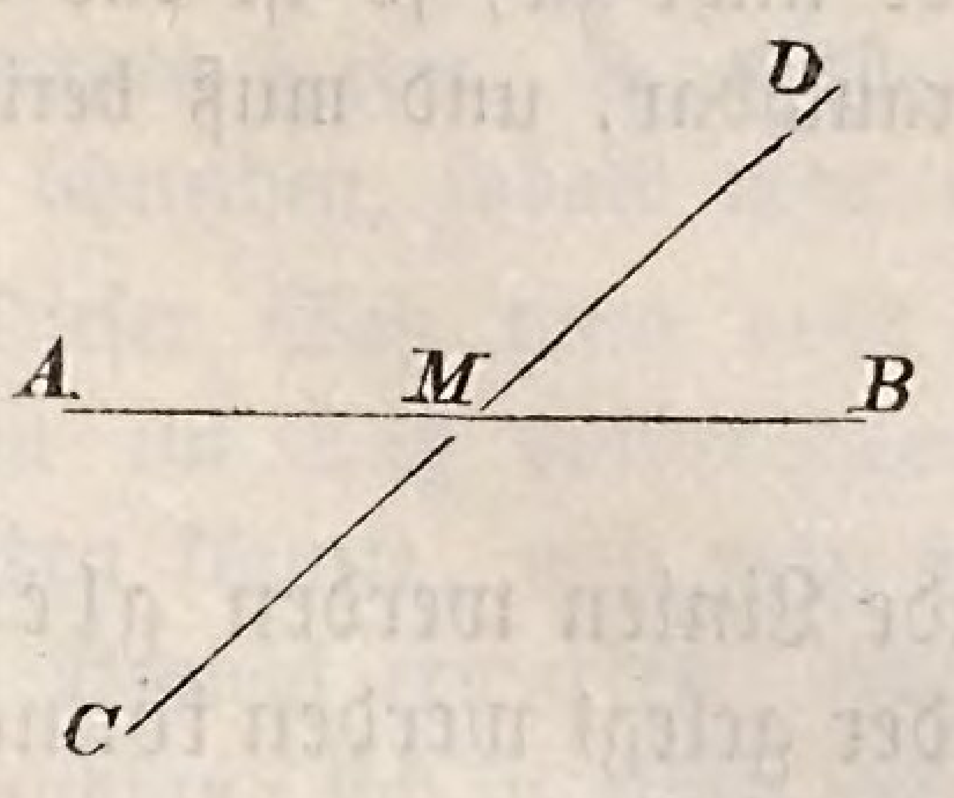
---

§. 7.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien einen Punkt mit einander gemein haben, so sagt man, sie durchschneiden einander in diesem Punkte.

Der gemeinschaftliche Punkt heißt ihr Durchschnittspunkt.

Fig. 3.



Z. B. die beiden geraden Linien *AB* und *CD*, Fig. 3, durchschneiden einander im Punkte *M*, und dieser Punkt *M* ist ihr Durchschnittspunkt.

Die gegebenen geraden Linien müssen hier fortwährend als unbegränzt lang gedacht werden, so lange nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

§. 8.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien ihrer ganzen Erstreckung nach zusammenfallen, so sagt man, sie decken einander.

Wenn man eine der beiden geraden Linien *AB* und *CD*, Fig. 3

um den Durchschnittspunkt M, als festen Punkt, hinreichend drehet, so wird man leicht den Fall hervorbringen, wo eine Deckung der beiden geraden Linien eintritt.

§. 9.

Grundsatz. Jede zwei gerade Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, decken einander.

Man spricht diesen Grundsatz auch so aus: Zwischen zwei gegebenen Punkten kann nur Eine gerade Linie gezogen werden. Das heißt aber nichts anderes als: Jede andere gerade Linie, welche man durch dieselben zwei gegebenen Punkte legen mag, muß nothwendig mit der ersten zusammenfallen.

Dieser Satz kann nicht bewiesen werden, weil noch keine vorausgegangenen Sätze da sind, auf welche der Beweis sich stützen könnte.

Anmerkung. Aus dem vorstehenden Satze kann man ein praktisches Verfahren ableiten, um die Richtigkeit eines Lineals zu prüfen, welches zum Zeichnen gerader Linien verwandt werden soll. Wenn man nämlich längs der Kante des Lineals auf einer ebenen Fläche eine Linie zieht, und darauf dieselbe Kante des Lineals auf der entgegengesetzten Seite der gezogenen Linie so an diese Linie legt, daß sie zwei Punkte mit derselben gemein hat, so muß die Kante ihrer ganzen Erstreckung nach mit der gezogenen Linie zusammenfallen. Trifft diese Probe nicht zu, so ist das Lineal zum Zeichnen gerader Linien unbrauchbar, und muß berichtigt werden.

§. 10.

Erklärung. Zwei begränzte gerade Linien werden gleich lang genannt, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß ihre Endpunkte gegenseitig zusammenfallen.

Im entgegengesetzten Falle ist die eine der beiden Linien die größere und die andere die kleinere.

Die hier angezeigte Untersuchung, ob zwei gegebene begränzte gerade Linien gleich lang sind oder nicht, wird in den planimetrischen Zeichnungen durch den Zirkel oder durch Anlegung eines

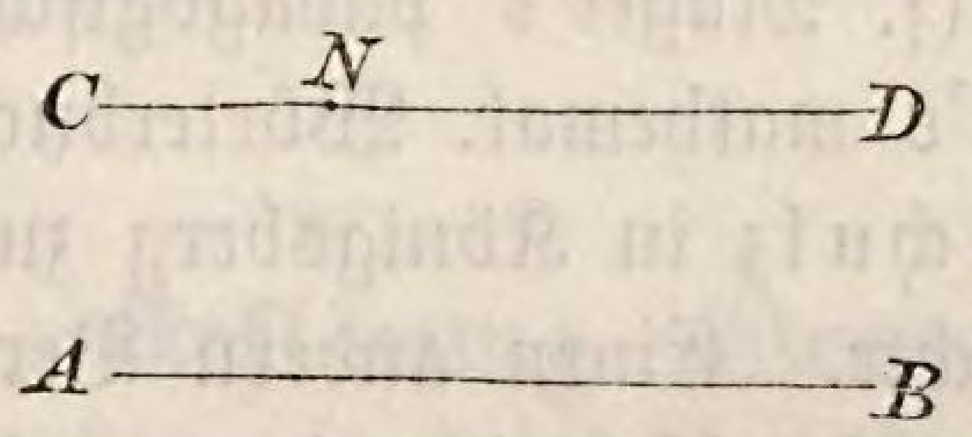
Maßstabes ausgeführt. Ueberhaupt beruhet auf ihr alles Messen gerader Linien, wovon unten weiter die Rede sein wird.

§. 11.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien, so weit sie auch verlängert werden mögen, keinen Punkt mit einander gemein haben, so werden sie parallel genannt.

Z. B. wenn man zu einer gegebenen geraden Linie *AB*, Fig. 4., durch einen gegebenen Punkt *N* sich eine zweite gerade Linie *CD* so gelegt denkt, daß beide Linien niemals zusammentreffen, so weit man sie auch verlängern mag, so sind diese Linien parallel.

Fig. 4.



Das Wort „parallel" ist aus der griechischen Sprache genommen und bedeutet „neben einander." Im Deutschen gebraucht man dafür auch das Wort „gleichlaufend."

Man schreibt $AB \parallel CD$.

§. 12.

Grundsatz. Zu einer gegebenen geraden Linie kann durch einen gegebenen Punkt nur Eine Parallele gelegt werden.

Oder wenn man in Fig. 4, wo $AB \parallel CD$ vorausgesetzt wird, die gerade Linie *CD* um den in ihr enthaltenen Punkt *N* nur um ein Geringes drehet, so wird sie nothwendig die andere gerade Linie *AB* schneiden, sobald man nur beide Linien hinreichend verlängert.

Dieser Satz kann nicht bewiesen werden. Zwar ist im §. 9 schon ein Satz vorhergegangen, auf welchen der Beweis gestützt werden könnte, und man sollte deshalb streng genommen hier einen Beweis erwarten, wodurch der vorstehende Satz aus einem Grundsatze sich in einen Lehrsatz verwandeln würde. Es muß aber offen eingestanden werden, daß ein solcher Beweis sich nicht geben läßt. So lange eine Geometrie als Wissenschaft existirt, hat auch der Begriff der parallelen Linien immer einen eigenthümlichen Grundsatz nöthig gemacht. Andere haben diesen Grundsatz unter anderer Gestalt gegeben; aber alle Versuche, einen Grundsatz zu vermeiden, sind bis jetzt vergeblich gewesen, so oft auch seit den Zeiten Euklid's

solche Versuche sich wiederholt haben: Die Planimetrie bedarf demnach zu ihrer Begründung zweier Grundsätze.

Eine ähnliche Erscheinung wiederholt sich in der Grundlegung der Stereometrie.

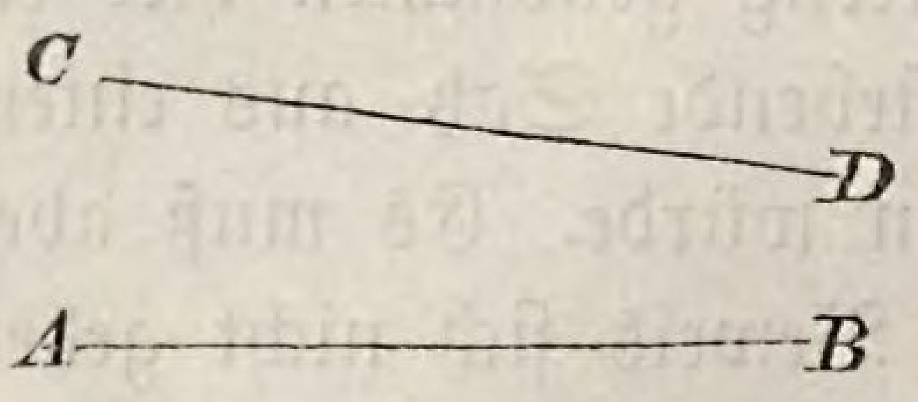
Anmerkung. Unter den zahlreichen Versuchen, die Lehre von den Parallelen ohne einen ihr eigenthümlichen Grundsatz zu begründen, darf als der gelungenste wohl derjenige von Bertrand angesehen werden, welchen dieser in einem im Jahre 1778 zu Genf erschienenen Werke **Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques** mittheilt (s. Mager's pädagogische Revue, Bd. X. Seite 489). In Klügel's mathemat. Wörterbuch wird diese Erfindung dem Hofprediger Schulz in Königsberg zugeschrieben, welcher sie 1784 veröffentlichte. Einen andern Versuch, welchen Montucla in seiner **Histoire des Mathématiques** als den vorzüglichsten rühmt, hat der persische Mathematiker Nassir-Eddin, welcher um das Jahr 1260 nach C. G. der Sternwarte zu Meragha vorstand, in einem arabisch geschriebenen Commentar über den Euklides gegeben. Doch darf man, nach dem zu urtheilen, was Kästner in seiner Geschichte der Mathematik davon mittheilt, sich nicht zu viel von diesem Versuche versprechen.

§. 13.

Erklärung Von zwei geraden Linien, welche gehörig verlängert in einem Punkte zusammentreffen, sagt man, sie convergiren nach diesem Punkte hin, und sie divergiren nach der entgegengesetzten Richtung.

Z. B. die beiden geraden Linien *AB* und *CD*, Fig. 5, welche über *B* und *D* hinaus hinreichend verlängert sich in einem gewissen außerhalb der Zeichnung liegenden Punkte treffen, convergiren nach *B* und *D* hin, und sie divergiren nach *A* und *C* hin.

Fig. 5.



Wird die Verlängerung der beiden Linien wirklich ausgeführt, so hat man wieder den Fall §. 7.

Der Winkel.

§. 14.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche von einem Punkte aus unbegränzt fortgeht, wird ein Strahl genannt.

Der Ausgangspunkt mehrerer Strahlen heißt ein Strahlenpunkt.

So stellt z. B. die Fig. 3, §. 7, vier Strahlen dar, *MA*, *MB*, *MC* und *MD*, welche von dem Punkte *M*, als Strahlenpunkt, ausgehen.

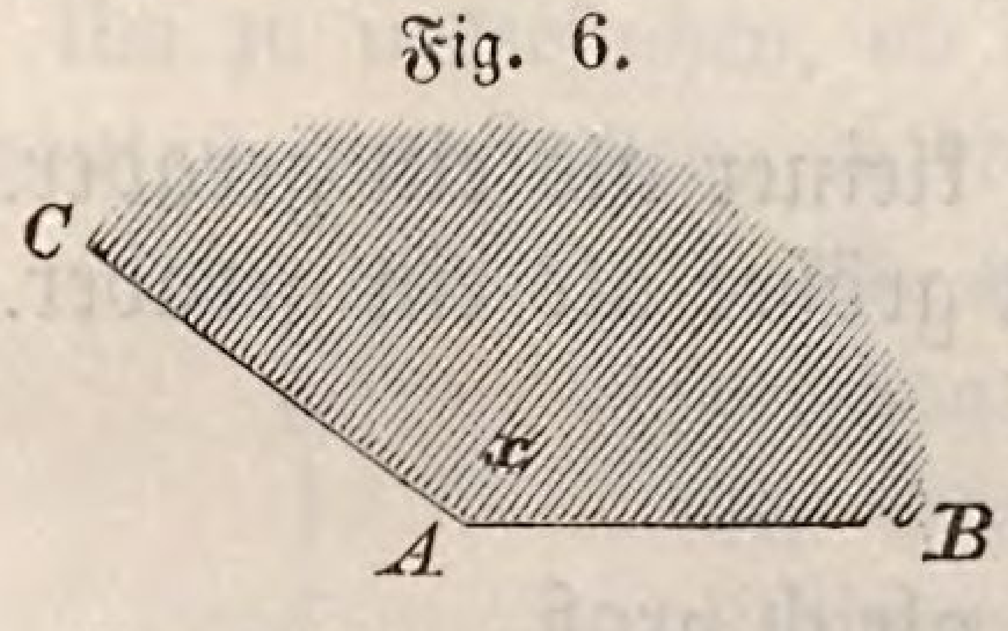
§. 15.

Erklärung. Wenn von einem Punkte zwei Strahlen ausgehen, so wird der durch diese Strahlen begränzte Theil der Ebene ein Winkel genannt.

Die beiden Strahlen heißen die Schenkel des Winkels, der Strahlenpunkt der Scheitelpunkt des Winkels, und der begränzte Theil der Ebene selbst wird, im Gegensatz gegen seine Begränzung, die Winkelfläche genannt.

Z. B. in dem Winkel, welchen Fig. 6 darstellt, sind *AB* und *AC* die beiden Schenkel des Winkels, der Punkt *A* ist der Scheitelpunkt des Winkels, und der durch Schraffirung bedeckte Theil der Ebene, in welchem der Buchstabe *x* steht, ist die Winkelfläche dieses Winkels.

Fig. 6.



Im Schreiben bezeichnet man diesen Winkel durch $\angle BAC$ oder $\angle CAB$, wo der am Scheitelpunkt stehende Buchstabe *A* immer in die Mitte gestellt werden muß; oder auch kürzer durch $\angle x$.

Anmerkung. Euklides erklärt den Winkel als die Neigung zweier geraden Linien; Andere erklären ihn als den Richtungsunterschied zweier geraden Linien. Doch ist weder die Neigung, noch der Richtungsunterschied ein hinreichend deutlicher Begriff, vielmehr wird ein solcher erst durch Zuziehung der zwischen den Schenkeln enthaltenen Winkelfläche, wie oben geschehen, zu Stande gebracht.

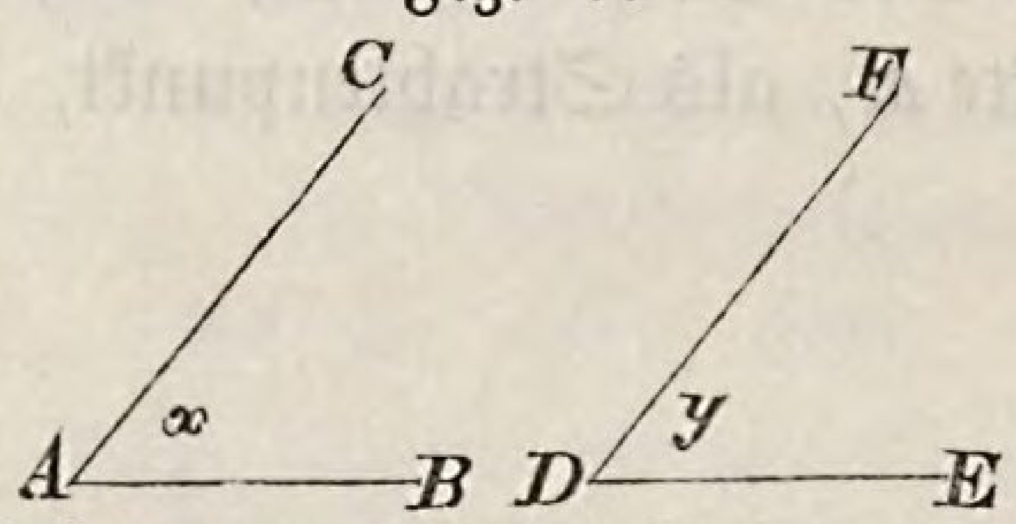
§. 16.

Erklärung. Zwei Winkel werden gleich groß genannt, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sie in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen.

Im entgegengesetzten Falle ist der eine Winkel der größere und der andere der kleinere.

Um zu untersuchen, ob zwei gegebene Winkel x und y, Fig. 7, gleich groß sind, verfahre man auf folgende Weise. Man lege die beiden Winkel mit ihren Winkelflächen so auf einander, daß der Scheitelpunkt D des Winkels y auf den Scheitelpunkt A des Winkels x, und zugleich der Schenkel DE des Winkels y auf den Schenkel AB des Winkels x fällt. Wenn alsdann auch der zweite Schenkel DF des Winkels y mit dem zweiten Schenkel AC des Winkels x zusammenfällt, so decken beide Winkel einander und es ist $\angle x = \angle y$.

Fig. 7.



§. 17.

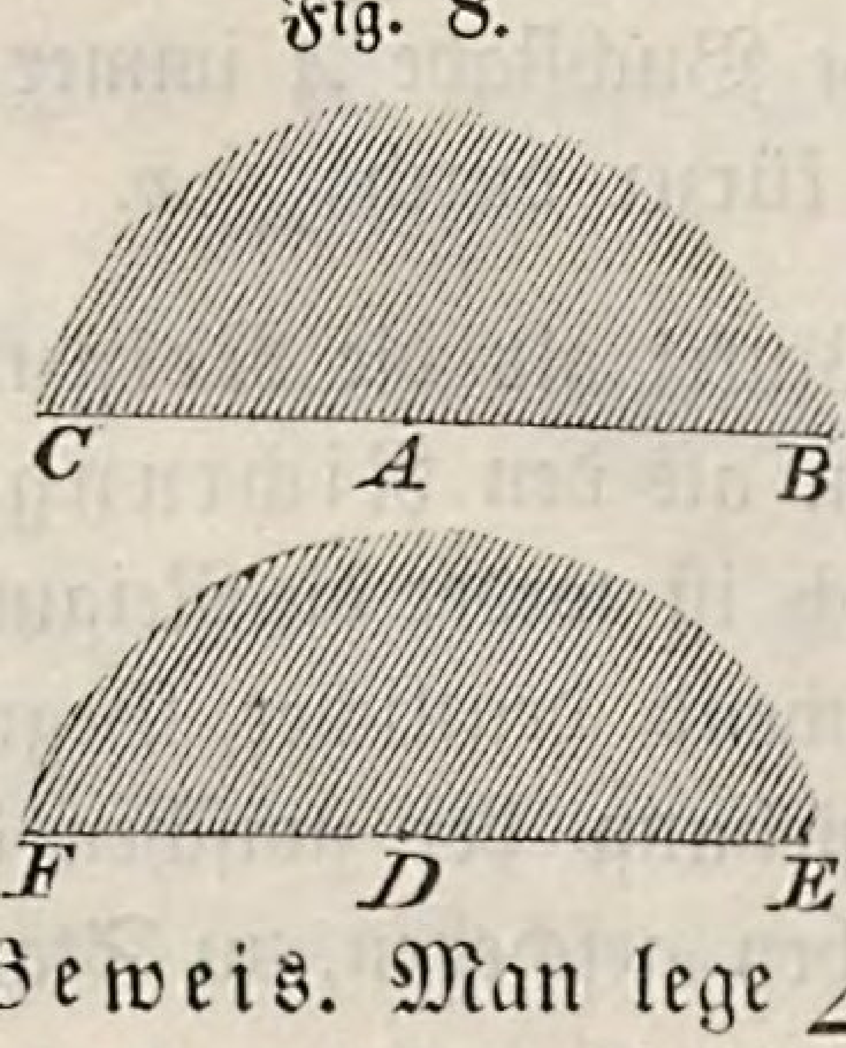
Erklärung. Ein Winkel, dessen zwei Schenkel eine unbegränzte gerade Linie bilden, wird ein gerader Winkel genannt.

Ein hohler (concaver) Winkel ist kleiner als ein gerader.
Ein erhabener (convexer) Winkel ist größer als ein gerader.

§. 18.

Lehrsatz. Alle geraden Winkel sind gleich groß.

Fig. 8.



Voraussetzung:

$\angle CAB$ und $\angle FDE$ sind gerade Winkel.

Folgerung:

$\angle CAB = \angle FDE$.

Beweis. Man lege $\angle FDE$ so auf $\angle CAB$, daß der Scheitelpunkt D auf den Scheitelpunkt A, und der Schenkel DE auf den Schenkel AB fällt. Alsdann muß, nach dem Grundsatze §. 9, auch

der Schenkel *DF* auf den Schenkel *AC* fallen. Folglich sind, nach der Erklärung §. 16, die beiden Winkel *CAB* und *FDE* gleich groß, was zu beweisen war.

§. 19.

Erklärung. Zwei hohle Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben und deren andere Schenkel eine unbegränzte gerade Linie bilden, werden Nebenwinkel genannt.

§. 20.

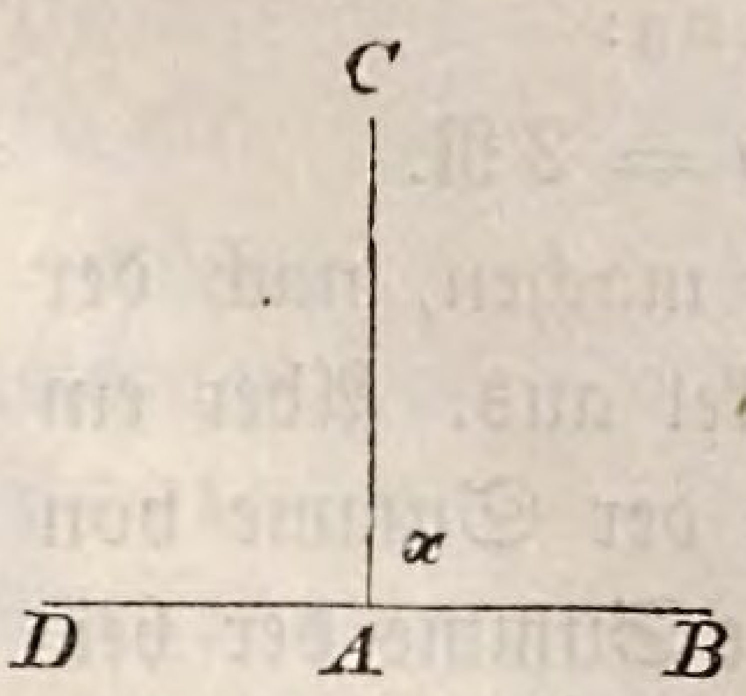
Erklärung. Ein Winkel, welcher seinen Nebenwinkel gleich ist, heißt ein rechter Winkel.

Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein rechter. Ein stumpfer Winkel ist größer als ein rechter und zugleich kleiner als ein gerader Winkel. Spitze und stumpfe Winkel werden mit einem gemeinschaftlichen Namen schiefe Winkel genannt.

Unter einem Perpendikel versteht man eine gerade Linie, welche eine andere rechtwinkelig schneidet, und unter einer geneigten Linie versteht man eine gerade Linie, welche eine andere schiefwinkelig schneidet.

Um zu untersuchen, ob ein gegebener Winkel ein rechter sei, hat man zu untersuchen, ob er seinem Nebenwinkel gleich sei. Es sei z. B. x, Fig. 9, der gegebene Winkel. Man verlängere den einen Schenkel desselben, *AB*, über den Scheitelpunkt *A* hinaus nach *D*, wodurch der Nebenwinkel *CAD* des gegebenen Winkels x entsteht. Sodann lege man den Winkel x so auf seinen Nebenwinkel, daß *A* auf *A*, und *AB* auf *AD* fällt. Wenn dabei *AC* wieder mit sich selbst zusammenfällt, so ist der Winkel x seinem Nebenwinkel gleich, folglich nach der vorstehenden Erklärung ein rechter Winkel.

Fig. 9.



Man schreibt abgekürzt $\angle x = R$. Auch $AC \perp BD$.

Anmerkung. Von dem hier angezeigten Verfahren kann man eine praktische Anwendung machen, um die Richtigkeit des hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks zu prüfen, welches zum Zeichnen rechter Winkel gebraucht werden soll.

§. 21.

Lehrsatz. Alle rechten Winkel sind gleich groß.

Beweis. Nach dem Lehrsatze §. 18 sind alle geraden Winkel gleich groß. Nach der Erklärung §. 20 aber ist jeder rechte Winkel die Hälfte eines geraden Winkels. Folglich sind auch alle rechten Winkel, als Hälften gleich großer Winkel, gleich groß, was zu beweisen war.

§. 22.

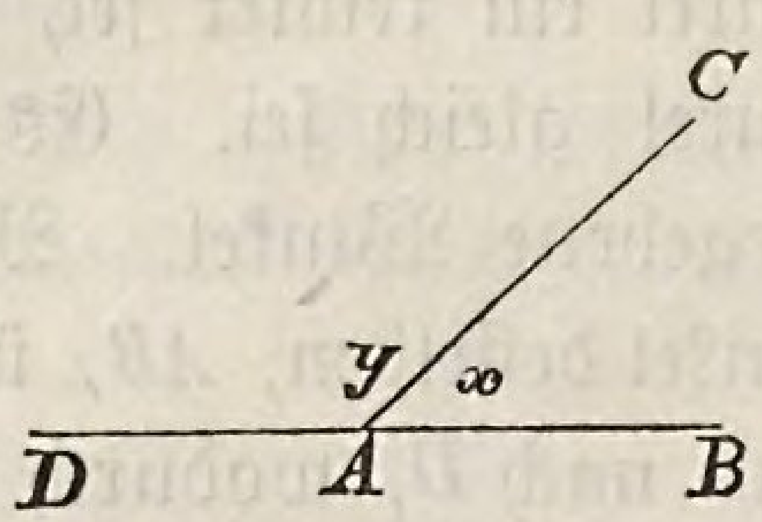
Zusatz. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen geraden Linie ist nur Ein Perpendikel auf dieser geraden Linie möglich.

So kann z. B. auf der geraden Linie *DB*, Fig. 9. außer dem Perpendikel *AC* kein zweites Perpendikel in demselben Punkte *A* errichtet werden.

§. 23.

Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 10.



Voraussetzung:

$\angle x$ und $\angle y$ sind Nebenwinkel.

Folgerung:

$\angle x + \angle y = 2$ R.

Beweis. Die beiden Nebenwinkel x und y machen, nach der Erklärung §. 19, zusammen einen geraden Winkel aus. Aber ein gerader Winkel ist, nach der Erklärung §. 20, der Summe von zwei rechten Winkeln gleich. Folglich ist auch die Summe der beiden Nebenwinkel x und y der Summe von zwei rechten Winkeln gleich, was zu beweisen war.

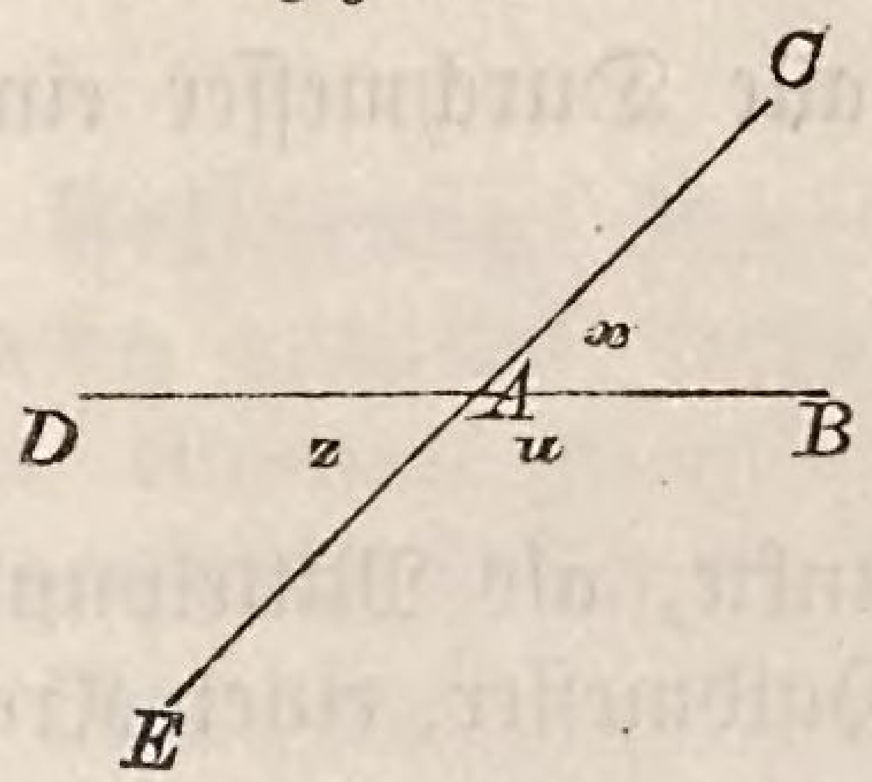
§. 24.

Erklärung. Zwei hohle Winkel von solcher Lage, daß die Schenkel des einen Winkels die Verlängerungen von den Schenkeln des anderen sind, werden Scheitelwinkel genannt.

§. 25.

Lehrsatz. Jede zwei Scheitelwinkel sind gleich groß.

Fig. 11.



Voraussetzung:

$\angle x$ und $\angle z$ sind Scheitelwinkel.

Folgerung:

$\angle x = \angle z$.

Beweis. Man nehme einen dritten Winkel, $\angle u$, zu Hülfe· so hat man nach §. 23

$$\angle x + \angle u = 2\,\mathfrak{R}$$
$$\angle z + \angle u = 2\,\mathfrak{R}.$$

Da nun, wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, diese auch einander gleich sein müssen, so folgt weiter

$$\angle x + \angle u = \angle z + \angle u.$$

Und wenn man von diesen beiden gleichen Summen den gleichen Bestandtheil $\angle u$ subtrahirt, so muß Gleiches übrig bleiben, also

$$\angle x = \angle z,$$

was zu beweisen war.

Der Kreis.

§. 26.

Erklärung. Der Kreis ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem gewissen festen Punkte, welcher der Mittelpunkt heißt, gleichen Abstand haben.

Wenn man den Kreis seiner ganzen Erstreckung nach bezeichnen will, so nennt man ihn Kreis-Umfang oder Kreis-Peripherie. Jeder durch zwei Punkte begränzte Theil des Kreises dagegen heißt ein Kreisbogen.

Unter dem Halbmesser oder Radius eines Kreises versteht man eine begränzte gerade Linie, welche den Mittelpunkt mit irgend einem Punkt der Peripherie verbindet. Unter dem Durchmesser oder Diameter eines Kreises versteht man eine begränzte gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Peripherie mit einander verbindet.

Der Kreis ist eine krumme Linie, und zwar die einzige krumme Linie, welche in der Elementar-Geometrie betrachtet wird.

Man bezeichnet das Wort Kreis abgekürzt durch ○.

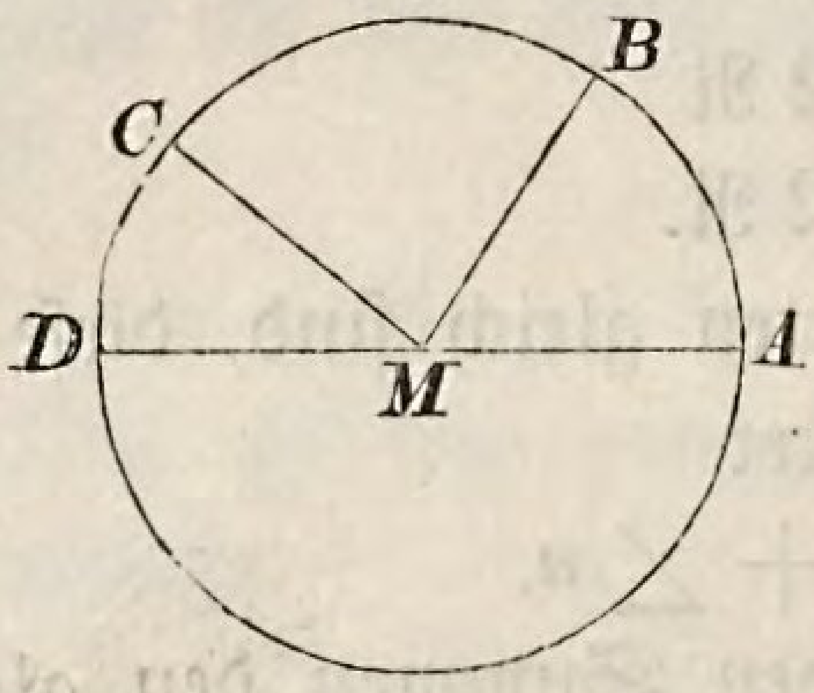
§. 27.

Zusatz. Alle Halbmesser, so wie alle Durchmesser eines Kreises sind gleich lang.

§. 28.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte, als Mittelpunkt, mit einer gegebenen geraden Linie, als Halbmesser, einen Kreis zu construiren.

Fig. 12.



Gegeben:

M als Mittelpunkt,

MA als Halbmesser.

Gesucht:

○ aus *M* mit *MA*.

Construction. Man drehe die gerade Linie *MA* um den festen Endpunkt *M*, so daß sie nach und nach die Lagen *MB*, *MC* *MD*, ꝛc. annimmt, bis dahin, wo sie wieder in ihre anfängliche Lage *MA* gelangt. Der Weg, welchen dabei der andere Endpunkt *A* der geraden Linie *MA* beschreibt, ist der gesuchte Kreis.

In den planimetrischen Zeichnungen wird diese Construction mit Hülfe des Zirkels ausgeführt.

Die geraden Linien *MA*, *MB*, *MC*, ꝛc. sind Halbmesser des entstandenen Kreises. Die gerade Linie *AD*, welche durch den Mittelpunkt *M* des Kreises geht, ist ein Durchmesser des Kreises. Die Abschnitte *AB*, *BC*, *CD*, sind Kreisbögen.

§. 29.

Zusatz. Wenn zwei oder mehrere gegebene Punkte von einem gewissen festen Punkte gleiche Abstände haben, so läßt sich durch jene Punkte eine Kreis-Peripherie legen, von welcher dieser feste Punkt der Mittelpunkt ist.

Z. B. wenn die Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, Fig. 12, gegeben sind, welche von dem festen Punkte *M* gleiche Abstände $MA = MB = MC = MD$ haben, so kann man aus diesem Punkte *M*, als Mittelpunkt, einen

Kreis construiren, welcher zugleich durch alle die gegebenen Punkte A, B, C, D geht.

§. 30.

Erklärung. Zwei Kreisbögen eines Kreises werden gleich lang genannt, wenn sie ihrer ganzen Ausdehnung nach so auf einander gelegt werden können, daß auch ihre Endpunkte gegenseitig zusammenfallen.

Im entgegengesetzten Falle ist der eine Kreisbogen der größere und der andere der kleinere.

§. 31.

Erklärung. Jede Kreis-Peripherie wird in 360 gleiche Theile getheilt und ein solcher Theil ein Grad genannt. Den Grad theilt man weiter in 60 Minuten, und die Minute in 60 Secunden.

Man schreibt: Grad (^{o}), Minuten ($'$), Secunden ($''$). So hat der Halbkreis 180^{o}, der Viertelkreis oder Quadrant 90^{o}, 2c.

Diese Eintheilung der Kreis-Peripherie ist uralt, und findet sich schon bei den Chaldäern und den Aegyptern, vor der Zeit der Griechen. Ihre Entstehung hängt vermuthlich mit der Länge des Sonnenjahrs zusammen, welche in den ältesten Zeiten nur ungenau bekannt sein konnte. Nimmt man nämlich wie bei den alten Aegyptern, vor dem Einfalle der Hyksos, die Dauer des Jahrs zu 360 Tagen an, und setzt überdies voraus, daß die Sonne sich gleichförmig im Aequator fortbewege, so beträgt der Weg, um welchen die Sonne von einem Tage zum andern fortrückt, genau den 360sten Theil des Kreis-Umfangs, oder einen Grad (gradus, Schritt). In der Wirklichkeit ist aber der scheinbare tägliche Weg der Sonne bald etwas größer, bald etwas geringer als ein Grad.

In der französischen Revolution wurde eine neue Eintheilung des Kreises vorgenommen, indem man die Kreis-Peripherie zu 400 oder den Quadranten zu 100 Graden, den Grad zu 100 Minuten, und die Minute zu 100 Secunden annahm. Man findet diese Eintheilung noch in Werken jener Zeit; sie ist aber niemals vollständig in den Gebrauch gekommen.

Die Wörter: Minute und Secunde, sind entstanden aus minuta

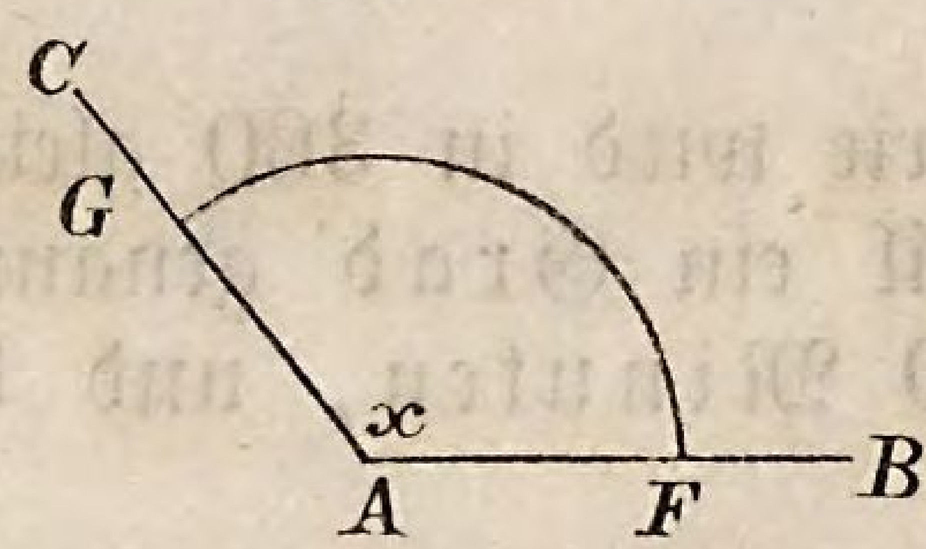
prima und minuta secunda, sc. pars, und werden bekanntlich auch bei den Unterabtheilungen der Zeit gebraucht.

§. 32.

Erklärung. Ein Winkel wird gemessen, indem man aus seinem Scheitelpunkt, als Mittelpunkt, zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen construirt, und die Länge dieses Kreisbogens in Graden, Minuten und Secunden ausdrückt.

Z. B. um den Winkel *BAC* oder x, Fig. 13, zu messen, construire man aus dem Scheitelpunkt *A* zwischen den Schenkeln dieses Winkels mit einem beliebigen Halbmesser *AF* einen Kreisbogen *FG*. Die Anzahl Grade, Minuten und Secunden, welche dieser Kreisbogen *FG* enthält, giebt die Größe des Winkels *BAC* oder x an.

Fig. 13.



So hat der gerade Winkel gleich wie der Halbkreis 180°; der rechte Winkel gleich wie der Quadrant 90°; der Winkel, welchen die beiden Zeiger einer Taschenuhr 23 Minuten nach 12 Uhr mit einander einschließen, beträgt 126° 30′; ꝛc.

Die Messung der Winkel durch Kreisbögen soll zuerst Thales um das Jahr 600 vor Christi Geburt eingeführt haben.

Zweiter Abschnitt.

Von den Parallelen.

---

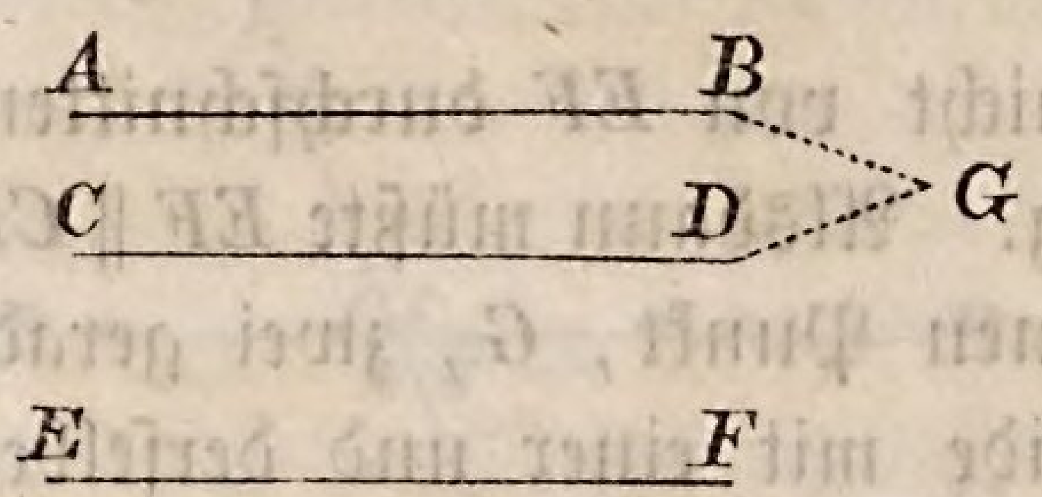
§. 33.

Lehrsatz*). Wenn zwei gerade Linien einer dritten parallel sind, so sind sie auch einander parallel.

---

*) Hier sind zuvor die §§. 11 und 12 zu wiederholen.

Fig. 14.



Voraussetzung:

$AB \parallel EF$

$CD \parallel EF$.

Folgerung:

$AB \parallel CD$.

Beweis. Man muß nachweisen, daß die beiden geraden Linien *AB* und *CD*, so weit sie auch verlängert werden mögen, keinen Punkt mit einander gemein haben (§. 11.). Dieses geschieht indirect wie folgt.

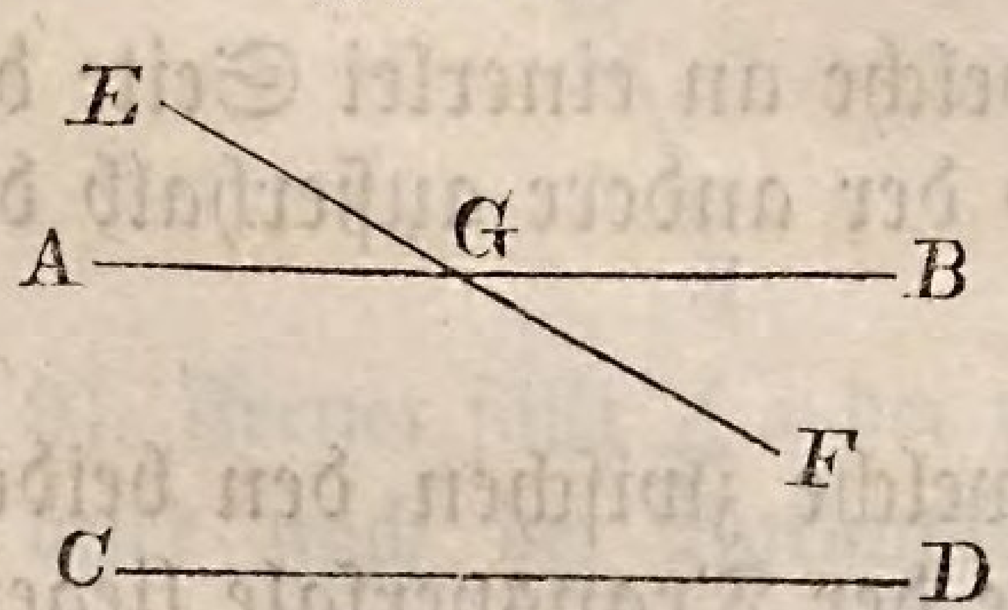
Gesetzt die beiden geraden Linien *AB* und *CD* träfen hinreichend verlängert in einem Punkte *G* zusammen. Alsdann würden durch Einen Punkt, *G*, zwei gerade Linien *AB* und *CD* gehen, welche beide (nach der Voraussetzung) mit einer und derselben geraden Linie *EF* parallel wären. Dies widersteitet aber dem Grundsatz §. 12. Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn die beiden geraden Linien *AB* und *CD* keinen Punkt mit einander gemein haben; d. h. sie sind parallel, w. z. b. w.

Anmerkung. Unter einem indirecten oder apagogischen Beweise versteht man einen Beweis, in welchem gezeigt wird, daß die Annahme, der zu beweisende Satz sei unwahr, auf einen Widerspruch führt. Damit dieser Widerspruch aufgehoben werde, folgt sodann die Wahrheit des zu beweisenden Satzes von selbst. Ein indirecter Beweis kann immer mit den Worten angefangen werden: Gesetzt, der zu beweisende Satz sei unwahr ꝛc.

§. 34.

Lehrsatz. Wenn eine von zwei Parallelen von einer dritten geraden Linie durchschnitten wird, so wird auch die andere Parallele von dieser dritten geraden Linie durchschnitten.

Fig. 15.



Voraussetzung:

$AB \parallel CD$,

AB durchschnitten von *EF*.

Folgerung:

CD durchschnitten von *EF*.

Beweis. Man kann wieder indirect beweisen wie folgt.

Gesetzt die gerade Linie *CD* werde nicht von *EF* durchschnitten, so weit man auch beide verlängern mag. Alsdann müßte *EF* || *CD* sein (§. 11). Also würden durch Einen Punkt, *G*, zwei gerade Linien *AB* und *EF* gehen, welche beide mit einer und derselben geraden Linie *CD* parallel wären. Dies widerstreitet aber dem Grundsatze §. 12.

Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn *CD* und *EF* einander schneiden, w. z. b. w.

§. 35.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche zwei oder mehrere andere gerade Linien durchschneidet, wird eine Transversale dieser geraden Linien genannt.

So ist, in Folge des vorigen Lehrsatzes, die gerade Linie *EF*, Fig. 15, eine Transversale der beiden geraden Linien *AB* und *CD*.

§. 36.

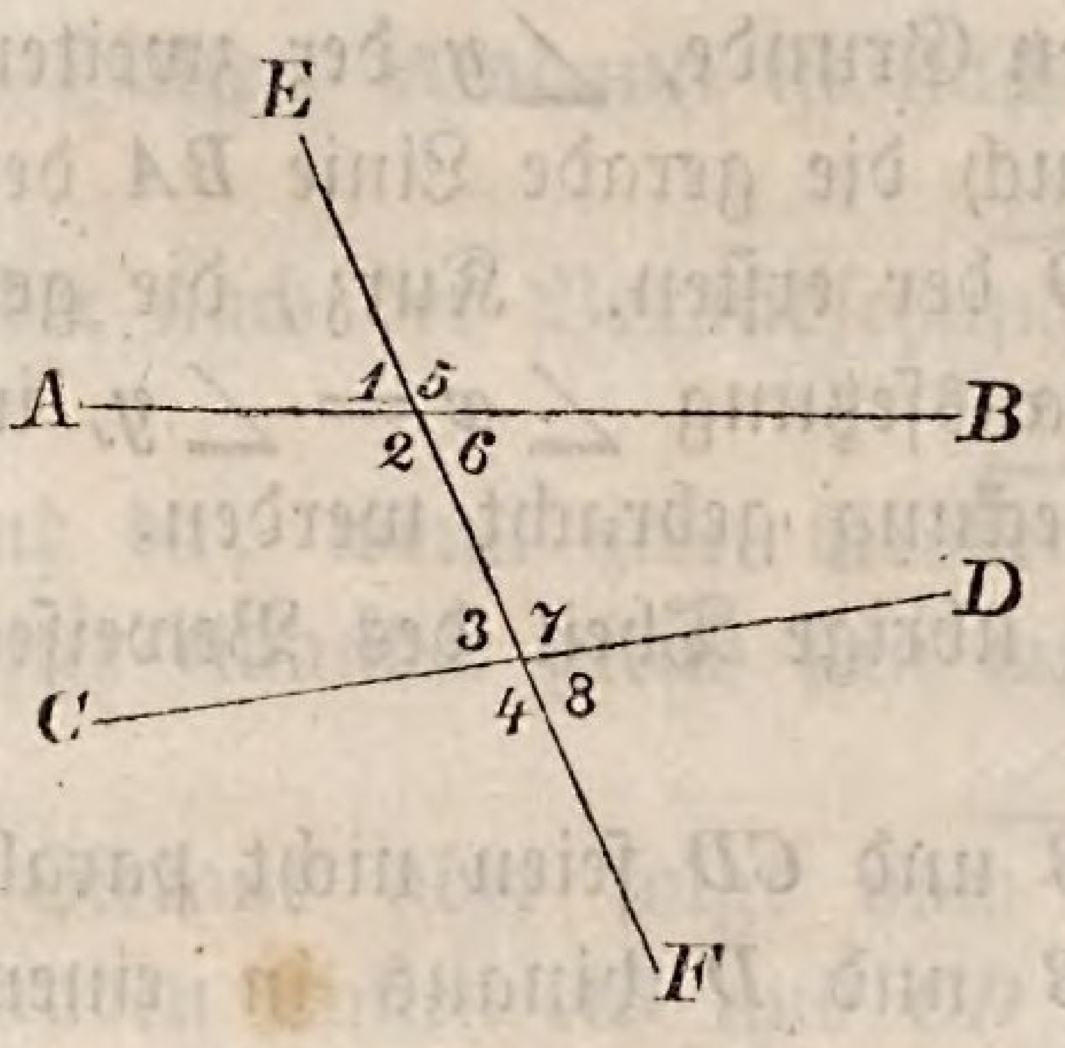
Erklärung. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale geschnitten werden, so werden gewisse Winkelpaare, von denen der eine Winkel an dem einen Durchschnittspunkte und der andere Winkel an dem anderen Durchschnittspunkte seinen Scheitelpunkt hat, mit eigenen Namen benannt. Nämlich:

Wechselwinkel sind Winkel, welche zwischen den beiden geraden Linien und an verschiedenen Seiten der Transversale liegen.

Gegenwinkel sind Winkel, welche an einerlei Seite der Transversale, der eine zwischen und der andere außerhalb der beiden geraden Linien liegen.

Innenwinkel sind Winkel, welche zwischen den beiden geraden Linien und an einerlei Seite der Transversale liegen.

Fig. 16.

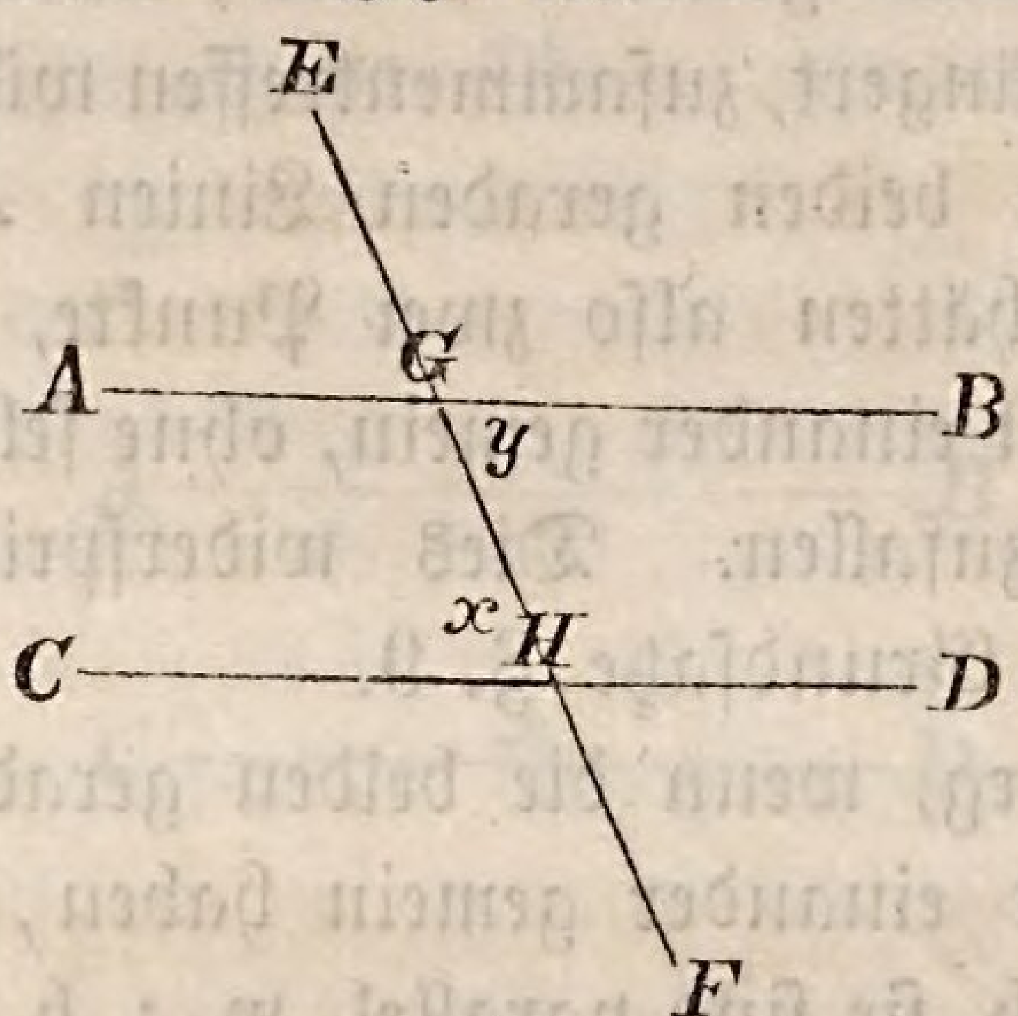


z. B. in Fig. 16, wo die Transversale *EF* die beiden geraden Linien *AB* und *CD* schneidet, sind Wechselwinkel die Winkel 2 und 7, ebenso 3 und 6. Ferner Gegenwinkel die Winkel 1 und 3, 2 und 4, 5 und 7, 6 und 8. Endlich Innenwinkel die Winkel 2 und 3, und ebenso 6 und 7.

§. 37.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel gleich groß sind, so sind die beiden geraden Linien parallel.

Fig. 17.



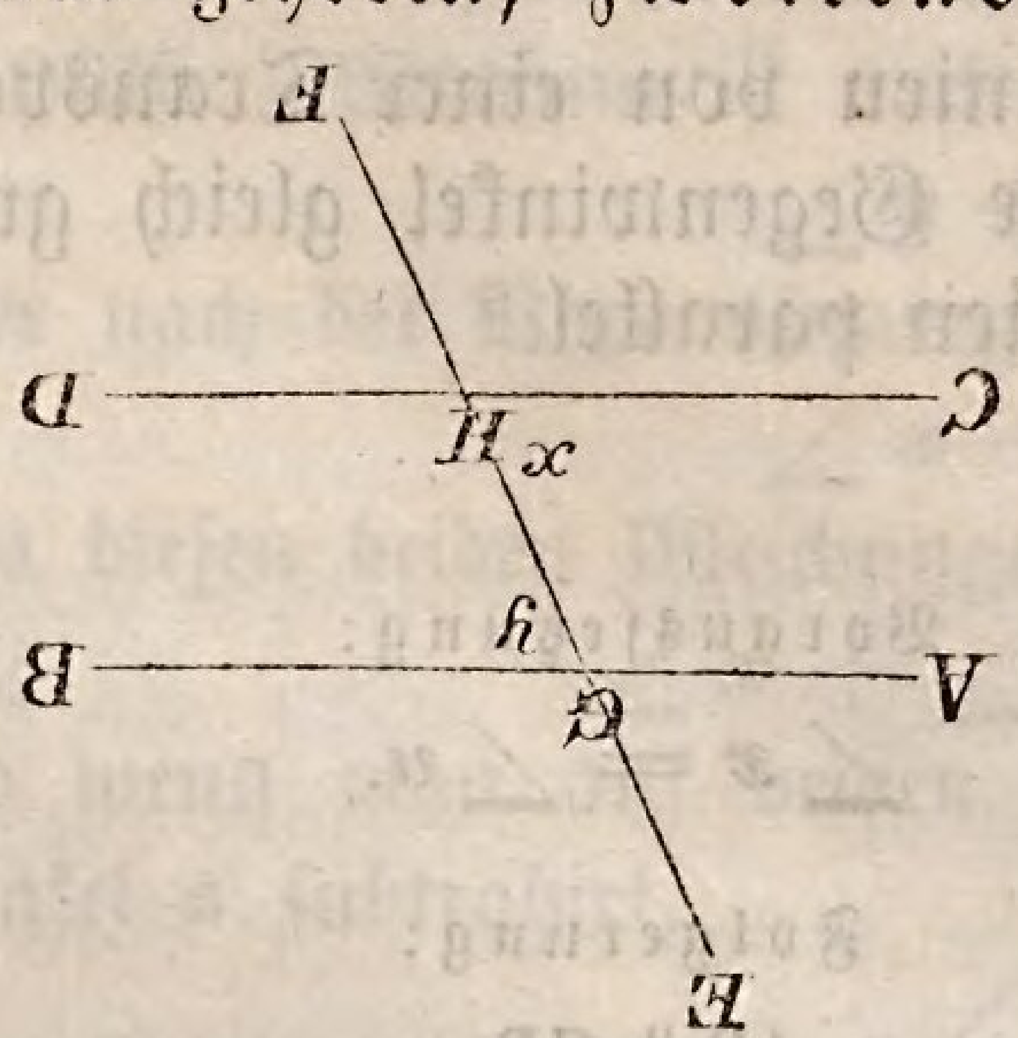
Voraussetzung:

$\angle x = \angle y$

Folgerung:

$AB \parallel CD.$

Beweis. 1) Man denke sich die Fig. 17 erstens von ihrer Stelle gehoben, zweitens umgedrehet (so wie es die nebenstehende Figur zeigt), und endlich drittens so wieder niedergelegt, daß der Punkt *H* der zweiten Figur auf *G* der ersten, und der Punkt *G* der zweiten Figur auf *H* der ersten fällt. Sodann fällt die Transversale *FE* der zweiten Figur mit der Transversale *EF* der ersten Figur ihrer ganzen Erstreckung nach zusammen (§. 9). Ferner fällt $\angle x$ der zweiten Figur auf $\angle y$ der ersten Figur, da beide nach der Voraussetzung gleich groß sind; folglich auch

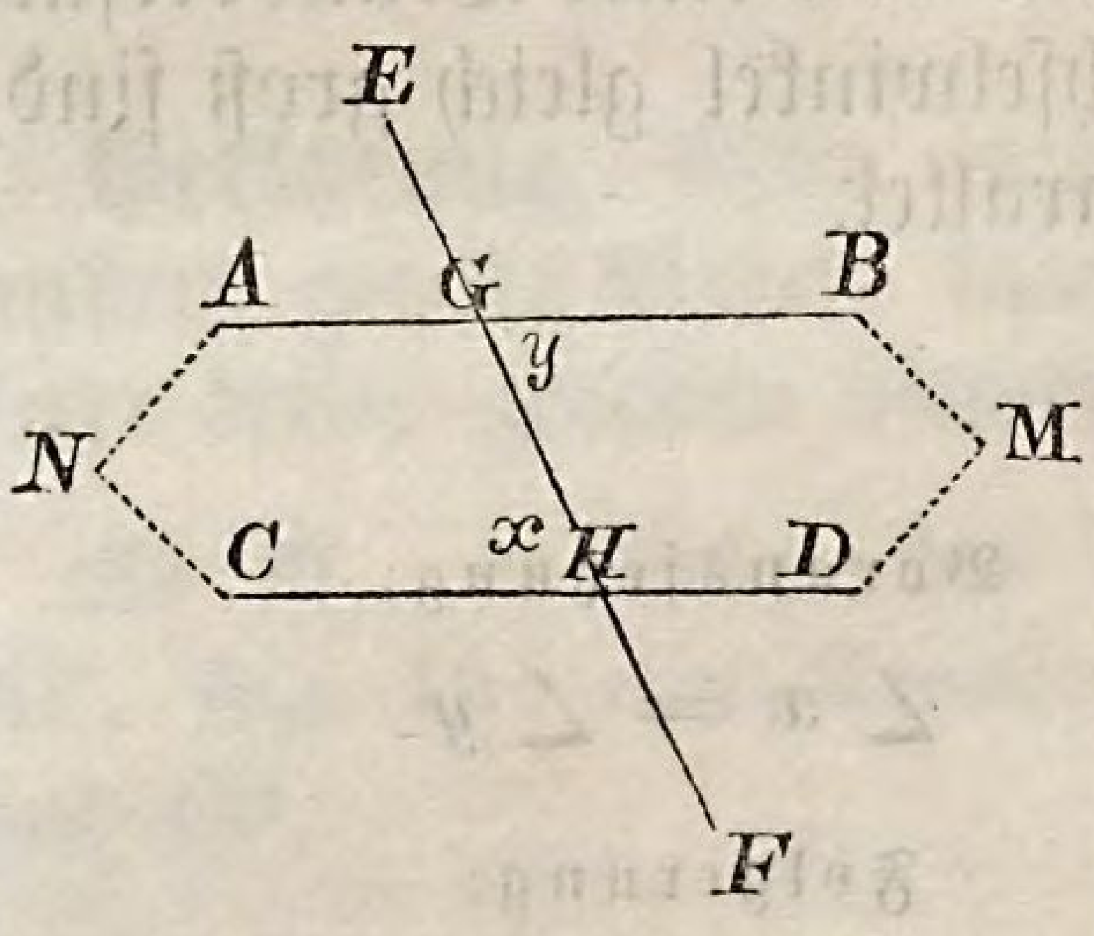


die gerade Linie *DC* der zweiten Figur auf die gerade Linie *AB* der ersten. Endlich fällt, aus demselben Grunde, $\angle y$ der zweiten Figur auf $\angle x$ der ersten; folglich auch die gerade Linie *BA* der zweiten Figur auf die gerade Linie *CD* der ersten. Kurz, die gegebene Figur kann, vermöge der Voraussetzung $\angle x = \angle y$, in umgekehrter Lage mit sich selbst zur Deckung gebracht werden.

2) Nachdem dies feststeht, kann der übrige Theil des Beweises indirect geführt werden wie folgt.

Gesetzt die beiden geraden Linien *AB* und *CD* seien nicht parallel, sondern träfen sich z. B. über *B* und *D* hinaus in einem Punkte *M*, Figur 18. Alsdann müßte, weil nach dem Vorigen die Figur in umgekehrter Lage mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann, auch über *A* und *C* hinaus ein Punkt *N* existiren, in welchem dieselben beiden geraden Linien, hinreichend verlängert, zusammentreffen würden. Die beiden geraden Linien *AB* und *CD* hätten also zwei Punkte, *M* und *N*, mit einander gemein, ohne selbst zusammenzufallen. Dies widerspricht aber dem Grundsatze §. 9.

Fig. 18.

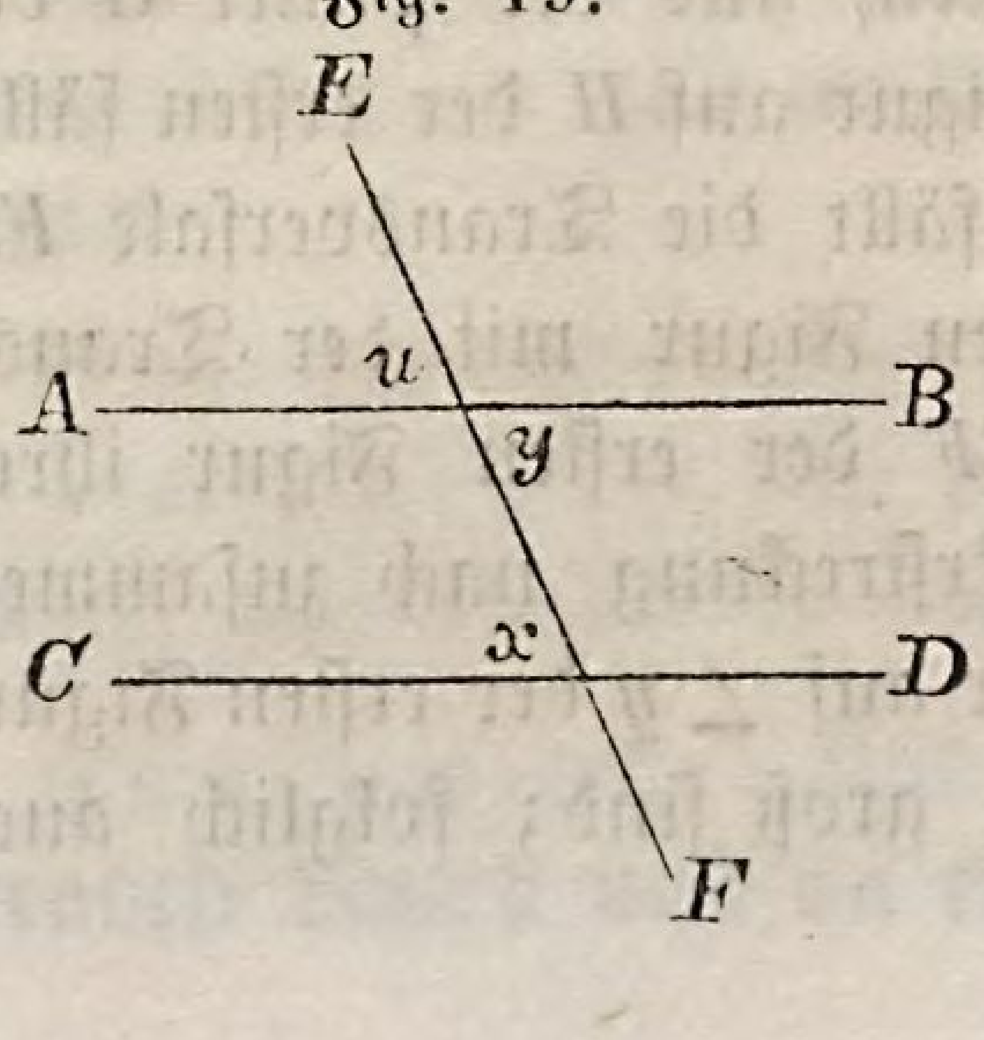


Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn die beiden geraden Linien *AB* und *CD* keinen Punkt mit einander gemein haben, so weit man sie auch verlängern mag; d. h. sie sind parallel, w. z. b. w.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Gegenwinkel gleich groß sind, so sind die beiden geraden Linien parallel.

Fig. 19.



Voraussetzung:

$\angle x = \angle u.$

Folgerung:

$AB \parallel CD.$

Beweis. Man nehme den Wechselwinkel von x, nämlich $\angle y$, zu Hülfe. Alsdann ist nach dem Lehrsatze §. 25

$$\angle y = \angle u.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$\angle x = \angle u.$$

Und da, wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, beide auch unter einander gleich sein müssen, so folgt

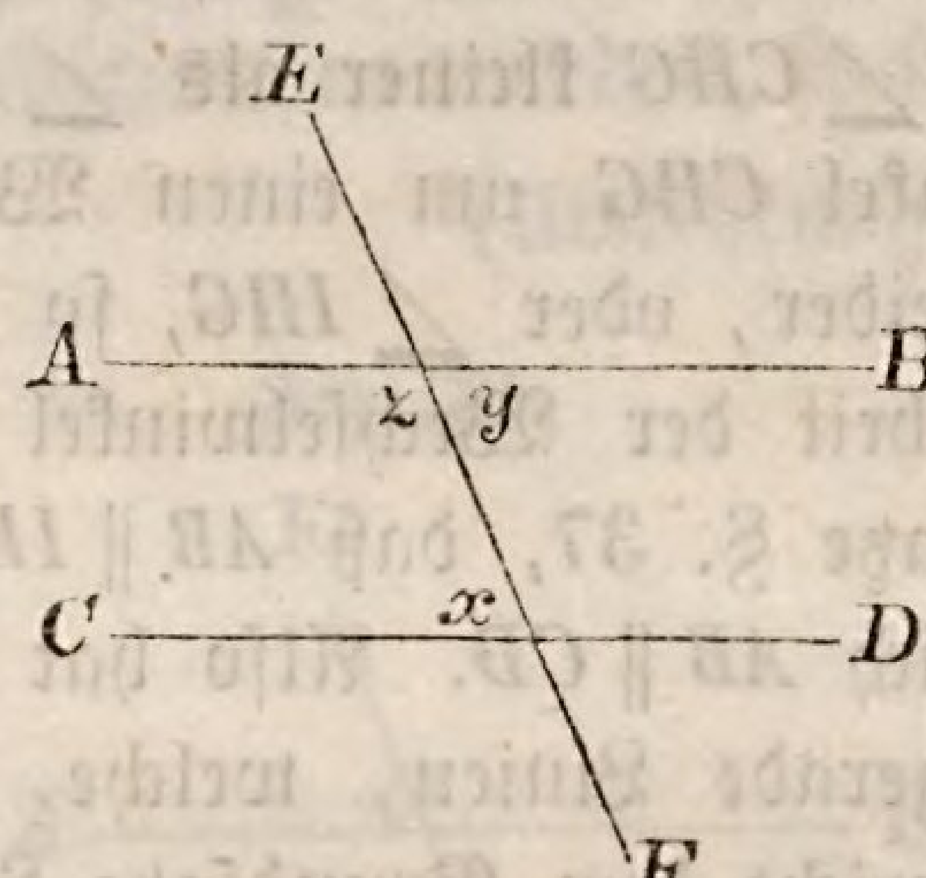
$$\angle x = \angle y.$$

Hieraus aber folgt nach dem Lehrsatze §. 37, daß die beiden geraden Linien AB und CD parallel sind, w. z. b. w.

§. 39.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Summe der Innenwinkel zwei Rechte beträgt, so sind die beiden geraden Linien parallel.

Fig. 20.



Voraussetzung:

$$\angle x + \angle z = 2 R.$$

Folgerung:

$$AB \parallel CD.$$

Beweis. Man nehme den Wechselwinkel von x, nämlich $\angle y$, zu Hülfe. Alsdann ist nach dem Lehrsatze §. 23

$$\angle y + \angle z = 2 R.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$\angle x + \angle z = 2 R.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$\angle x + \angle z = \angle y + \angle z,$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung den gleichen Winkel z subtrahirt,

$$\angle x = \angle y.$$

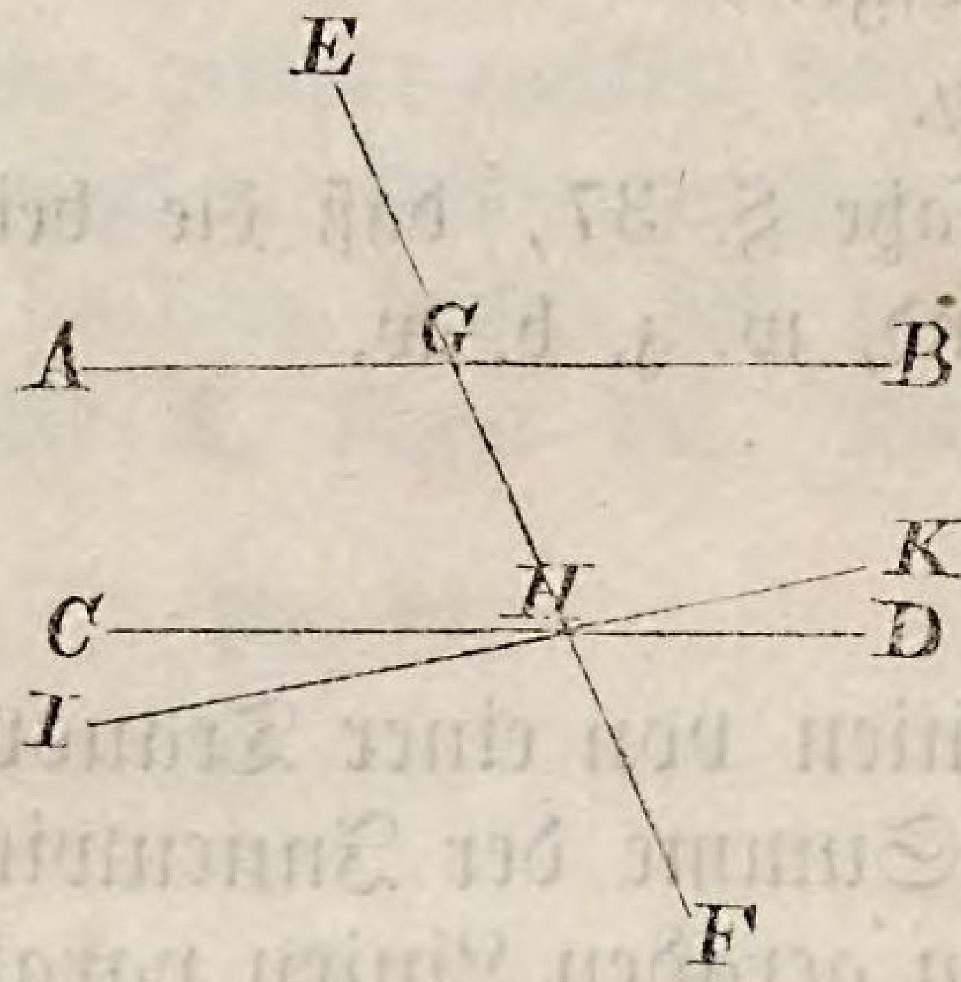
Hieraus aber folgt nach dem Lehrsatze §. 37, daß die beiden geraden Linien AB und CD parallel sind, w. z. b. w.

§. 40.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen von einer Transversale durchschnitten werden, so sind jede zwei Wechselwinkel gleich groß.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 37.)

Fig. 21.



Voraussetzung:

AB ∥ *CD*.

Folgerung:

∠ *CHG* = ∠ *BGH*.

Beweis. Gesetzt die Wechselwinkel *CHG* und *BGH* seien nicht gleich groß, so könnte z. B. erstens ∠ *CHG* kleiner als ∠ *BGH* sein. Alsdann könnte man den Winkel *CHG* um einen Winkel *CHI* vergrößern, so daß die Summe beider, oder ∠ *IHG*, so groß wie ∠ *BGH* würde. Aus der Gleichheit der Wechselwinkel *IGH* und *BGH* folgt ferner nach dem Lehrsatze §. 37, daß *AB* ∥ *IK* ist. Nach der Voraussetzung ist aber zugleich *AB* ∥ *CD*. Also hat man zwei durch Einen Punkt *H* gehende gerade Linien, welche beide parallel mit *AB* sind, und dies widerspricht dem Grundsatze §. 12.

Wenn zweitens ∠ *CHG* größer als ∠ *BGH* wäre, so würde man durch ähnliche Schlüsse gleichfalls zu einem Widerspruche mit demselben Grundsatze §. 12 gelangen.

Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn ∠ *CHG* = ∠ *BGH* ist, w. z. b. w.

Anmerkung. Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten als Folgerung, und die Folgerung des ersten als Voraussetzung enthält. So war in dem Lehrsatze §. 37 die Voraussetzung: „Die Wechselwinkel sind gleich,“ und daraus wurde die Folgerung nachgewiesen: „Die geraden Linien sind parallel.“ Dagegen in der Umkehrung dieses Lehrsatzes, nämlich in dem vorstehenden Lehrsatze, ist die

Voraussetzung: „Die geraden Linien sind parallel," und daraus die Folgerung: „Die Wechselwinkel sind gleich."

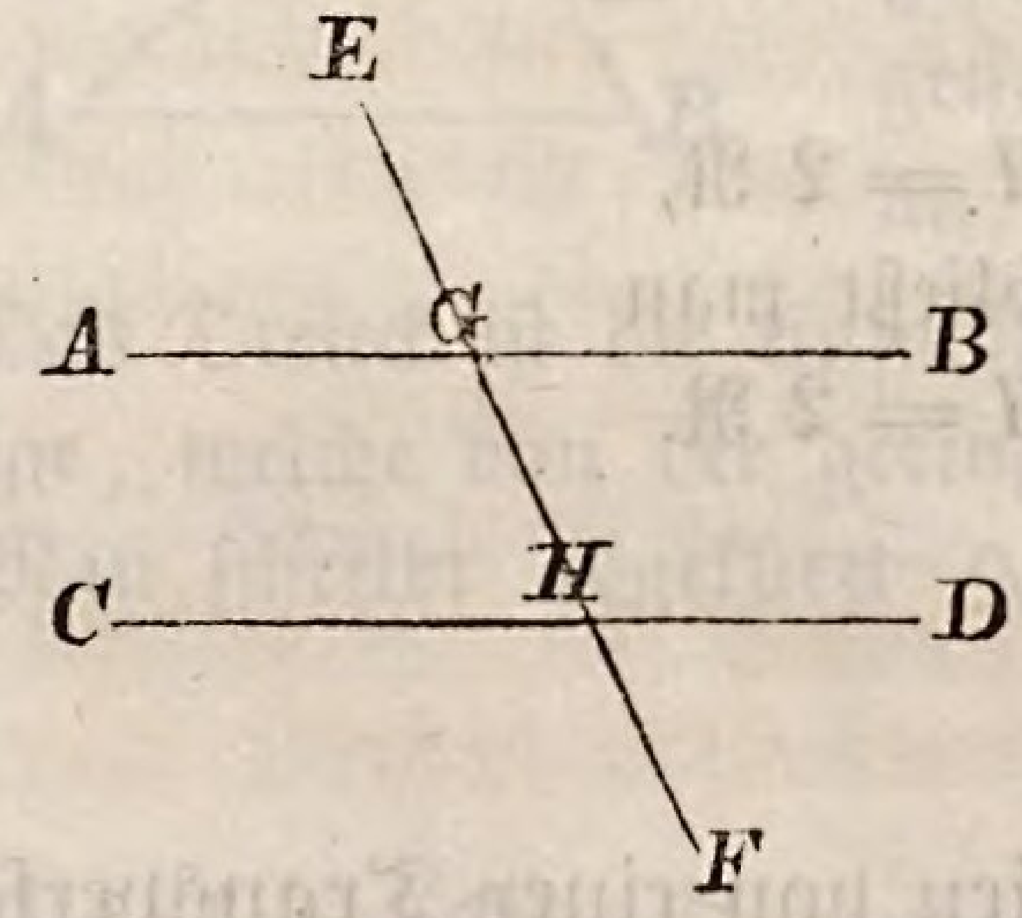
Wenn ein Satz wahr ist, so darf man ihn nicht ohne Weiteres umkehren und diese Umkehrung für wahr halten. Vielmehr bedarf jede Umkehrung immer erst einer besonderen Untersuchung, und muß also, wenn sie sich als zulässig herausstellt, besonders bewiesen werden. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man z. B. den ersten Lehrsatz der Planimetrie, §. 18, welcher in der gehörigen Form ausgesprochen lautet: „Wenn zwei Winkel gerade Winkel sind, so sind sie gleich groß." Wollte man diesen Satz umkehren, so würde man erhalten: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie gerade Winkel;" ein Satz, dessen Unrichtigkeit auf der Hand liegt.

§. 41.

Lehrsatz. **Wenn zwei Parallelen von einer Transversale durchschnitten werden, so sind jede zwei Gegenwinkel gleich groß.**

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 38.)

Fig. 22.



Voraussetzung:

$AB \parallel CD.$

Folgerung:

$\angle CHG = \angle AGE.$

Beweis. Aus dem vorigen Lehrsatz §. 40 ist schon bekannt, daß aus der Voraussetzung $AB \parallel CD$ folgt

$$\angle CHG = \angle BGH.$$

Aber nach dem Lehrsatz §. 25 ist

$$\angle AGE = \angle BGH,$$

und aus diesen beiden Gleichungen schließt man

$$\angle CHG = \angle BGH$$

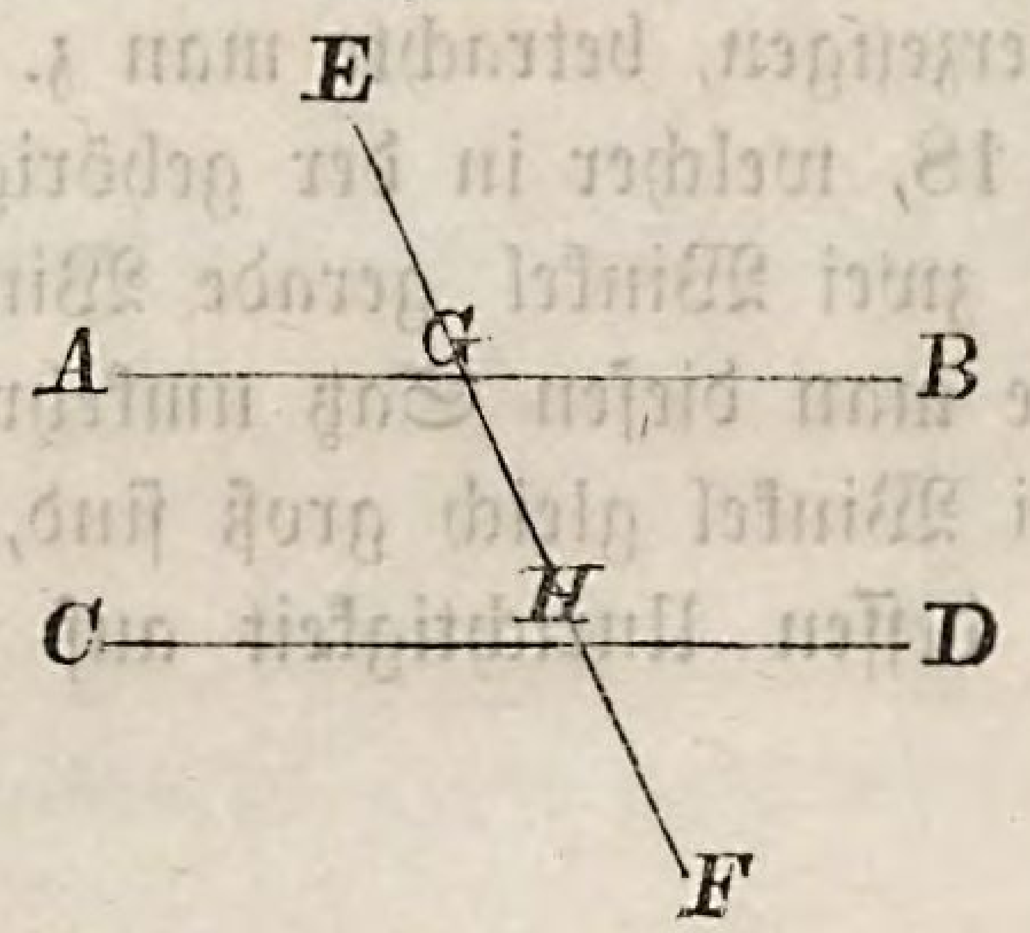
w. z. b. w.

§. 42.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen von einer Transversale durchschnitten werden, so betragen jede zwei Innenwinkel zusammen zwei Rechte.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 39.)

Fig. 22.



Voraussetzung:
$AB \parallel CD$.

Folgerung:
$\angle CHG + \angle AGK = 2$ R.

Beweis. Aus dem Lehrsatze §. 40 ist schon bekannt, daß aus der Voraussetzung $AB \parallel CD$ folgt

$$\angle CHG = \angle BGH.$$

Wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Winkel AGH addirt, so hat man ferner

$$\angle CHG + \angle AGH = \angle BGH + \angle AGH.$$

Aber nach dem Lehrsatze §. 23 ist

$$\angle BGH + \angle AGH = 2 \text{ R},$$

und aus diesen beiden Gleichungen schließt man

$$\angle CHG + \angle AGH = 2 \text{ R}.$$

w. z. b. w.

§. 43.

Zusatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel ungleich sind, oder die Gegenwinkel ungleich sind, oder die Innenwinkel zusammen nicht zwei Rechte betragen, so müssen die beiden geraden Linien hinreichend verlängert einander durchschneiden.

Dieser Satz bildet den Uebergang zum Dreieck.

Dritter Abschnitt.
Vom Dreieck.

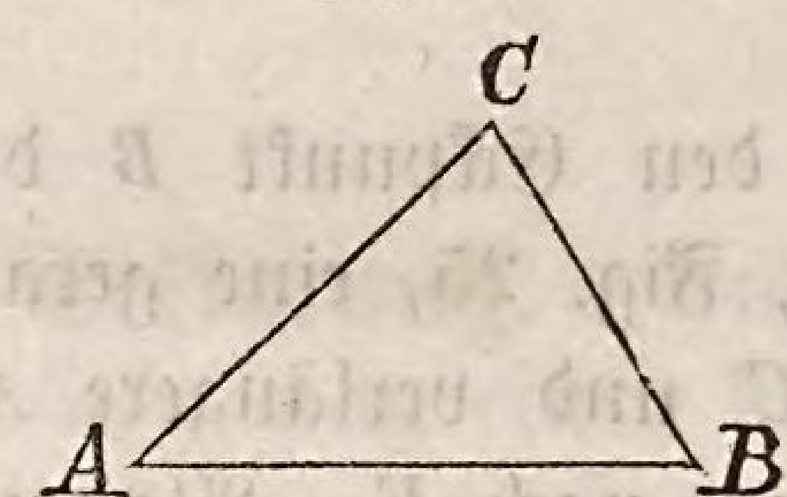
§. 44.

Erklärung. Ein Dreieck ist ein durch drei sich schneidende gerade Linien umgränzter Theil einer Ebene.

Die Durchschnittspunkte der drei geraden Linien heißen die Eckpunkte des Dreiecks; die zwischen diesen Eckpunkten enthaltenen begränzten geraden Linien die Seiten des Dreiecks; und die von den Seiten eingeschlossenen Winkel die Winkel des Dreiecks.

Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel, welche zusammengenommen die sechs Bestandtheile des Dreiecks genannt werden. Die drei Seiten des Dreiecks *ABC*, Fig. 23, sind *AB*, *BC*, *AC*, und seine drei Winkel sind *CAB*, *ABC*, *BCA*. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen, und eine Seite liegt ihm gegenüber. Jeder Seite liegen zwei Winkel an, und ein Winkel liegt ihr gegenüber.

Fig. 23.



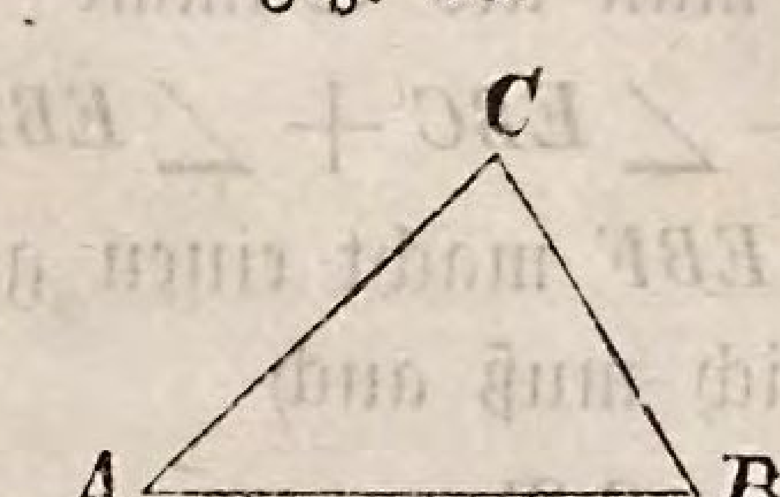
Das Dreieck ist die einfachste geschlossene Figur, d. h. diejenige, welche von der geringsten Anzahl Seiten begränzt wird.

Man schreibt abgekürzt $\triangle$ *ABC*.

§. 45.

Lehrsatz. Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 23.



Voraussetzung:

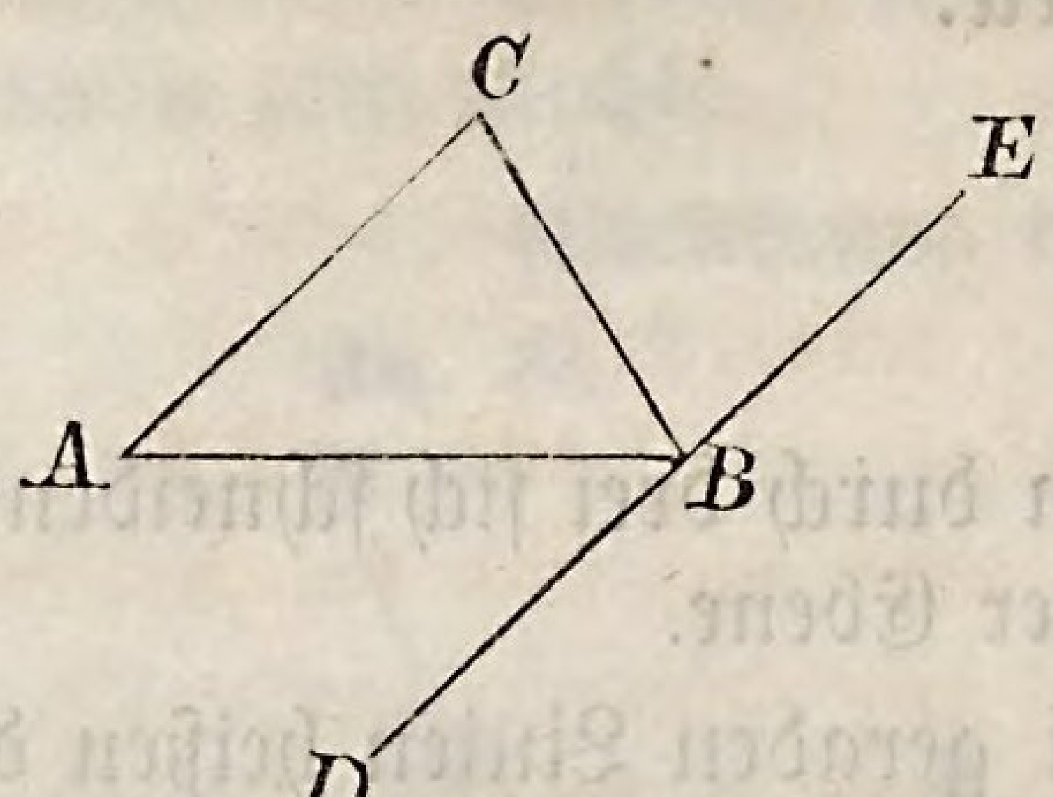
ABC ist ein Dreieck.

Folgerung:

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 2$ R.

Erster Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 24, eine gerade Linie $DE \parallel AC$. Alsdann hat man aus §. 40, indem man AB wie Transversale ansieht

Fig. 24.



$$\angle CAB = \angle DBA.$$

Ebenso indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle EBC.$$

Bildet man endlich noch die identische Gleichung

$$\angle ABC = \angle ABC$$

und addirt diese drei Gleichungen, so erhält man als Summe

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = \angle DBA + \angle ABC + \angle EBC.$$

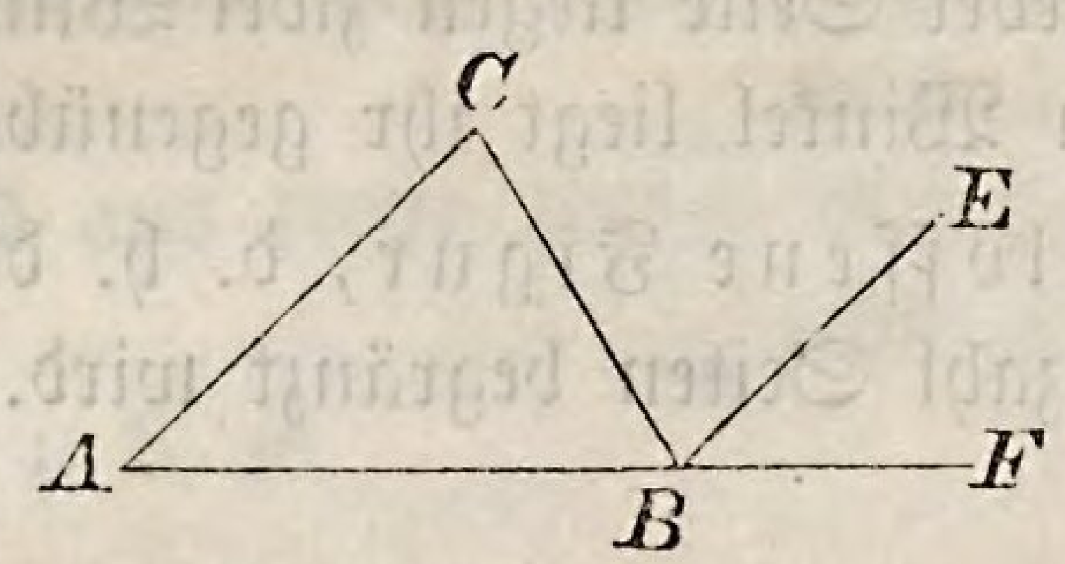
Aber die Summe $\angle DBA + \angle ABC + \angle EBC$ macht einen geraden Winkel aus, oder ist gleich 2 R; folglich muß auch

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2\,R$$

sein, w. z. b. w.

Zweiter Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 25, eine gerade Linie $BE \parallel AC$ und verlängere AB über B hinaus nach F. Alsdann hat man aus §. 41, indem man AF wie Transversale ansieht

Fig. 25.



$$\angle CAB = \angle EBF.$$

Ebenso aus §. 40, indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle EBC.$$

Bildet man endlich noch die identische Gleichung

$$\angle ABC = \angle ABC$$

und addirt diese drei Gleichungen, so findet man als Summe

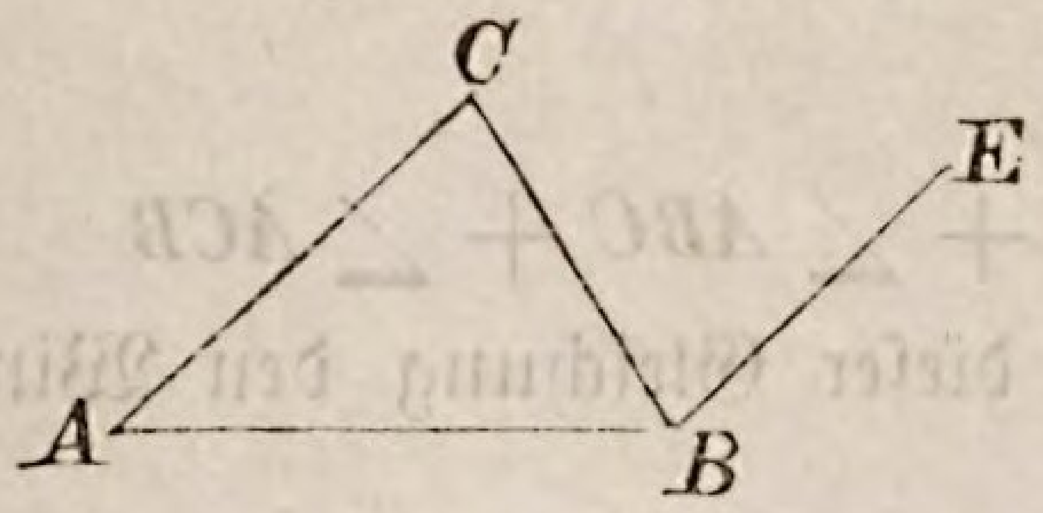
$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = \angle ABC + \angle EBC + \angle EBF.$$

Aber die Summe $\angle ABC + \angle EBC + \angle EBF$ macht einen geraden Winkel aus, oder ist gleich 2 R; folglich muß auch

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 2\,R$$

sein, w. z. b. w.

Fig. 26.



Dritter Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 26, eine gerade Linie $BE \parallel AC$. Alsdann hat man nach §. 42, indem man AB wie Transversale ansieht

$$\angle CAB + \angle ABE = 2\,R,$$

wofür man auch schreiben kann, da $\angle ABE$ aus den beiden Theilen $\angle ABC$ und $\angle CBE$ besteht

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle CBE = 2\,R.$$

Ferner ist nach §. 40, indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle CBE.$$

Folglich darf man in der vorigen Gleichung $\angle ACB$ für $\angle CBE$ an die Stelle setzen, wodurch man erhält

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2\,R$$

w. z. b. w.

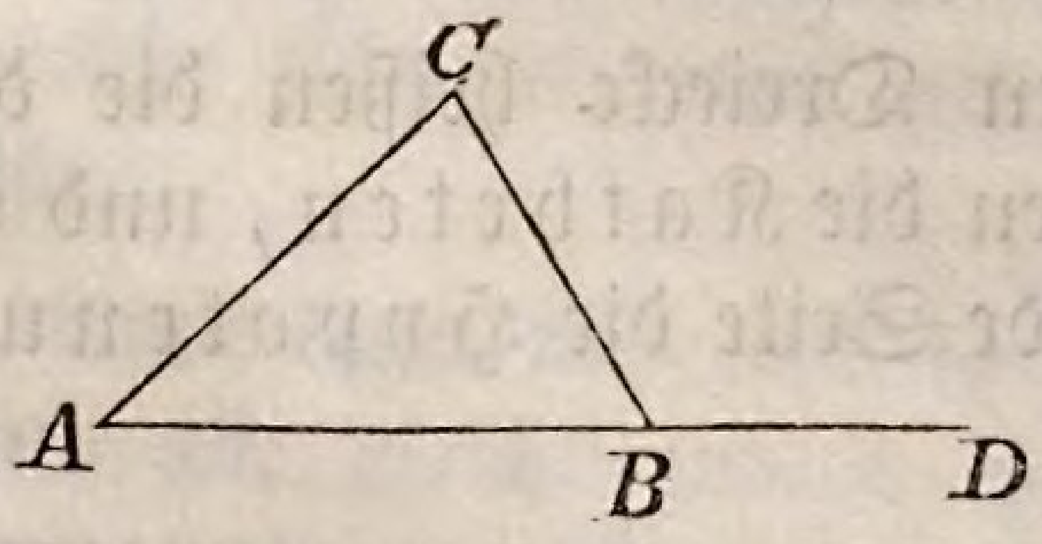
§. 46.

Erklärung. Unter dem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man einen hohlen Winkel, welcher eine Seite und die Verlängerung einer andern Seite des Dreiecks zu Schenkeln hat.

§. 47.

Lehrsatz. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks.

Fig. 27.



Voraussetzung:

AB ist verlängert nach D.

Folgerung:

$$\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB.$$

Beweis. Nach dem Lehrsatze §. 45 ist

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2\,R.$$

Ebenso ist nach §. 23

$$\angle ABC + \angle CBD = 2 R.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle CAB + \angle ABC + \angle ACB$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Winkel *ABC* subtrahirt, so erhält man

$$\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB$$

w. z. b. w.

§. 48.

Zusatz. Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks.

So ist in der vorigen Figur

$$\angle CBD > \angle CAB$$

und $\angle CBD > \angle ACB.$

§. 49.

Erklärung. Man theilt die Dreiecke in Rücksicht auf ihre Winkel in 1) spitzwinkelige Dreiecke, in denen alle Winkel spitz sind; 2) rechtwinkelige Dreiecke, in denen ein Winkel ein rechter ist; und 3) stumpfwinkelige Dreiecke, in denen ein Winkel ein stumpfer ist.

Der Grund für diese Eintheilung der Dreiecke liegt in dem Lehrsatze §. 45, aus welchem man leicht schließt, daß in einem Dreiecke niemals mehr als Ein rechter oder Ein stumpfer Winkel enthalten sein kann.

§. 50.

Erklärung. Im rechtwinkeligen Dreiecke heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse des Dreiecks.

Die Benennungen Kathete und Hypotenuse sind griechischen Ursprungs. Kathete bedeutet wörtlich: herabgesenkte (d. i. senkrechte) Linie, und Hypotenuse: daruntergespannte Linie.

§. 51.

Erklärung. Man theilt die Dreiecke in Rücksicht auf ihre Seiten in 1) gleichseitige Dreiecke, in denen alle drei Seiten gleich groß sind; 2) gleichschenkelige Dreiecke, in denen zwei Seiten gleich groß sind; und 3) ungleichseitige Dreiecke, in denen die drei Seiten ungleich sind.

§. 52.

Erklärung. Im gleichschenkeligen Dreiecke heißen die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie (Basis), und der der Grundlinie gegenüberliegende Eckpunkt die Spitze des Dreiecks.

§. 53.

Erklärung. Zwei Figuren werden congruent genannt, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sie in allen ihren Bestandtheilen zusammenfallen oder einander decken.

Das Wort „congruent" darf man nicht mit dem Worte „gleich" verwechseln, denn das letzte wird bei geschlossenen Figuren in der Bedeutung „inhaltsgleich" gebraucht (s. unten). Z. B. ein Dreieck und ein Kreis können niemals congruent sein, d. h. einander decken; aber wohl können sie einander gleich sein, d. h. gleichen Flächenraum einschließen.

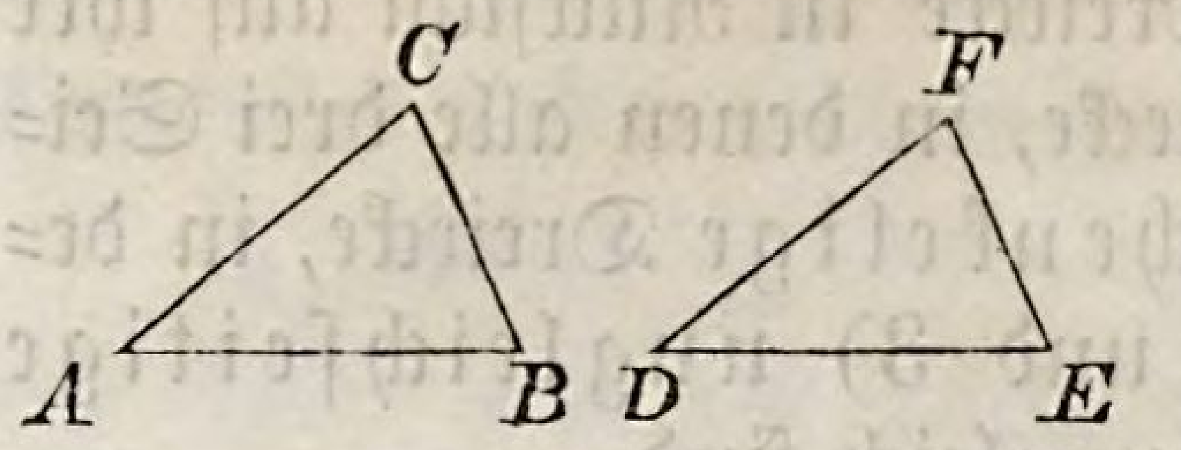
Man gebraucht das Zeichen ≡ für congruent.

§. 54.

Zusatz. In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Man kann dies auch so ausdrücken: In congruenten Dreiecken sind alle gleichliegenden Bestandtheile gleich groß. Alsdann hat man unter gleichliegenden Seiten solche zu verstehen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen; und unter gleichliegenden Winkeln solche, welche gleichen Seiten gegenüberliegen.

Fig. 28.



z. B. wenn man voraussetzt, Fig. 28, daß $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ sei, d. h. daß man diese beiden Dreiecke so auf einander legen könne, daß D auf A, E auf B, und F auf C fällt, so folgt daraus sogleich

$$AB = DE \quad , \quad AC = DF \quad , \quad BC = EF$$
$$\angle ACB = \angle DFE, \angle ABC = \angle DEF, \angle BAC = \angle EDF,$$

wo die einander gegenüberliegenden Bestandtheile eines Dreiecks je unter einander geschrieben sind.

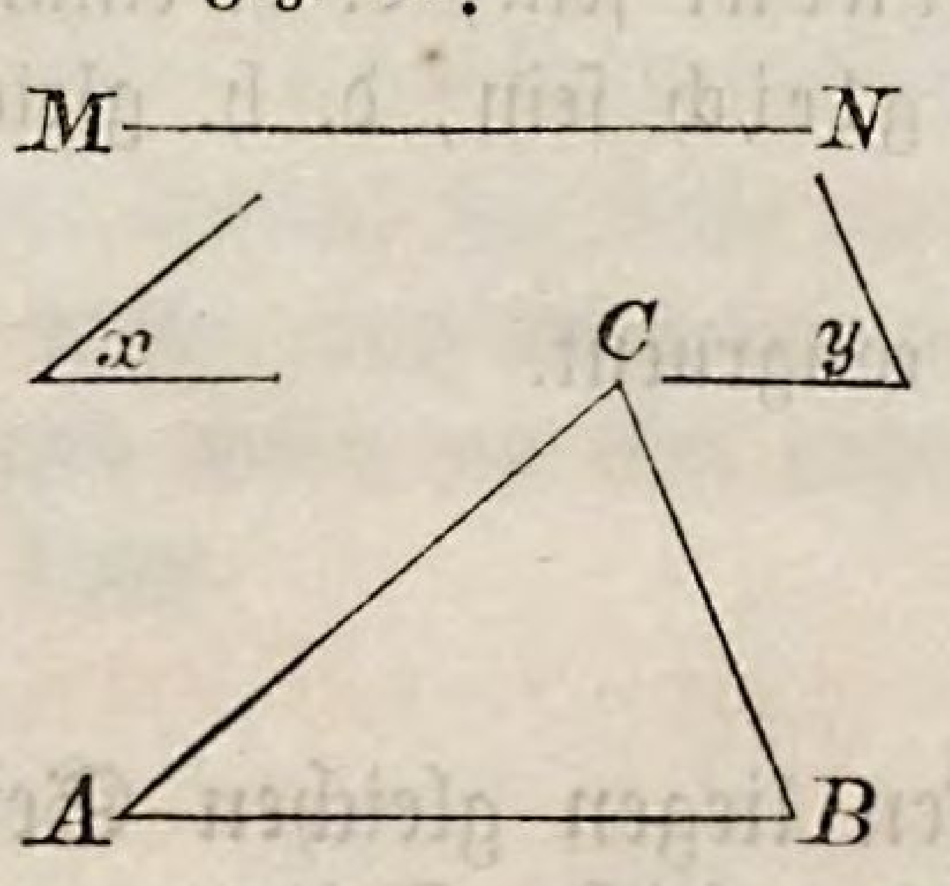
Anmerkung. Euklides, welcher in seinen Elementen ein Wort für „congruent" nicht hat, umschreibt es immer in der obigen Weise, indem er sagt, die Seiten und die Winkel in beiden Dreiecken seien beziehungsweise gleich groß.

Erste Dreiecks-Construction.

§. 55.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln ein Dreieck zu construiren.

Fig. 29.



Gegeben:

MN als Seite,
$\angle x$ als anliegender Winkel,
$\angle y$ als anliegender Winkel.

Gesucht:

Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang wie die gegebene MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ebenso lege man im Punkte B, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie BA, als Schenkel, einen Winkel ABC gleich dem gegebenen $\angle y$.

Verlängert man endlich die Schenkel dieser beiden Winkel bis zu ihrem Durchschnittspunkte C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

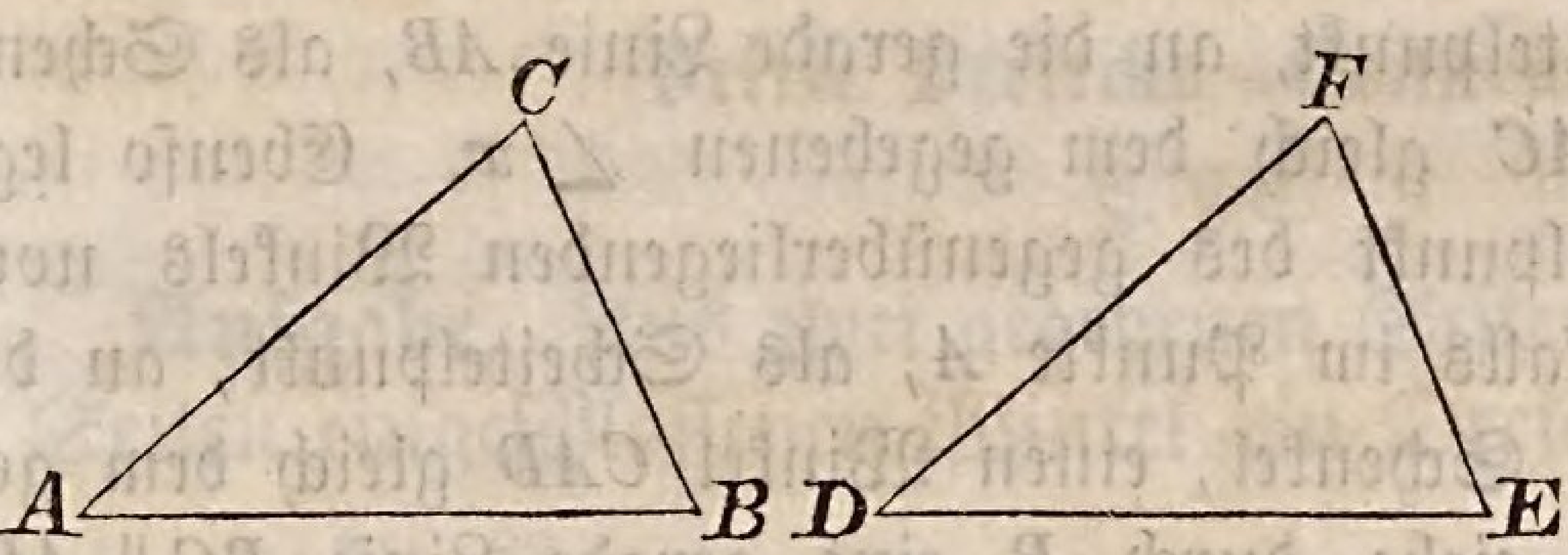
$$\angle x + \angle y < 2 \mathfrak{R}$$

erfüllt ist.

§. 56.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:

$AB = DE$,

$\angle BAC = \angle EDF$,

$\angle ABC = \angle DEF$.

Folgerung.

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß DE auf AB fällt, d. h. D auf A, und E auf B, welches möglich ist, da beide Seiten nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann muß auch der Schenkel DF der Lage nach auf den Schenkel AC fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle BAC = \angle EDF$ ist. Ferner muß der Schenkel EF der Lage nach auf den Schenkel BC fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle ABC = \angle DEF$ ist. Endlich muß auch der Durchschnittspunkt F mit dem Durchschnittspunkte C zusammenfallen, weil, wie so eben bewiesen, die in F sich schneidenden geraden Linien DF und EF einzeln genommen mit den in C sich schneidenden geraden Linien AC und BC zusammenfallen.

Folglich decken die beiden Dreiecke einander, und sind daher congruent, w. z. b. w.

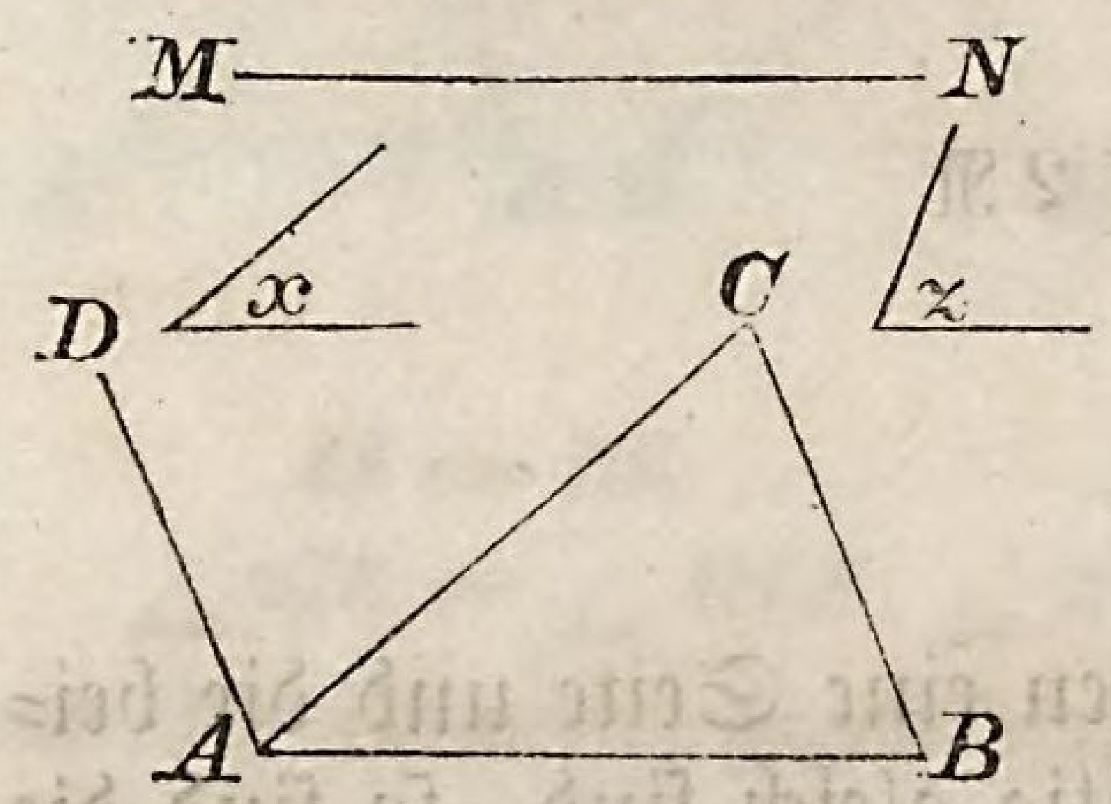
Zweite Dreiecks-Construction.

§. 57.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite, einem ihr anliegen=

den Winkel und einem ihr gegenüberliegenden Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 31.



Gegeben:
MN als Seite,
$\angle x$ als anliegender Winkel,
$\angle z$ als gegenüberliegender Winkel.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang wie die gegebene MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ebenso lege man (da der Scheitelpunkt des gegenüberliegenden Winkels noch unbekannt ist) gleichfalls im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AC, als Schenkel, einen Winkel CAD gleich dem gegebenen $\angle z$, und ziehe durch B eine gerade Linie $BC \parallel AD$. Wenn man nun die geraden Linien AC und BC hinreichend verlängert, bis sie sich in C durchschneiden, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

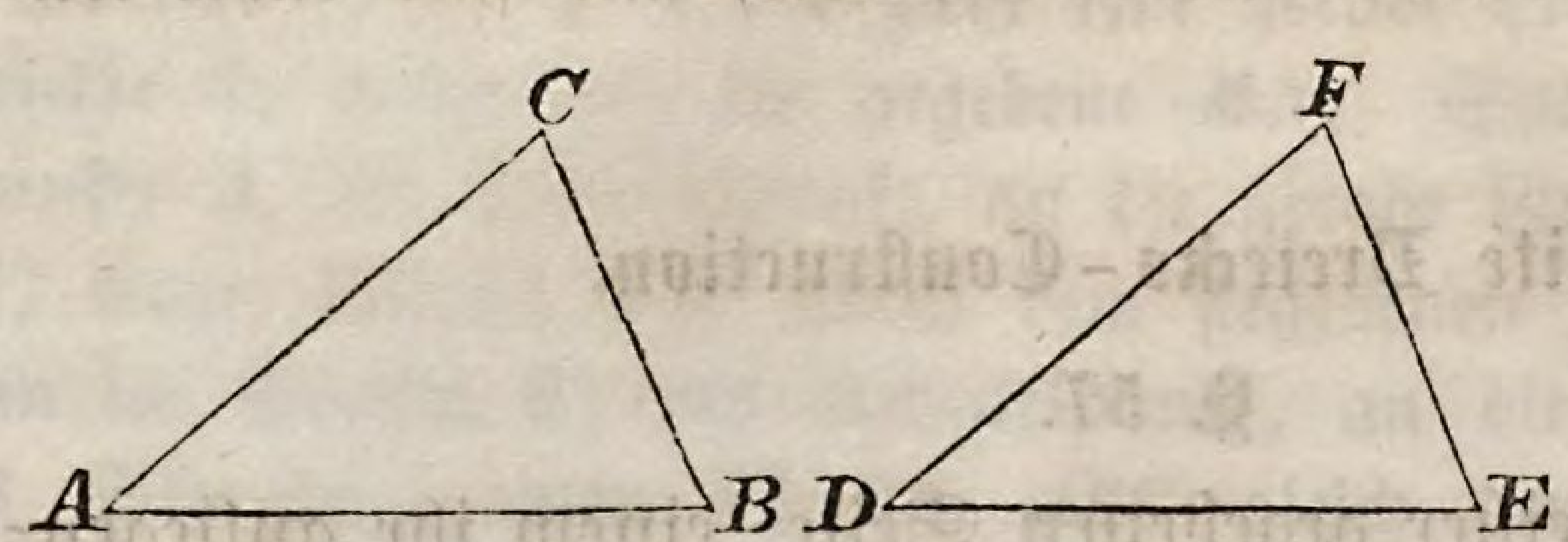
$$\angle x + \angle z < 2 \mathfrak{R}$$

erfüllt ist.

§. 58.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite, ein ihr anliegender Winkel und ein ihr gegenüberliegender Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:
$AB = DE$
$\angle BAC = \angle EDF,$
$\angle ACB = \angle DFE.$

Folgerung:
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$

Beweis. Aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken folgt, vermöge des Lehrsatzes §. 45, immer sogleich auch die Gleichheit des dritten Winkels. Es ist also in den vorliegenden Dreiecken auch

$$\angle ABC = \angle DEF.$$

Da nun in den beiden Dreiecken eine Seite nebst den beiden ihr anliegenden Winkeln gegenseitig gleich sind, so sind nach §. 56 die Dreiecke congruent w. z. b. w.

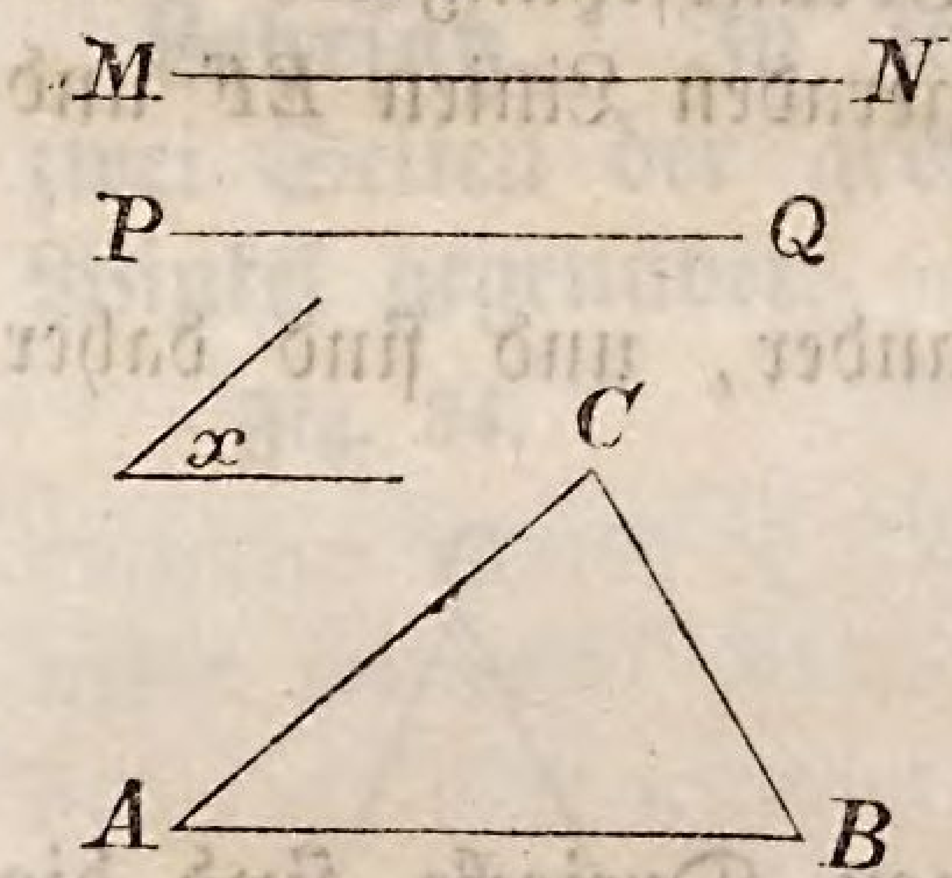
Anmerkung. Die beiden Lehrsätze §. 56 und §. 58 kann man kurz in folgenden Einen Satz zusammenfassen: Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und irgend zwei gleichliegende Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Dritte Dreiecks-Construction.

§. 59.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 32.



Gegeben:

MN und PQ als Seiten,

$\angle x$ als eingeschlossener Winkel,

Gesucht:

Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang wie die eine gegebene Seite MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$, und mache den Schenkel AC dieses Winkels so lang wie die zweite gegebene Seite PQ. Zieht man endlich BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

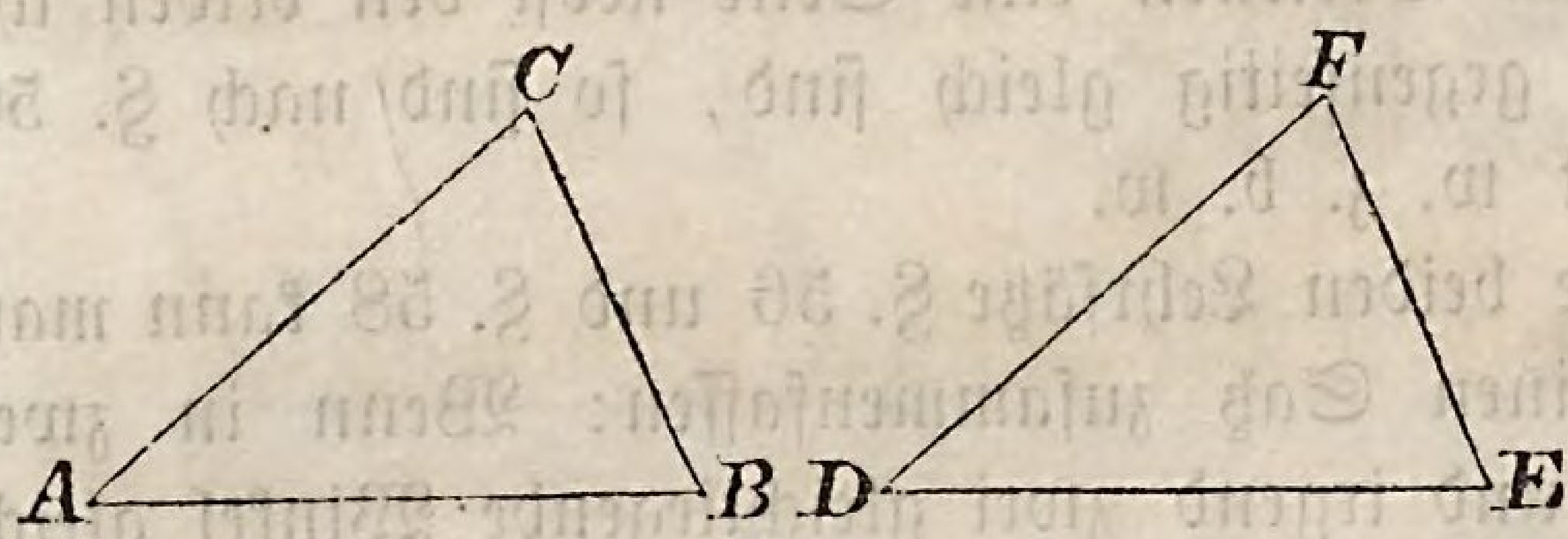
$$\angle x < 2 \mathfrak{R}$$

erfüllt ist.

§. 60.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$AC = DF$,
$\angle BAC = \angle EDF$.

Folgerung:
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke *ABC* und *DEF* so auf einander, daß $\angle EDF$ auf $\angle BAC$ fällt, d. h. der Schenkel *DE* auf *AB*, und der Schenkel *DF* auf *AC*, welches möglich ist, da beide Winkel nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann muß auch der Punkt *E* mit *B* zusammenfallen, weil nach der Voraussetzung $AB = DE$ ist. Ferner muß auch der Punkt *F* mit *C* zusammenfallen, weil nach der Voraussetzung $AC = DF$ ist. Endlich fallen auch nach §. 9 die geraden Linien *EF* und *BC* auf einander.

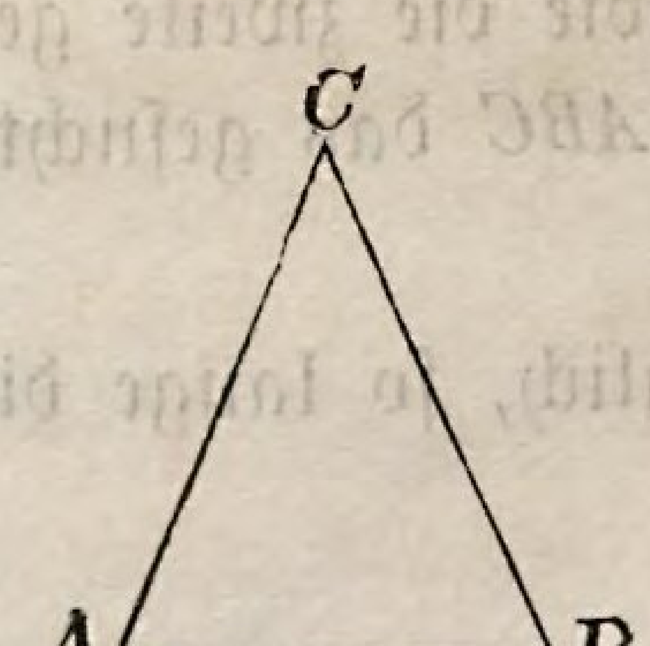
Folglich decken die beiden Dreiecke einander, und sind daher congruent, w. z. b. w.

§. 61.

Lehrsatz. In jedem gleichschenkeligen Dreiecke sind die beiden Winkel an der Grundlinie gleich groß.

Oder: In jedem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Fig. 33.



Voraussetzung:
$AC = BC$.

Folgerung:
$\angle ABC = \angle BAC$.

Beweis. Man denke sich das Dreieck *ABC* von seiner Stelle gehoben, umgewendet, und so wieder niedergelegt, daß die Spitze *C* des Dreiecks wieder in sich selbst fällt und die Schenkel *AC* und *BC* vertauscht werden. Alsdann muß *B* in *A*, und *A* in *B* fallen, wegen der vorausgesetzten Gleichheit $AC = BC$. Folglich muß auch nach §. 9 die Seite *AB* wieder in sich selbst fallen, nur in umgekehrter Lage *BA*. Also wird das Dreieck *ABC* sich selbst decken.

Daraus aber folgt weiter, daß auch die beiden Winkel *ABC* und *BAC* einander decken, mithin gleich groß sind, w. z. b. w.

§. 62.

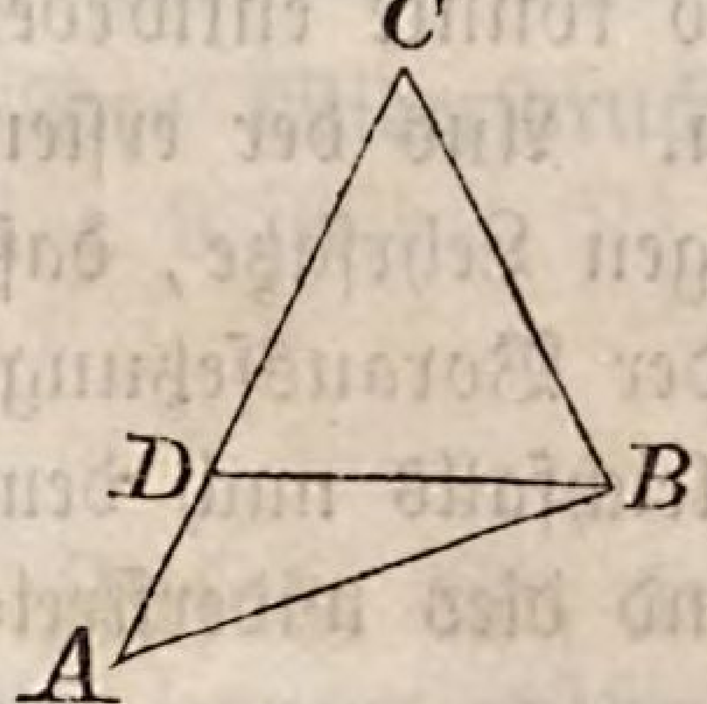
Zusatz. Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind sämmtlich gleich groß.

Die Größe jedes einzelnen Winkels im gleichseitigen Dreieck beträgt daher $\frac{2}{3}$ R. oder 60°.

§. 63.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel, der kleineren der kleinere Winkel gegenüber.

Fig. 34.



Voraussetzung:

$AC > BC$.

Folgerung:

$\angle ABC > \angle BAC$.

Beweis. Man trage die kleinere Seite *CB* auf der größeren *CA* von *C* aus ab, bis *D*, so daß $CD = CB$ wird, und ziehe *DB*. Alsdann ist nach §. 61 in dem gleichschenkeligen Dreiecke *DBC*

$$\angle DBC = \angle BDC.$$

Aber $\angle DBC$ ist nur ein Theil von $\angle ABC$, oder

$$\angle ABC > \angle DBC,$$

folglich ist auch

$$\angle ABC > \angle BDC.$$

Ferner ist $\angle BDC$ Außenwinkel des Dreiecks BAD, also nach §. 48

$$\angle BDC > \angle BAC,$$

und daraus endlich folgt, mit Zuziehung des Vorigen,

$$\angle ABC > \angle BAC$$

w. z. b. w.

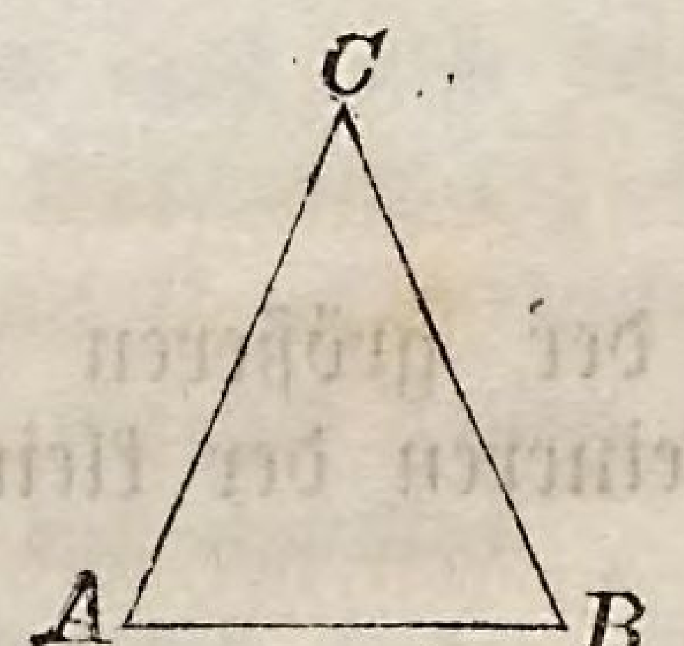
§. 64.

Lehrsatz. Jedes Dreieck, in welchem zwei Winkel gleich groß sind, ist ein gleichschenkeliges Dreieck, und die genannten Winkel sind Winkel an der Grundlinie dieses gleichschenkeligen Dreiecks.

Oder: In jedem Dreieck liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 61.)

Fig. 33.



Voraussetzung:

$\angle ABC = \angle BAC.$

Folgerung:

$AC = BC.$

Beweis. Gesetzt es sei nicht $AC = BC$, so könnte entweder $AC > BC$, oder $AC < BC$ angenommen werden. Aus der ersten Annahme $AC > BC$ aber folgt nach dem vorigen Lehrsatze, daß $\angle ABC > \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet der Voraussetzung. Aus der zweiten Annahme $AC < BC$ folgt gleichfalls nach dem vorigen Lehrsatze, daß $\angle ABC < \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet gleichfalls der Voraussetzung.

Der Widerspruch hört nur dann auf, wenn $AC = BC$ ist, w. z. b. w.

Anmerkung. Anfänger müssen sich hüten, die beiden Lehrsätze §. 61 und §. 64 mit dem Satze §. 54 zu verwechseln. Der Satz §. 54 handelt von Seiten und Winkeln in congruenten Dreiecken, dagegen die §§. 61 und 64 handeln von Seiten und Winkeln in einem und demselben Dreiecke.

§. 65.

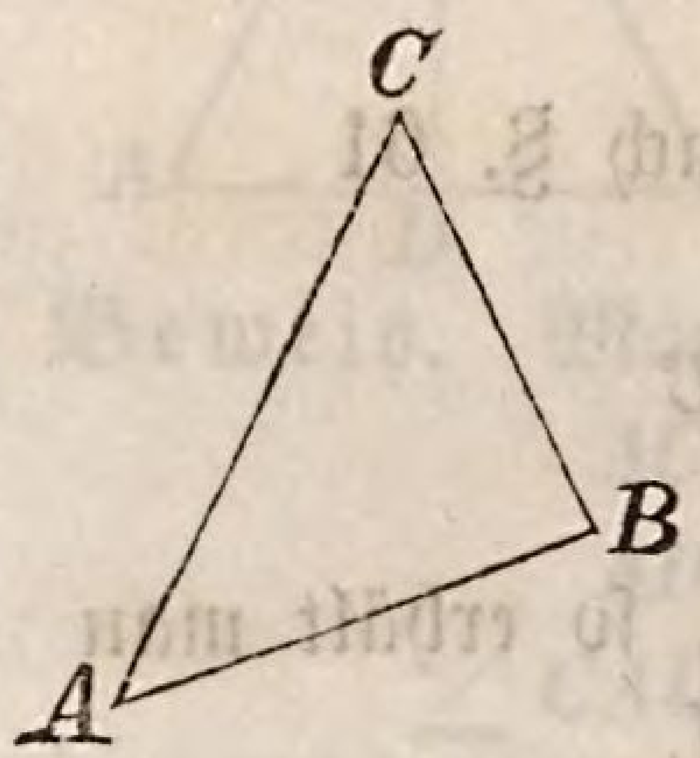
Zusatz. Jedes Dreieck, in welchem die drei Winkel gleich groß sind, ist ein gleichseitiges Dreieck.

§. 66.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke liegt dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite, dem kleineren die kleinere Seite gegenüber.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 63.)

Fig. 35.



Voraussetzung:

$\angle ABC > \angle BAC$.

Folgerung:

$AC > BC$.

Beweis. Gesetzt es sei nicht $AC > BC$, so könnte entweder $AC = BC$, oder $AC < BC$ angenommen werden. Aus der ersten Annahme $AC = BC$ aber folgt nach §. 61, daß $\angle ABC = \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet der Voraussetzung. Aus der zweiten Annahme $AC < BC$ folgt nach §. 63, daß $\angle ABC < \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet gleichfalls der Voraussetzung.

Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn $AC > BC$ ist, w. z. b. w.

§. 67.

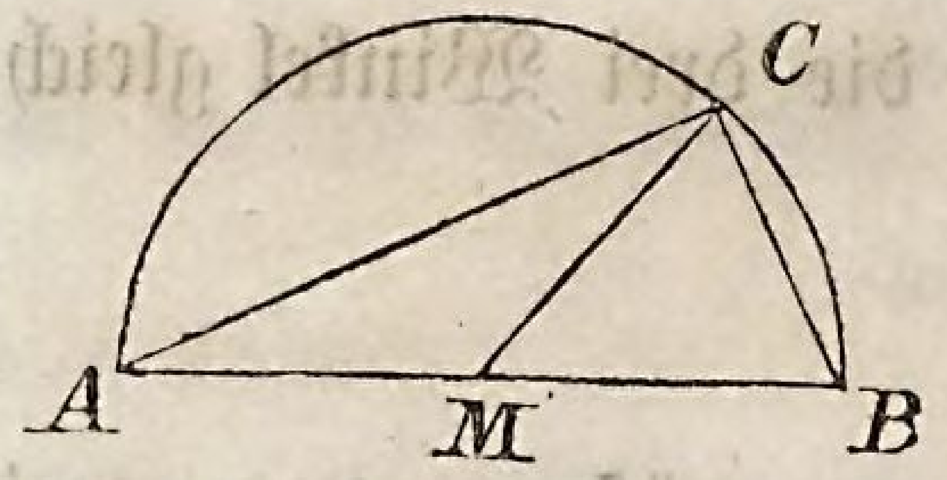
Zusatz. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse immer größer als jede der beiden Katheten.

Ebenso ist in einem stumpfwinkeligen Dreiecke diejenige Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als jede der beiden andern Seiten.

§. 68.

Lehrsatz des Thales. Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Fig. 36.



Voraussetzung:
Bogen *ACB* ist ein Halbkreis.

Folgerung:
$\angle ACB = R$.

Beweis. Da der Bogen *ACB* ein Halbkreis ist, so muß die gerade Linie *AB* ein Durchmesser und der Punkt *M*, welcher die *AB* in zwei gleiche Theile theilt, der Mittelpunkt des Kreises sein, welchem der gegebene Halbkreis angehört. Zieht man nun *MC*, so theilt diese (nach §. 27) das Dreieck *ABC* in die beiden gleichschenkeligen Dreiecke *AMC* und *BMC*.

In dem gleichschenkeligen Dreiecke *AMC* ist nach §. 61

$$\angle ACM = \angle CAM,$$

ebenso ist in dem gleichschenkeligen Dreiecke *BMC*

$$\angle BCM = \angle CBM,$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man

$$\angle ACB = \angle CAM + \angle CBM.$$

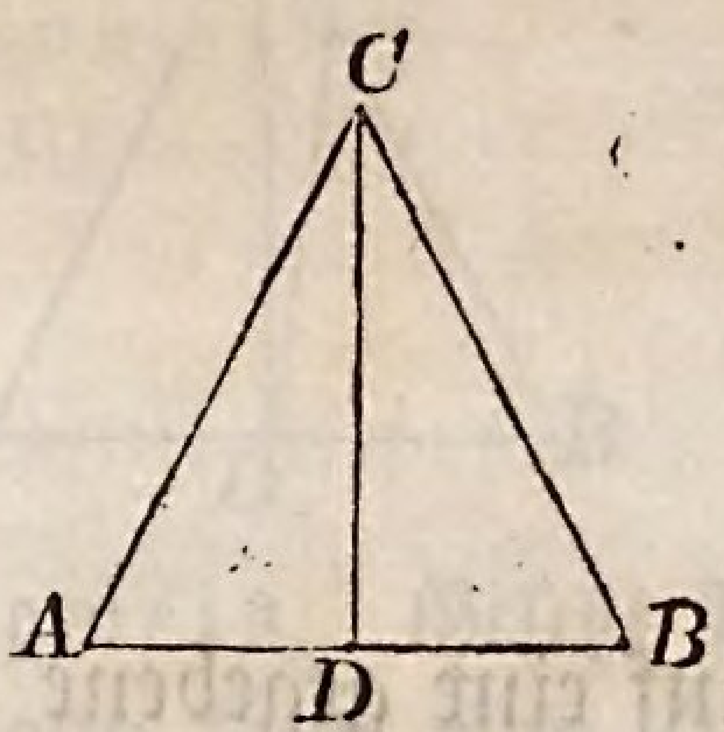
Nun machen die drei Winkel *ACB*, *CAM* und *CBM*, welche diese Gleichung enthält, nach §. 45 zusammen zwei rechte Winkel aus; folglich muß $\angle ACB$ für sich genommen gleich Einem rechten Winkel sein, w. z. b. w.

Anmerkung. Der hier bewiesene Satz wird dem Thales zugeschrieben, welcher um das Jahr 640 vor Chr. Geb. zu Milet geboren wurde und der älteste uns bekannte Mathematiker der Griechen ist. Man erzählt von ihm ferner, daß er den Ägyptern Anleitung gegeben habe, die Höhe ihrer Pyramiden aus der Länge des geworfenen Schattens zu bestimmen, worüber der König Amasis, welcher Zeuge davon war, seine große Verwunderung und Anerkennung ausgesprochen haben soll. Nimmt man hiezu den obigen ihm zugeschriebenen Satz, so sieht man, auf welcher Stufe der Kindheit noch zu jener Zeit die Geometrie bei den Griechen sich befand. Die bedeutendste Leistung des Thales aber war die Vorherverkündigung einer totalen Sonnenfinsterniß, welche auf einen Tag fiel, wo Alyattes, König von Lydien, und Cyaxares, König von Medien, einander in einer Schlacht gegenüberstanden. Dies geschah nach der neuesten von Zech (1853) geführten Rechnung am 28. Mai des Jahres 584 vor Chr. Geb.

§. 69.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche aus der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gezogen wird, steht rechtwinkelig auf der Grundlinie und halbirt den Winkel an der Spitze.

Fig. 37.



Voraussetzung:

$AC = BC$

$AD = BD.$

Folgerung:

1) $CD \perp AB$

2) $\angle ACD = \angle BCD.$

Beweis. Man hat

$AC = BC$ nach der Voraussetzung

$AD = BD$ desgl.

$\angle CAD = \angle CBD$ nach §. 61.

Folglich ist nach §. 60

$\triangle CAD \cong \triangle CBD,$

und daraus nach §. 54

1) $\angle CDA = \angle CDB$, d. i. $CD \perp AB$,

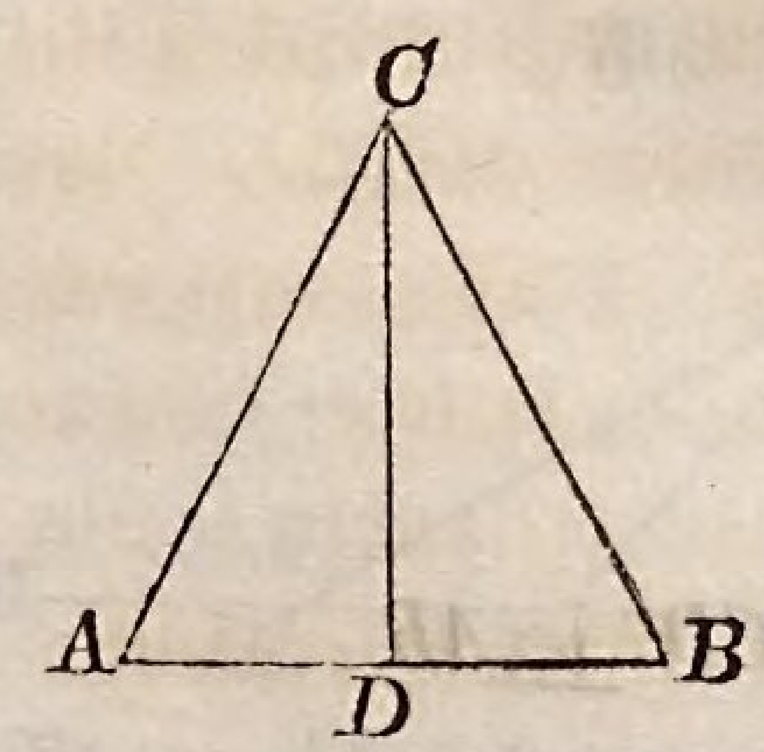
und 2) $\angle CAD = \angle CBD$,

w. z. b. w.

§. 70.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche aus der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks rechtwinkelig auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

Fig. 37.



Voraussetzung:

$AC = BC$

$CD \perp AB.$

Folgerung:

1) $AD = BD$

2) $\angle ACD = \angle BCD.$

Beweis. Man hat

$AC = BC$ nach der Voraussetzung

$\angle ADC = \angle BDC$ desgl.

$\angle CAD = \angle CBD$ nach §. 61.

Folglich ist nach §. 58

$\triangle CAD \equiv \triangle CBD$,

und daraus nach §. 54

1) $AD = BD$

und 2) $\angle ACD = \angle BCD$,

w. z. b. w.

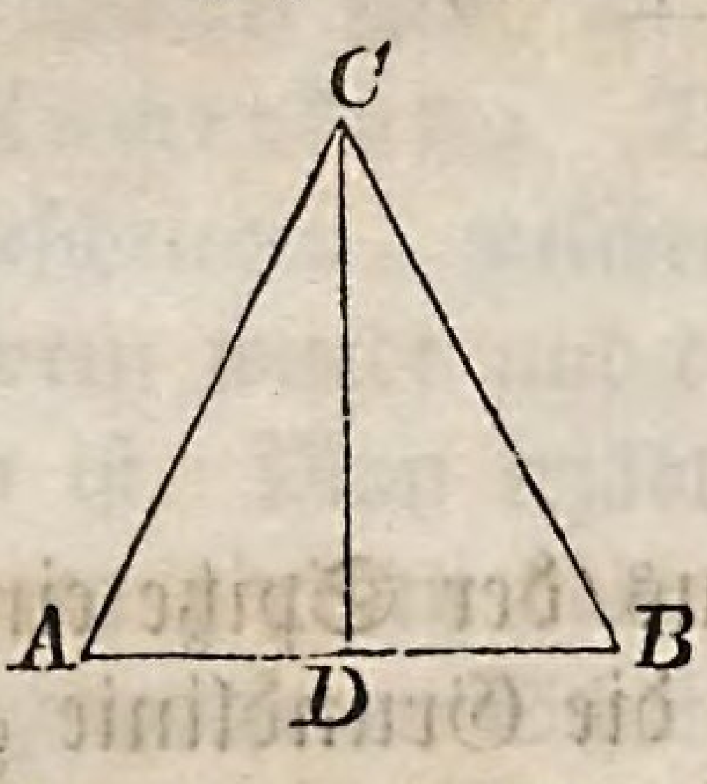
§. 71.

Zusatz. Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene gerade Linie ist nur Ein Perpendikel möglich.

§. 72.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbirt, halbirt auch die Grundlinie und steht rechtwinkelig auf der Grundlinie.

Fig. 37.



Voraussetzung:

$AC = BC$

$\angle ACD = \angle BCD$.

Folgerung:

1) $AD = BD$

2) $CD \perp AB$.

Beweis. Man hat

$AC = BC$ nach der Voraussetzung

$\angle ACD = \angle BCD$ desgl.

$\angle CAD = \angle CBD$ nach §. 61.

Folglich ist nach §. 56

$\triangle CAD \equiv \triangle CBD$,

und daraus nach §. 54

1) $AD = BD$,

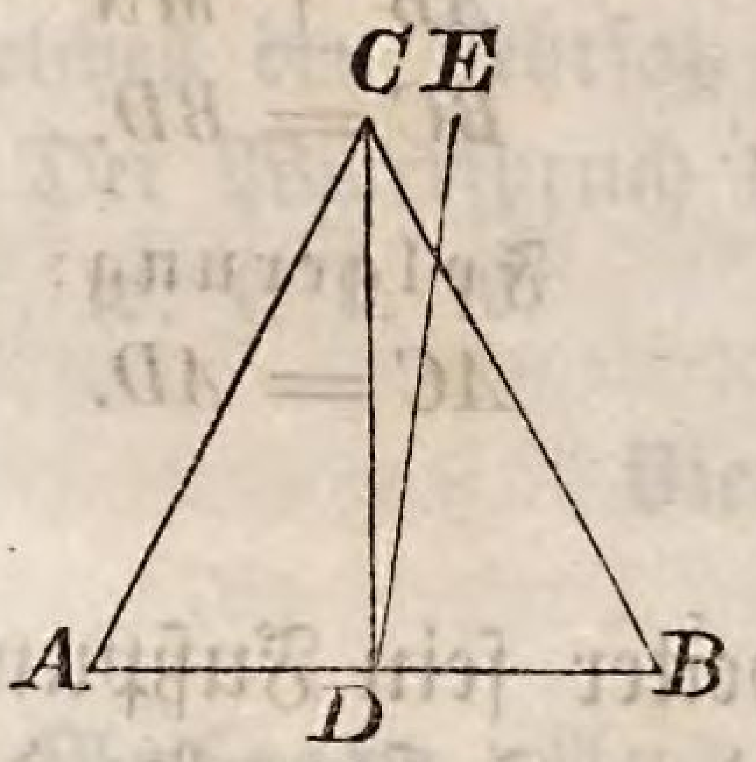
und 2) $\angle CDA = \angle CDB$, d. i. $CD \perp AB$

w. z. b. w.

§. 73.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks rechtwinkelig auf dieser Grundlinie errichtet wird, trifft die Spitze des Dreiecks.

Fig. 38.



Voraussetzung:

$AC = BC$

$AD = BD$

$DE \perp AB.$

Folgerung:

DE trifft C.

Beweis. Gesetzt DE treffe nicht die Spitze C des Dreiecks. Alsdann kann man D mit C durch eine gerade Linie DC verbinden, welche von DE verschieden ist. Nun hat man nach §. 69

$$DC \perp AB.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$DE \perp AB.$$

Folglich hat man in Einem Punkte D der Grundlinie AB zwei Perpendikel auf dieser Linie, welches dem §. 22 widerspricht.

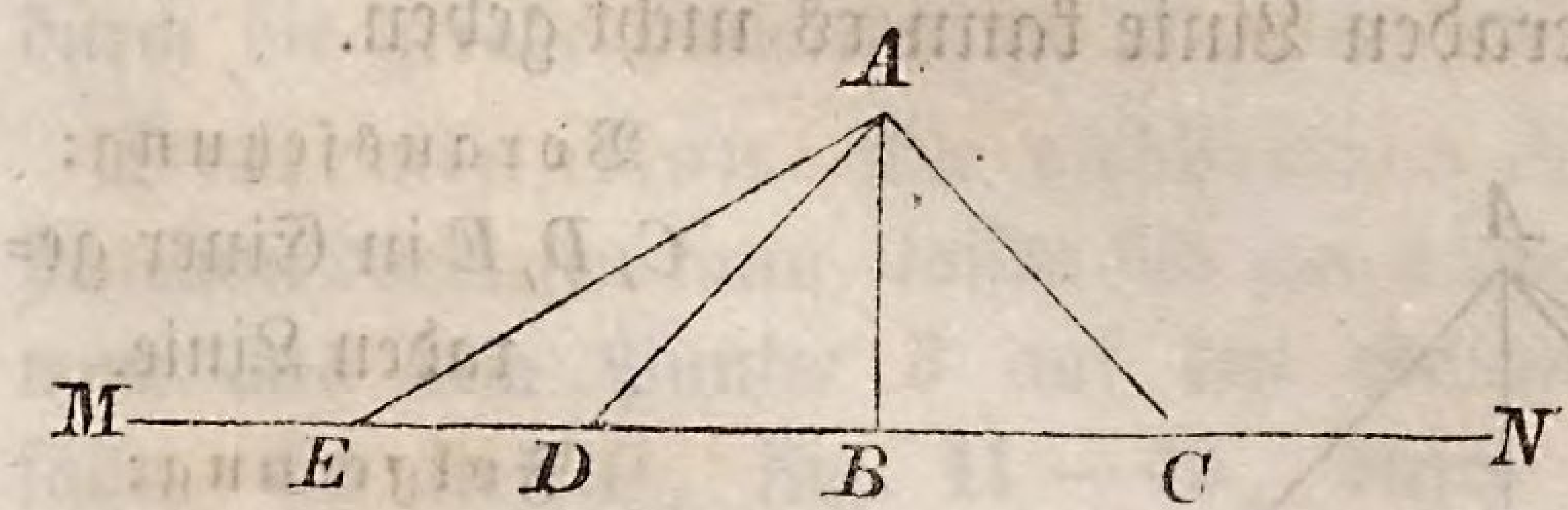
Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn DE mit DC zusammenfällt, d. i. durch die Spitze des Dreiecks geht, w. z. b. w.

§. 74.

Lehrsatz. Wenn man aus einem gegebenen Punkte, welcher außerhalb einer gegebenen geraden Linie liegt, Strahlen nach dieser Linie zieht, und die Längen dieser Strahlen unter einander vergleicht, so ergiebt sich Folgendes:

1) Der kürzeste von diesen Strahlen ist das Perpendikel, welches aus dem gegebenen Punkte auf die gegebene gerade Linie gefällt wird.

Fig. 39.



Voraussetzung:

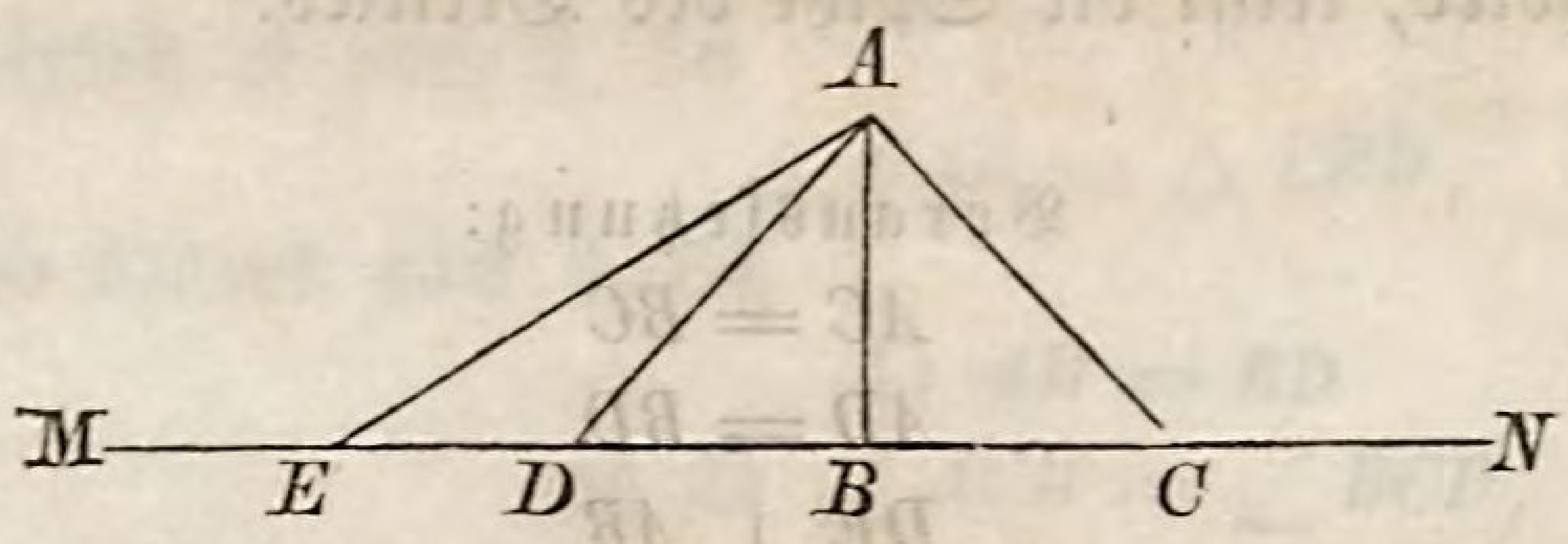
$AB \perp MN.$

Folgerung:

$AB < AC.$

Beweis folgt aus §. 67.

2) Jede zwei Strahlen, deren Fußpunkte auf der gegebenen geraden Linie sich gleich weit von dem Fußpunkte des Perpendikels entfernen, sind gleich lang.

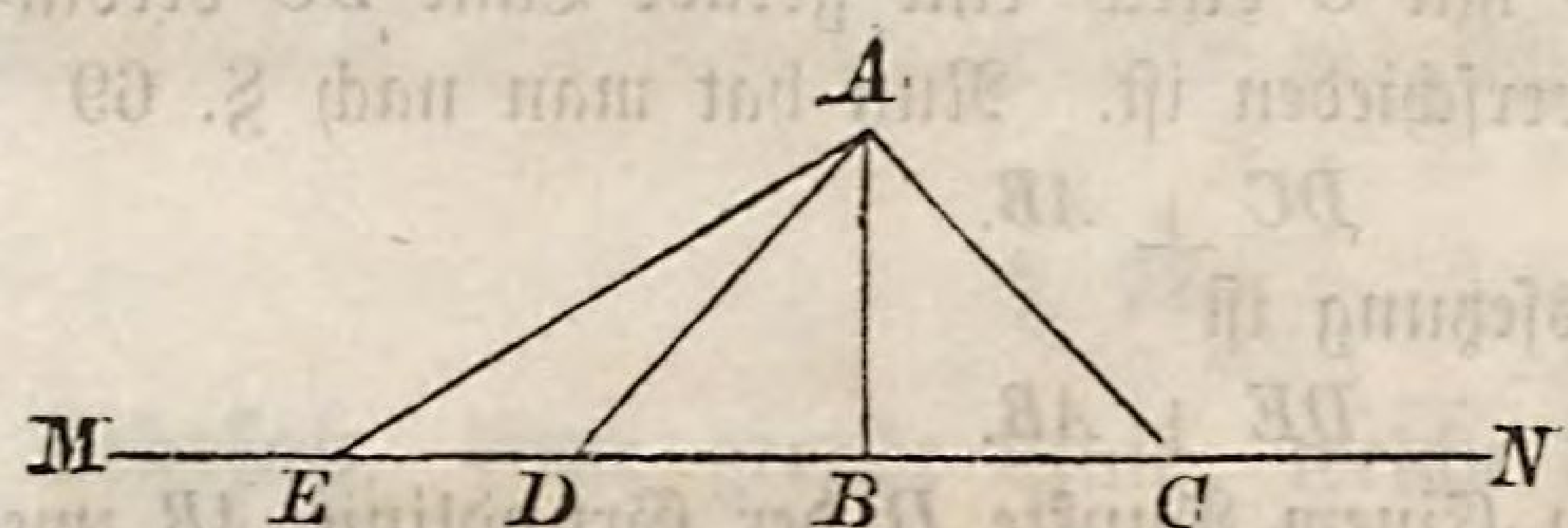


Voraussetzung:
$AB \perp MN$
$BC = BD.$

Folgerung:
$AC = AD.$

Beweis folgt aus §. 60.

3) Jeder Strahl ist desto länger, je weiter sein Fußpunkt auf der gegebenen geraden Linie sich von dem Fußpunkte des Perpendikels entfernt.



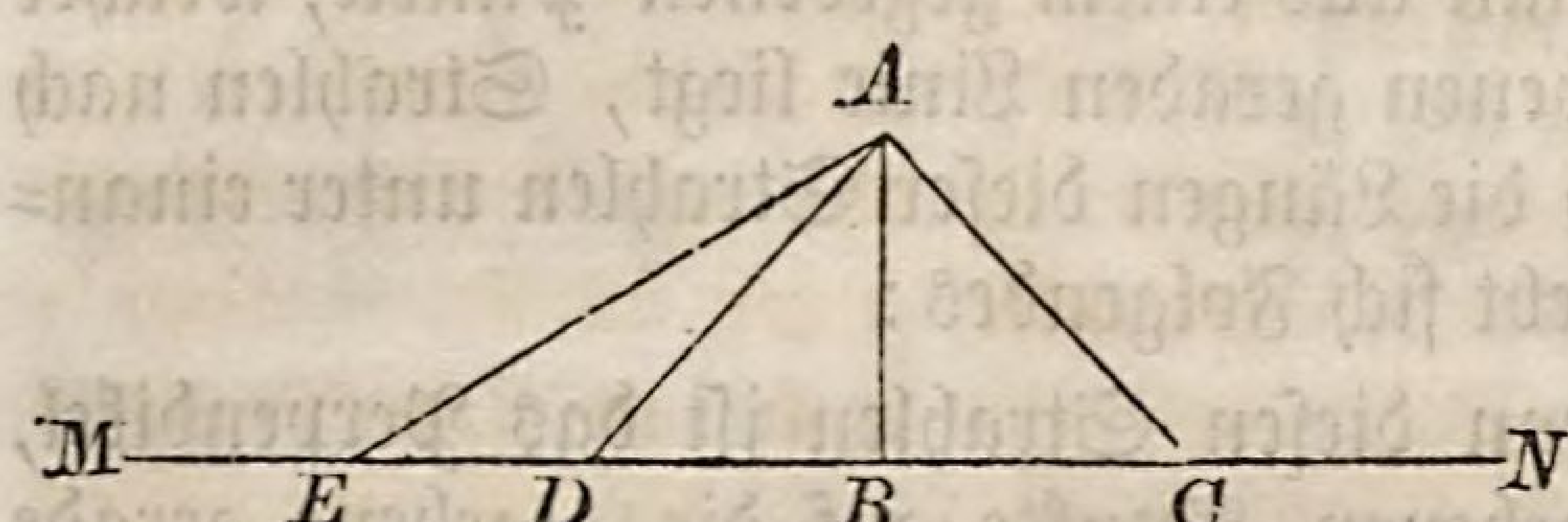
Voraussetzung:
$AB \perp MN$
$BE > BD.$

Folgerung:
$AE > AD.$

Beweis folgt aus §. 67.

4) Je länger ein Strahl ist, desto weiter muß sein Fußpunkt auf der gegebenen geraden Linie sich von dem Fußpunkte des Perpendikels entfernen.

(Umkehrung des Vorigen.)

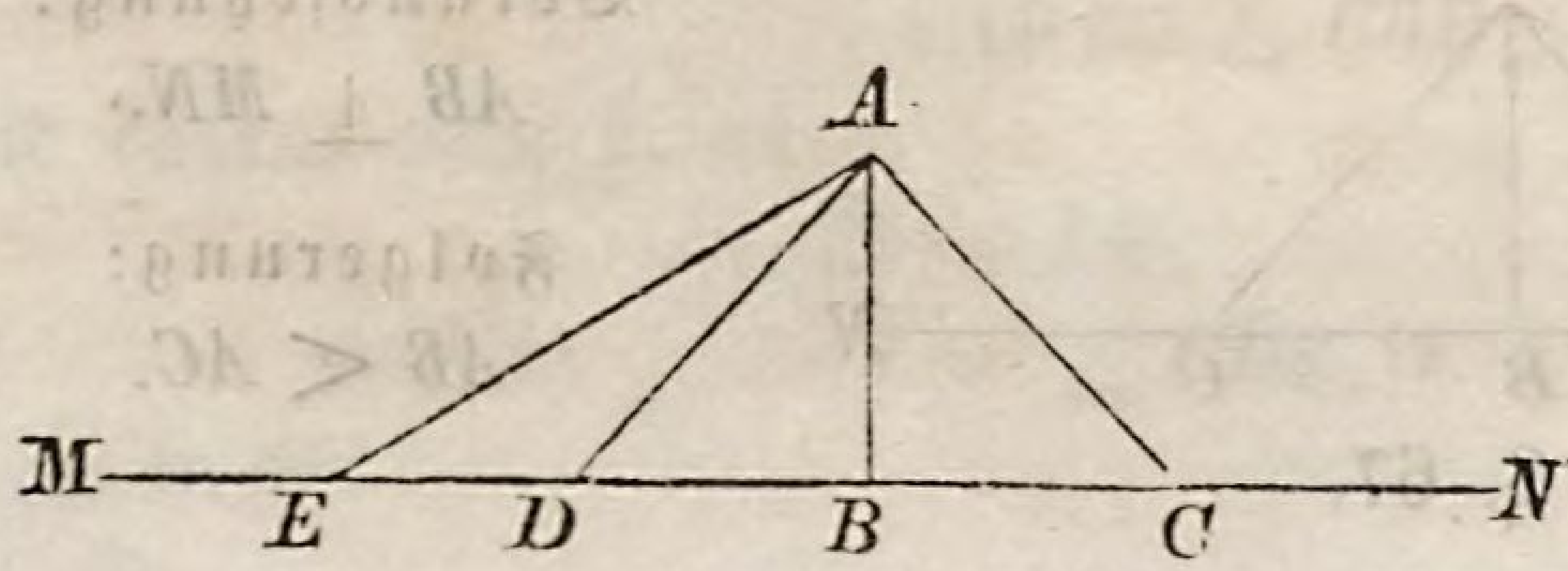


Voraussetzung:
$AB \perp MN$
$AE > AD.$

Folgerung:
$BE > BD.$

Beweis indirect aus 2. und 3.

5) Drei gleich lange Strahlen von dem gegebenen Punkte nach der gegebenen geraden Linie kann es nicht geben.



Voraussetzung:
C, D, E in Einer geraden Linie.

Folgerung:
$AC = AD = AE$ ist unmöglich.

Beweis. Gesetzt es sei $AC = AD = AE$. Aus der Gleichung $AC = AD$ folgt, vermöge des Lehrsatzes §. 61, daß $\angle ADC$ ein spitzer Winkel ist. Aus der Gleichung $AD = AE$ folgt ebenso, daß $\angle ADE$ ein spitzer Winkel ist. Folglich hat man

$$\angle ADC + \angle ADE < 2\,R,$$

welches den Lehrsatz §. 23 widerstreitet.

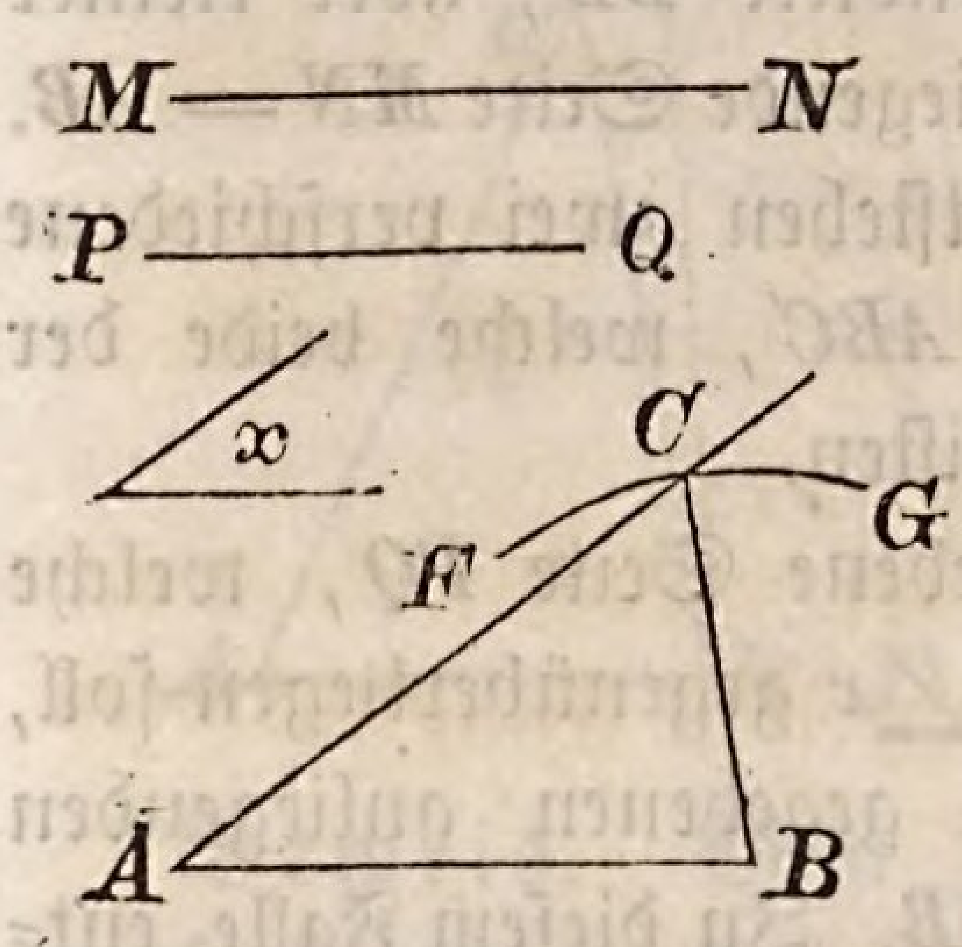
Der Widerspruch hört nur auf, wenn nicht $AC = AD = AE$ ist, w. z. b. w.

Vierte Dreiecks-Construction.

§. 75.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten und dem der einen dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 40.



Gegeben:
MN, PQ als Seiten,
$\angle x$ als gegenüberliegend PQ.

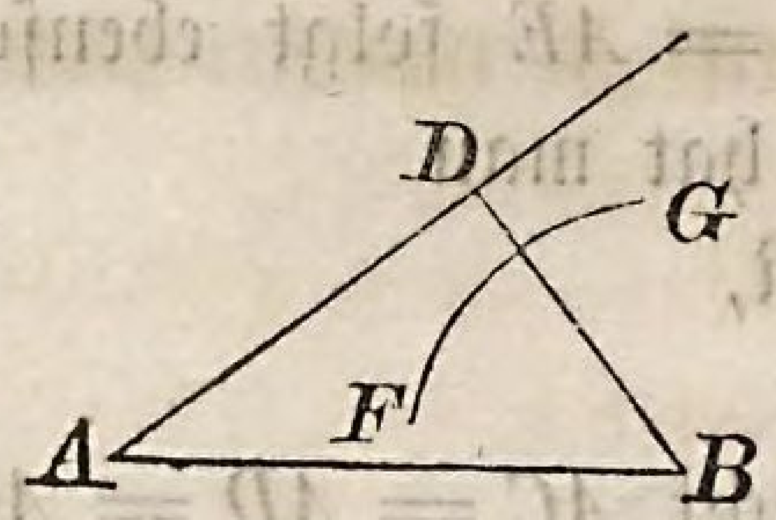
Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB und mache dieselbe so lang wie die gegebene MN, welche dem gegebenen $\angle x$ anliegen soll. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ferner construire man aus dem Punkte B als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Seite PQ, einen Kreisbogen FG. Verbindet man endlich den Punkt C, in welchem dieser Kreisbogen den Schenkel AC schneidet, mit B durch die gerade Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die verschiedenen Fälle, welche diese Construction darbieten kann, lassen sich am bequemsten übersehen, wenn man aus dem Punkte B auf den Schenkel AC ein Perpendikel fällt. Es sei BD, Fig. 41—45, dieses Perpendikel. Alsdann erhält man:

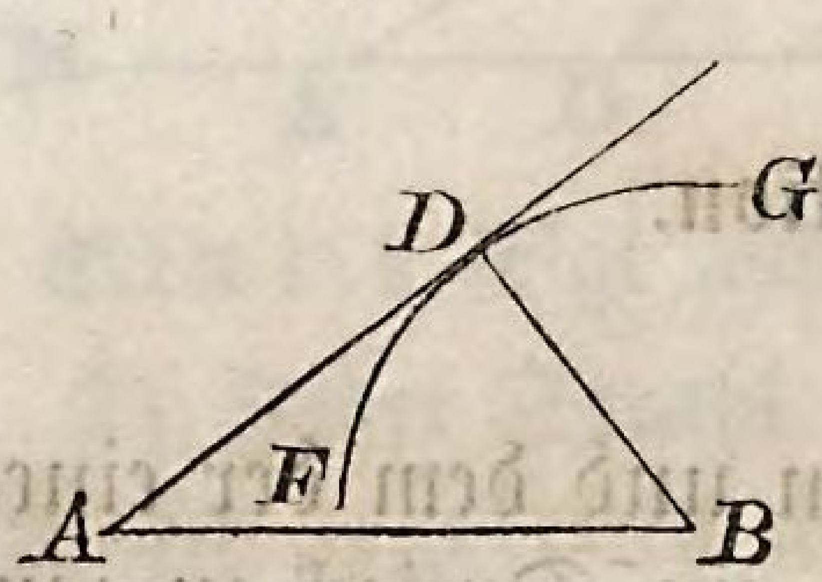
I. Der gegebene $\angle x$ sei ein spitzer Winkel.

Fig. 41.



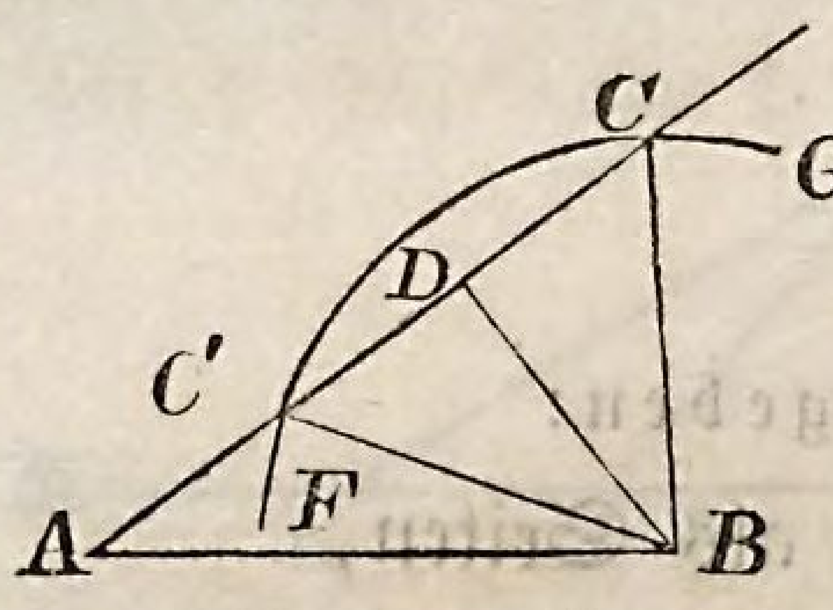
1) Die gegebene Seite PQ, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei kleiner als dieses Perpendikel BD. In diesem Falle kommt kein Dreieck zu Stande, oder die Aufgabe ist unmöglich.

Fig. 42.



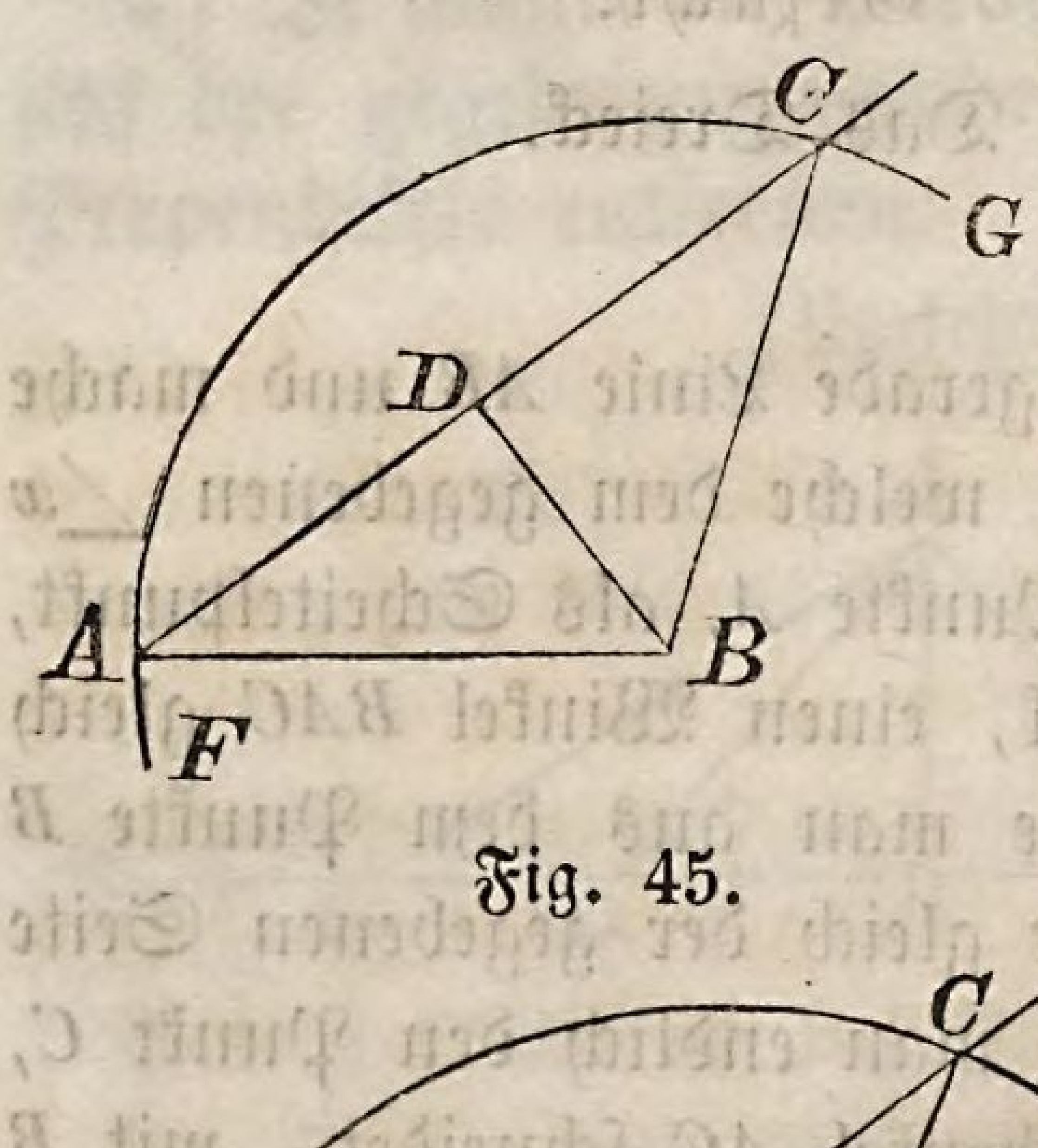
2) Die gegebene Seite PQ, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei gleich dem Perpendikel BD. In diesem Falle entsteht das rechtwinkelige Dreieck ABD.

Fig. 43.



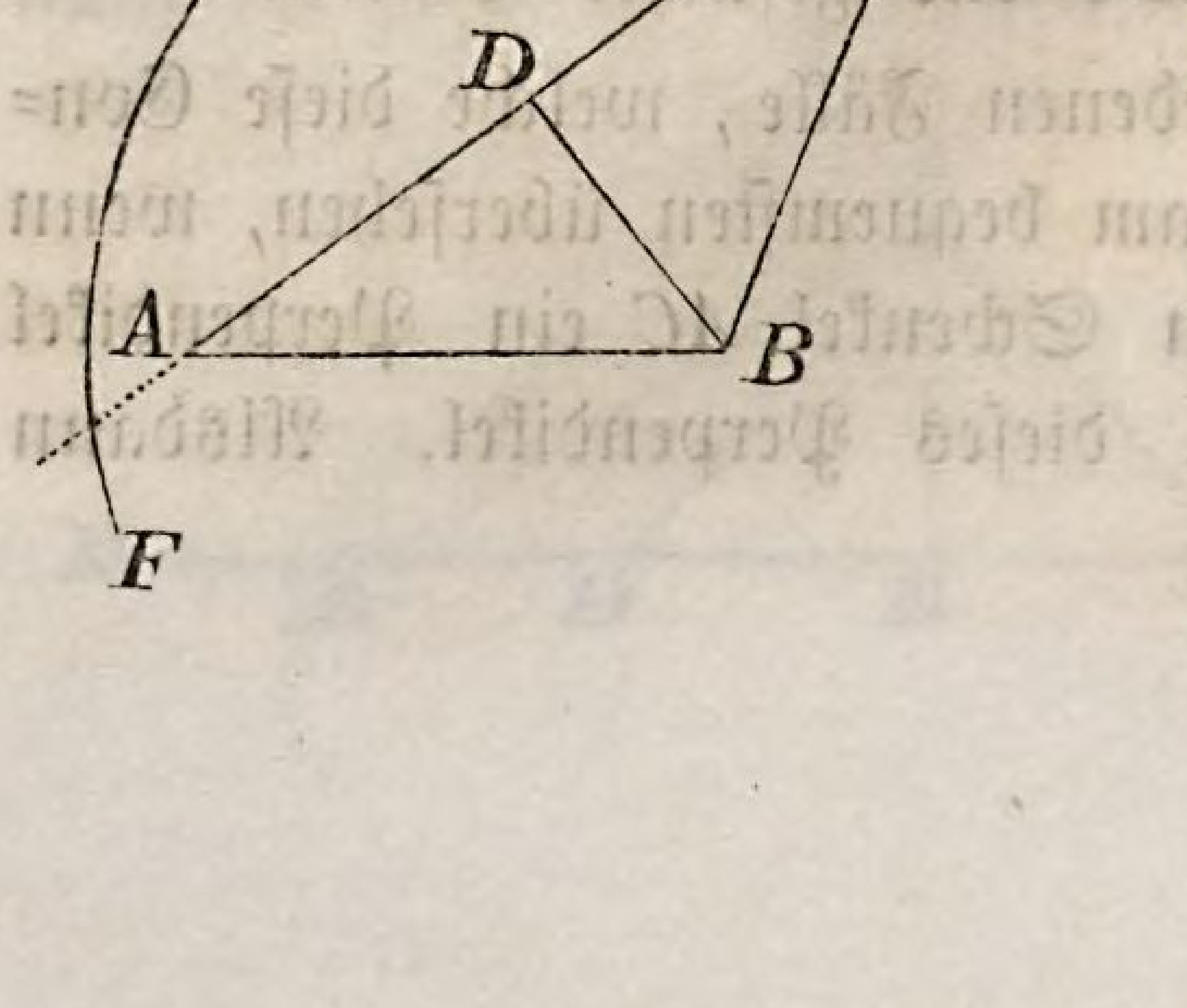
3) Die gegebene Seite PQ, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei größer, als das Perpendikel BD, aber kleiner als die gegebene anliegende Seite $MN = AB$. In diesem Falle entstehen zwei verschiedene Dreiecke ABC und ABC', welche beide der Aufgabe Genüge leisten.

Fig. 44.



4) Die gegebene Seite PQ, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei gleich der gegebenen anliegenden Seite $MN = AB$. In diesem Falle entsteht das gleichschenkelige Dreieck ABC.

Fig. 45.



5) Die gegebene Seite PQ, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei größer als die gegebene anliegende Seite $MN = AB$. In diesem Falle entsteht ein Dreieck ABC.

II. Der gegebene $\angle x$ sei ein rechter oder stumpfer Winkel.

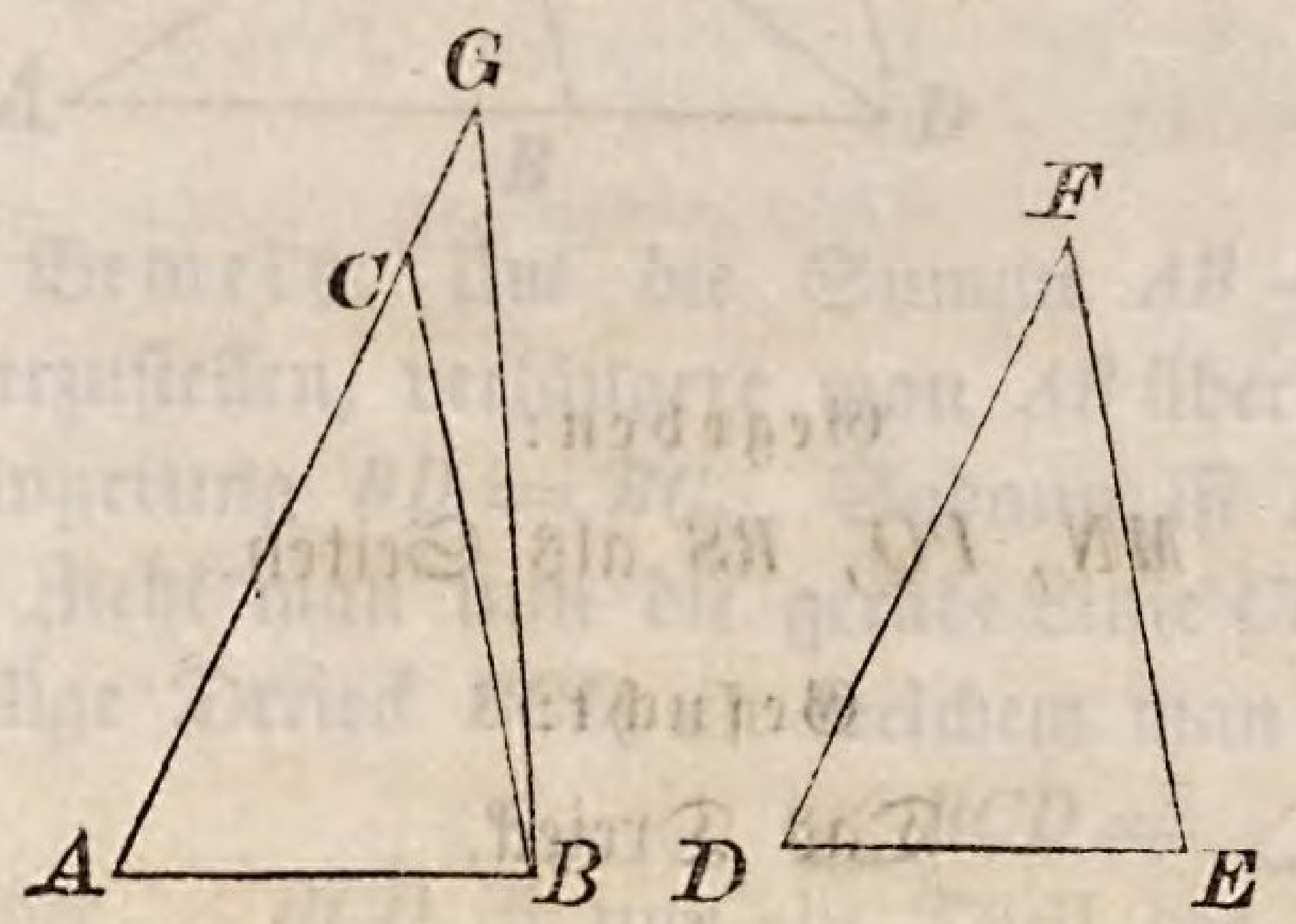
Hier kann von der vorigen Aufzählung nur der 5. Fall bestehen bleiben, indem in den vier andern Fällen kein Dreieck zu Stande kommt.

Die Begründung dieser Determination folgt aus dem Lehrsatze §. 74.

§. 76.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 46.



Voraussetzung:

$AB = DE$

$BC = EF$

$\angle BAC = \angle EDF$

$BC > AB$, $EF > DE$.

Folgerung:

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß DE auf AB fällt, d. h. D auf A, und E auf B, welches möglich ist, da beide Seiten nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann muß auch der Schenkel DF der Richtung nach auf den Schenkel AC fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle BAC = \angle EDF$ ist. Nun entsteht die Frage: ob auch der Punkt F in den Punkt C fallen wird.

Gesetzt es falle F nicht in C, sondern in einen andern Punkt des Schenkels AC, z. B. über C hinaus in G. Man ziehe BG. Alsdann wird das Dreieck DEF das Dreieck ABG decken, also $EF = BG$ sein. Aber nach der Voraussetzung ist $BC = EF$. Also ist auch $BC = BG$, oder das Dreieck BCG ist gleichschenkelig, und deshalb vermöge des §. 61 $\angle BCG$ ein spitzer Winkel und folglich sein Nebenwinkel $\angle BCA$ ein stumpfer Winkel. Daraus aber folgt nach §. 67

$$AB > BC,$$

und dies ist ein Widerspruch gegen die Voraussetzung $BC > AB$.

Derselbe Widerspruch würde zum Vorschein gekommen sein, wenn man den Punkt G zwischen A und C angenommen hätte.

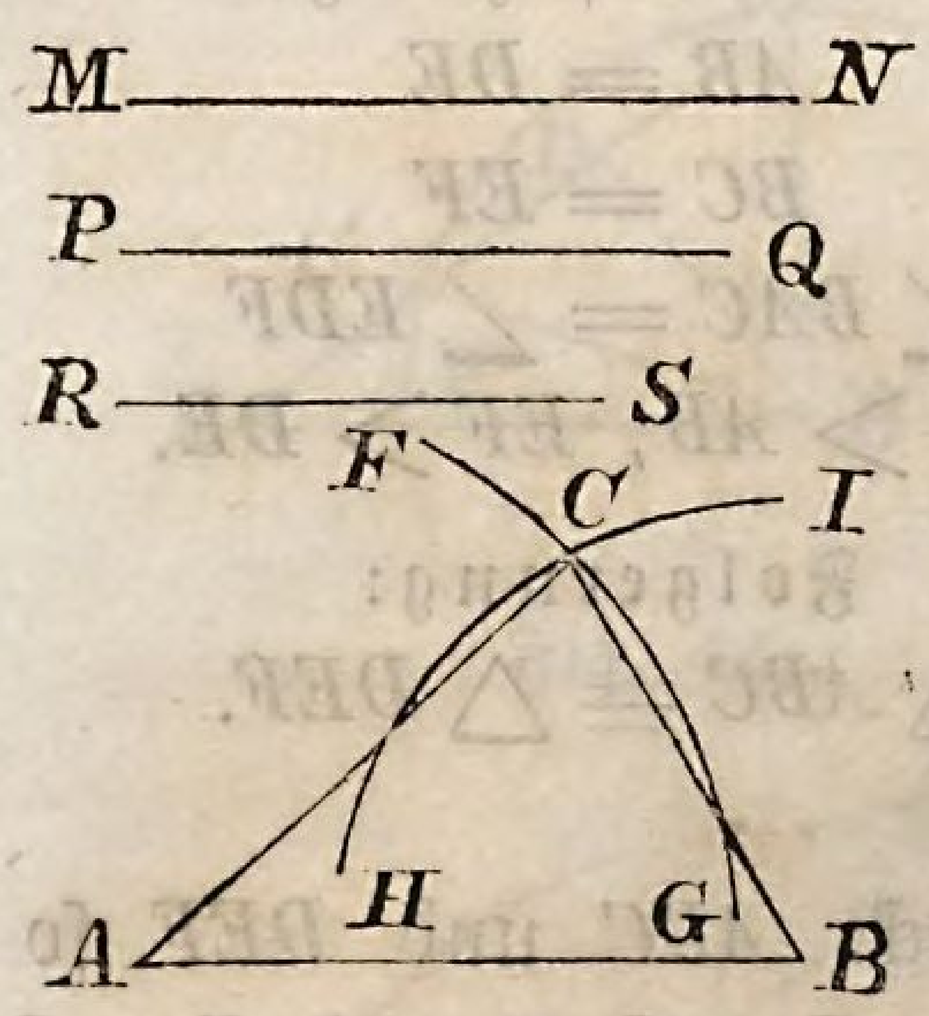
Der Widerspruch wird nur gehoben, wenn der Punkt G nicht verschieden von C ist. In diesem Falle deckt das Dreieck DEF vollständig das Dreieck ABC, d. h. diese beiden Dreiecke sind congruent, w. z. b. w.

Fünfte Dreiecks-Construction.

§. 77.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Seiten ein Dreieck zu construiren.

Fig. 47.



Gegeben:
MN, PQ, RS als Seiten.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB und mache dieselbe so lang wie die gegebene MN. Alsdann construire man aus dem Punkte A, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Seite PQ einen Kreisbogen FG. Ferner construire man aus dem Punkte B, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Seite RS, einen Kreisbogen HI. Verbindet man endlich denjenigen Punkt C, in welchem diese beiden Kreisbögen einander schneiden, mit A und B durch die geraden Linien AC und BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Construction ist nur möglich, wenn die drei gegebenen Seiten MN, PQ und RS den beiden Bedingungen Genüge leisten

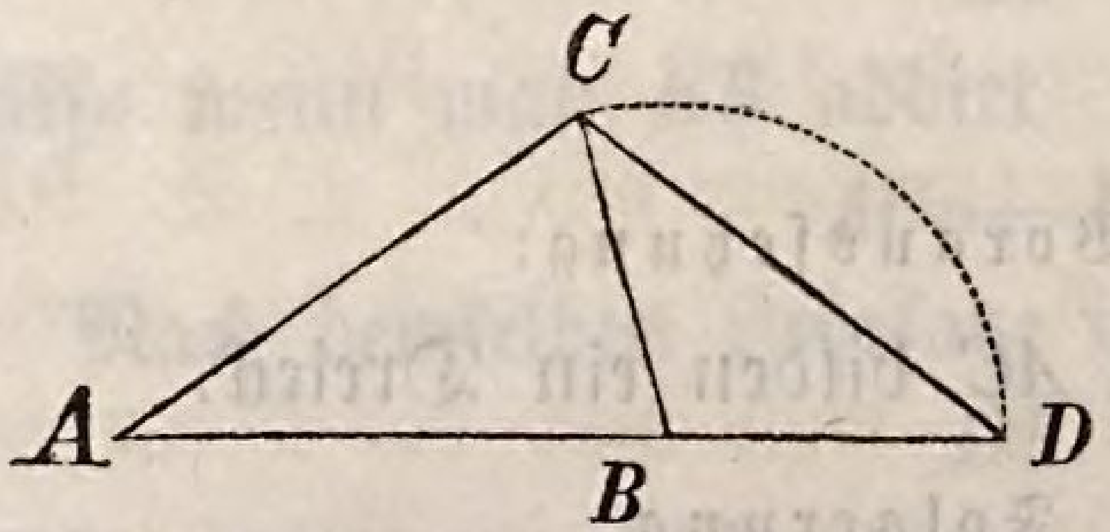
$$MN + PQ > RS,$$
$$MN - PQ < RS.$$

z. B. wenn zwei Seiten eines Dreiecks zu 6 und 11 Fuß willkürlich gegeben sind, so muß die dritte Seite kleiner als 17 und größer als 5 Fuß angenommen werden, wenn aus diesen drei Seiten ein Dreieck zu Stande kommen soll. Der Grund hiervon liegt in den beiden folgenden Lehrsätzen.

§. 78.

Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Fig. 48.



Voraussetzung:

AB, BC, AC bilden ein Dreieck.

Folgerung:

$AB + BC > AC$.

Beweis. Um die Summe $AB + BC$ in Einer geraden Linie darzustellen, verlängere man AB über B hinaus und mache die Verlängerung $BD = BC$. Sodann ist $AD = AB + BC$.

Zieht man nun die gerade Linie CD, so entsteht das gleichschenkelige Dreieck BCD, in welchem man nach §. 61 hat

$$\angle BCD = \angle BDC.$$

Aber $\angle BCD$ ist nur ein Theil des $\angle ACD$, also

$$\angle ACD > \angle BDC.$$

Diese beiden Winkel sind nun Winkel des Dreiecks ADC, und wenn man darauf den Lehrsatz §. 66 anwendet, so wird

$$AD > AC,$$

$$\text{d. i. } AB + BC > AC,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Man beweist diesen Lehrsatz häufig auf eine Weise, die ihrer Kürze wegen hier noch erwähnt werden mag.

Zwischen den beiden Punkten A und C ist der kürzeste Weg die gerade Linie AC; jeder andere Weg ist länger, also auch z. B. der Weg von A über B nach C, d. h. der Weg $AB + BC$. Folglich hat man $AB + BC > AC$, w. z. b. w.

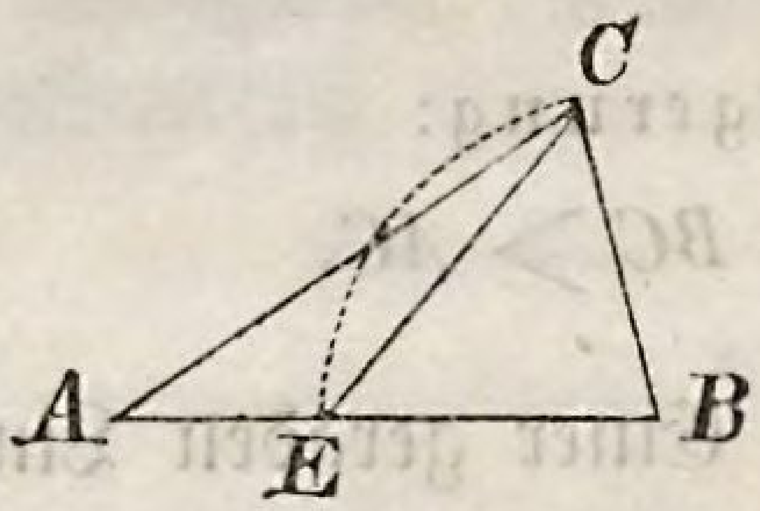
Dieser Beweis hat die besondere Eigenschaft, daß er sich nicht auf vorhergegangene Sätze der Planimetrie, sondern auf einen eigenthümlichen Grundsatz stützt, welcher lautet: „Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie.“ So einfach nun auch

dieser Grundsatz ist und so leicht er von jedermann zugestanden wird, so darf man doch nicht in einer wissenschaftlichen Geometrie gewissen Beweisen zu Gefallen neue Grundsätze einführen, und deshalb gehört jener Beweis nicht hieher. Auch findet er sich nicht bei Euklides.

§. 79.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

Fig. 49.



Voraussetzung:

AB, *BC*, *AC* bilden ein Dreieck.

Folgerung:

$AB - BC < AC$.

Beweis. Um die Differenz $AB - BC$ in Einer geraden Linie darzustellen, schneide man auf *AB* von *B* aus eine Länge $BE = BC$ ab. Alsdann ist $AE = AB - BC$.

Zieht man nun die gerade Linie *CE*, so entsteht das gleichschenkelige Dreieck *BCE*, in welchem nach §. 61 die Winkel an der Grundlinie *CE* gleich groß, und mithin spitze Winkel sind. Folglich ist $\angle AEC$ als Nebenwinkel eines spitzen Winkels ein stumpfer Winkel. Dieser Winkel ist nun ein Winkel des Dreiecks *AEC*; man hat also mit Anwendung des §. 67

$$AE < AC,$$

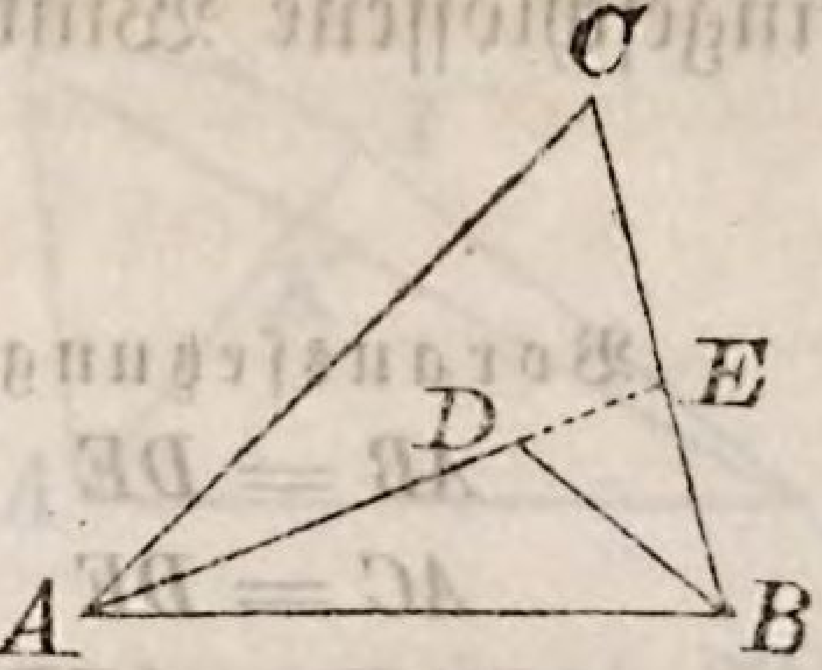
$$\text{d. i. } AB - BC < AC,$$

w. z. b. w.

§. 80.

Lehrsatz. Wenn man über einer gemeinschaftlichen Seite zwei Dreiecke construirt, von denen das eine völlig in das andere fällt, so ist die Summe der nicht gemeinschaftlichen Seiten in dem umschließenden Dreiecke größer als in dem umschlossenen.

Fig. 50.



Voraussetzung:

$\triangle ABC$ umschließt $\triangle ABD$.

Folgerung:

$AC + CB > AD + DB$.

Beweis. Man verlängere AD bis E. Alsdann ist nach dem Lehrsatze §. 78

$$AC + CE > AE,$$

also wenn man EB addirt

$$AC + CB > AE + EB.$$

Nach demselben Lehrsatze ist ferner

$$DE + EB > DB,$$

also wenn man AD addirt

$$AE + EB > AD + DB.$$

Aus beiden Schlüssen zusammen genommen ergiebt sich

$$AC + CB > AD + DB,$$

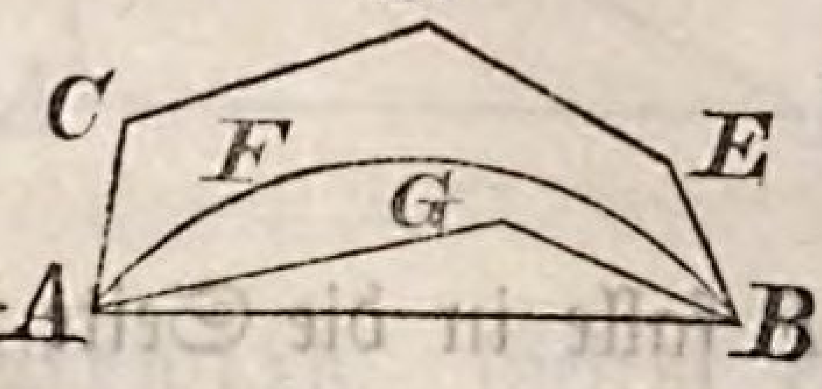
w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist der einfachste Fall eines viel allgemeineren Satzes, welcher in den späteren Theilen der Geometrie häufig gebraucht wird und welchen Archimedes in seinem Buche über die Kugel ausdrückt wie folgt:

„Wenn von zwei Linien, welche einerlei Endpunkte haben und nach einerlei Seite hohl sind, die eine die andere ganz umschließt, so ist die umschließende Linie größer als die umschlossene."

Das Wort Linie wird hier in demselben allgemeinen Sinne genommen, wie im §. 2 Anm. So ist z. B. die gebrochene Linie $ACDEB$, Fig. 51, länger als die krumme Linie AFB, und diese wieder länger als die gebrochene Linie AGB. Alle diese Linien sind nach einerlei Seite hohl, nämlich sie wenden sämmtlich ihre hohle Seite nach der geraden Linie AB hin.

Fig. 51.

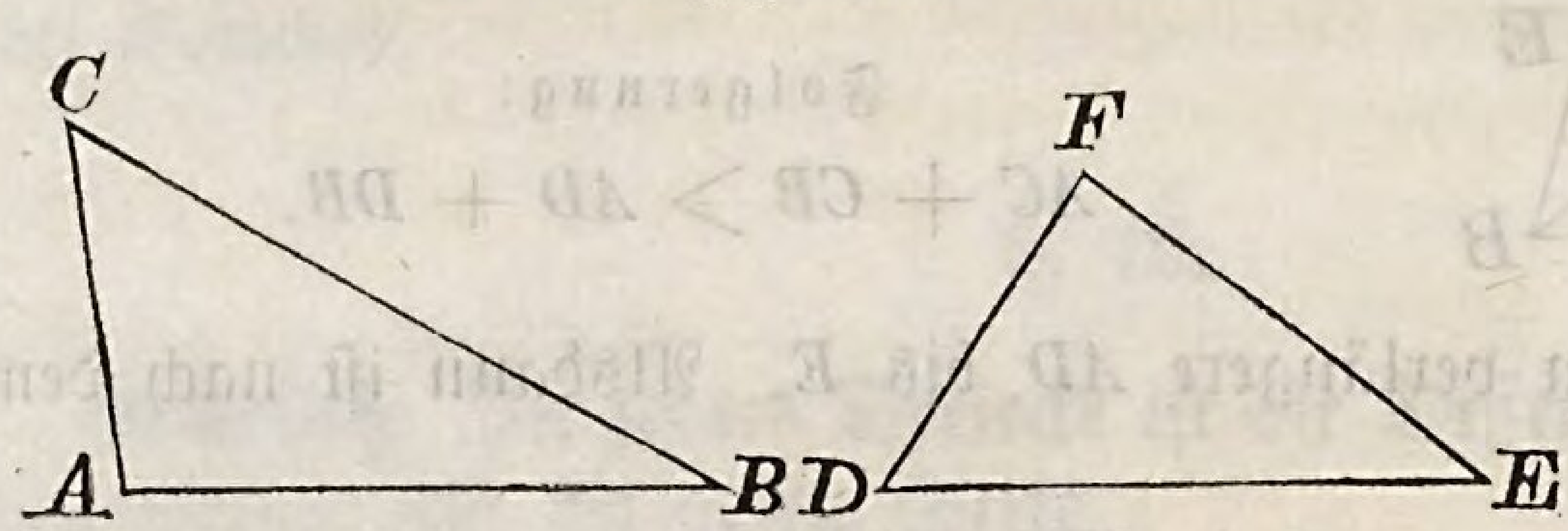


§. 81.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel aber un=

gleich sind, so ist die dritte Seite in demjenigen von beiden Dreiecken die größere, in welchem der eingeschlossene Winkel der größere ist.

Fig. 52.



Voraussetzung:

$AB = DE$

$AC = DF$

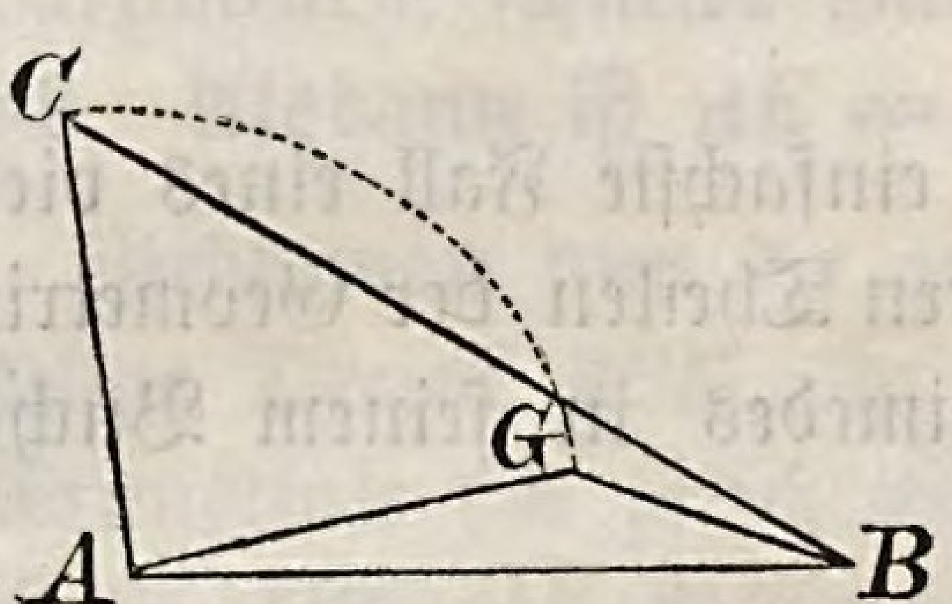
$\angle BAC > \angle EDF.$

Folgerung:

$BC > EF.$

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß eine der gleichen Seiten zusammenfällt, z. B. DE auf AB, d. h. D auf A und E auf B. Alsdann muß die Seite DF innerhalb des Winkels ABC fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle BAC > \angle EDF$ ist. Es entsteht nun noch die Frage, wohin der Punkt F fallen wird; hier lassen sich drei Fälle unterscheiden.

Fig. 53.



1) Der Punkt F falle innerhalb des Dreiecks ABC in G, Fig. 53, so daß $\triangle DEF$ die Lage ABG annimmt. Alsdann ist nach dem vorigen Lehrsatze

$$AC + BC > AG + BG.$$

Aber in Folge der Voraussetzung ist

$$AC = AG,$$

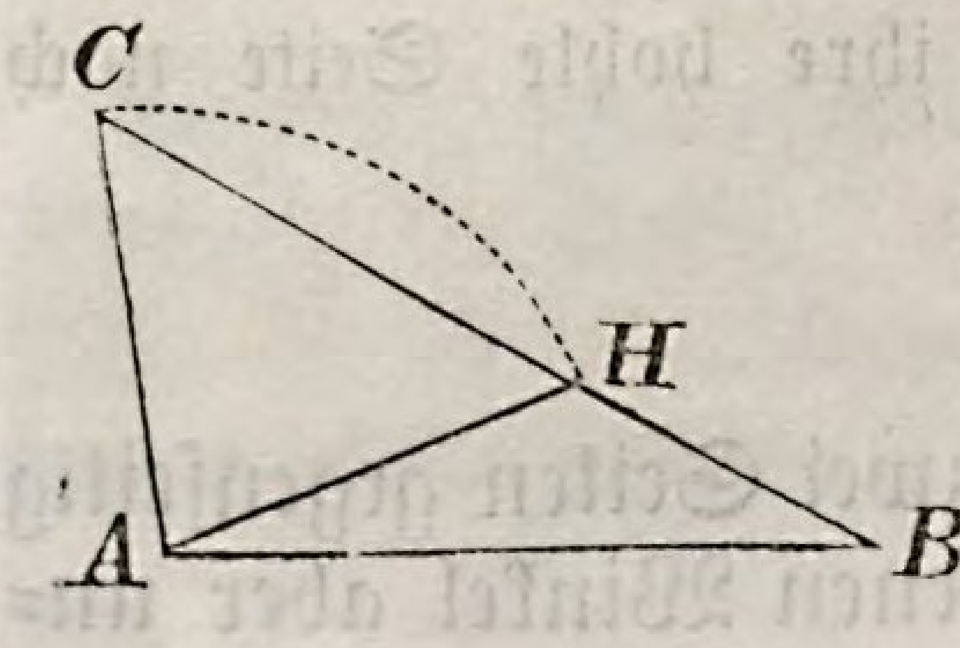
und wenn man diese Gleichung von dem Vorigen subtrahirt, so bleibt

$$BC > BG,$$

d. i. $BC > EF$,

w. z. b. w.

Fig. 54.



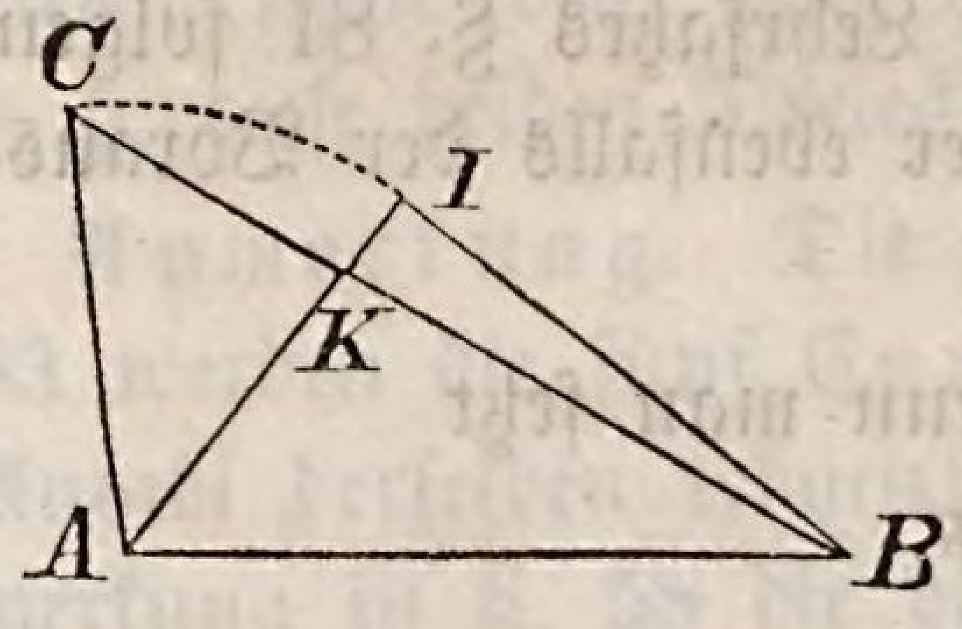
2) Der Punkt F falle in die Seite BC in H, Fig. 54, so daß $\triangle DEF$ die Lage ABH annimmt. Alsdann zeigt sich unmittelbar aus der Figur, daß

$$BC > BH,$$

d. i. $BC > EF$,

w. z. b. w.

Fig. 55.



3) Der Punkt F falle außerhalb des Dreiecks ABC in I, Fig. 55, so daß $\triangle\ DEF$ die Lage ABI annimmt. Alsdann findet man durch zweimalige Anwendung des Lehrsatzes §. 78

$$AK + KC > AC$$
$$BK + KI > BI$$

und daraus durch Addition

$$AI + BC > AC + BI.$$

Aber in Folge der Voraussetzung ist

$$AI = AC,$$

und wenn man diese Gleichung von dem Vorigen subtrahirt, so bleibt

$$BC > BI,$$

d. i. $BC > EF$,

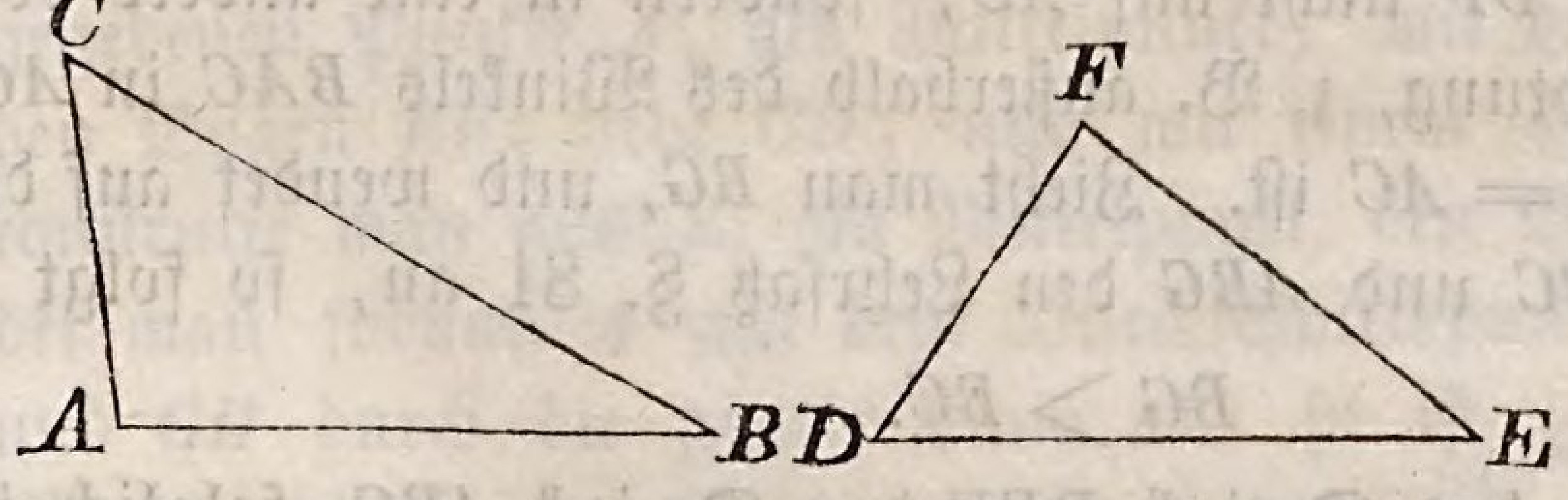
w. z. b. w.

§. 82.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich sind, die dritte Seite aber in beiden Dreiecken ungleich ist, so ist der von den ersteren beiden Seiten eingeschlossene Winkel in demjenigen Dreiecke der größere, in welchem die dritte Seite die größere ist.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 52.



Voraussetzung:

$AB = DE$
$AC = DF$
$BC > EF.$

Folgerung:

$\angle BAC > \angle EDF.$

Beweis. Gesetzt es sei nicht $\angle BAC > \angle EDF$, so könnte entweder $\angle BAC = \angle EDF$, oder $\angle BAC < \angle EDF$ sein.

Im ersten Falle, wo $\angle BAC = \angle EDF$ angenommen wird, müßten nach dem Lehrsatze §. 60 die beiden Dreiecke ABC und DEF congruent sein, also auch $BC = EF$. Dies widerstreitet aber der Voraussetzung, wo $BC > EF$ ist.

Im zweiten Falle, wo $\angle BAC < \angle EDF$ angenommen wird, würde aus der Anwendung des vorigen Lehrsatzes §. 81 folgen, daß $BC < EF$ ist. Dies widerstreitet aber ebenfalls der Voraussetzung $BC > EF$.

Der Widerspruch wird aufgehoben, wenn man setzt

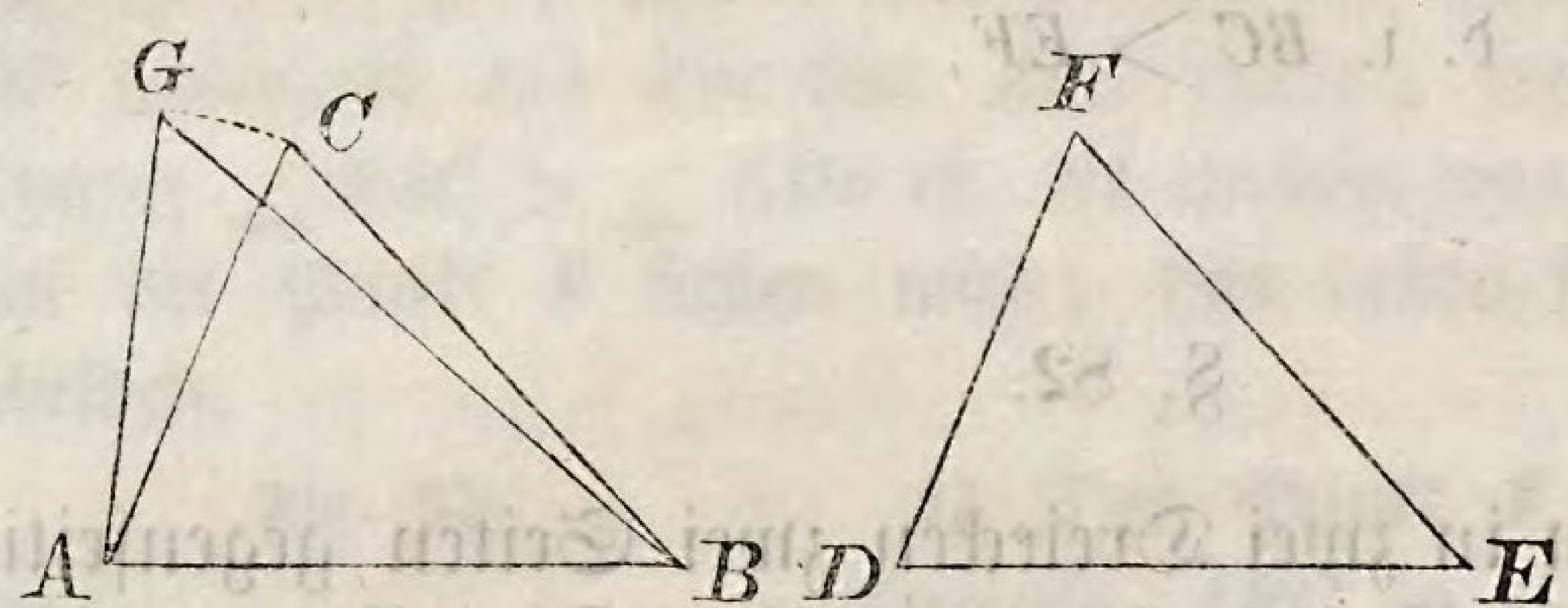
$$\angle BAC > \angle EDF,$$

w. z. b. w.

§. 83.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 56.



Voraussetzung:

$AB = DE$

$AC = DF$

$BC = EF.$

Folgerung:

$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß DE auf AB fällt, d. h. D auf A und E auf B, welches möglich ist, da beide Seiten nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann entsteht zunächst die weitere Frage, ob auch die Seite DF auf AC fallen wird.

Gesetzt es falle DF nicht auf AC, sondern in eine andere von A ausgehende Richtung, z. B. außerhalb des Winkels BAC in AG, so daß $AG = DF = AC$ ist. Zieht man BG, und wendet auf die beiden Dreiecke ABC und ABG den Lehrsatz §. 81 an, so folgt

$$BG > BC.$$

Aber zugleich deckt das Dreieck DEF das Dreieck ABG, folglich ist $EF = BG$; und da nach der Voraussetzung $BC = EF$ ist, so folgt ferner

$$BG = BC,$$

und dieses Resultat widerspricht dem vorigen.

Derselbe Widerspruch würde erscheinen sein, wenn man angenommen hätte, die Seite DF falle innerhalb des Winkels BAC.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn *DF* auf *AC* fällt. In diesem Falle deckt das Dreieck *DEF* vollständig das Dreieck *ABC*, d. h. diese beiden Dreiecke sind congruent, w. z. b. w.

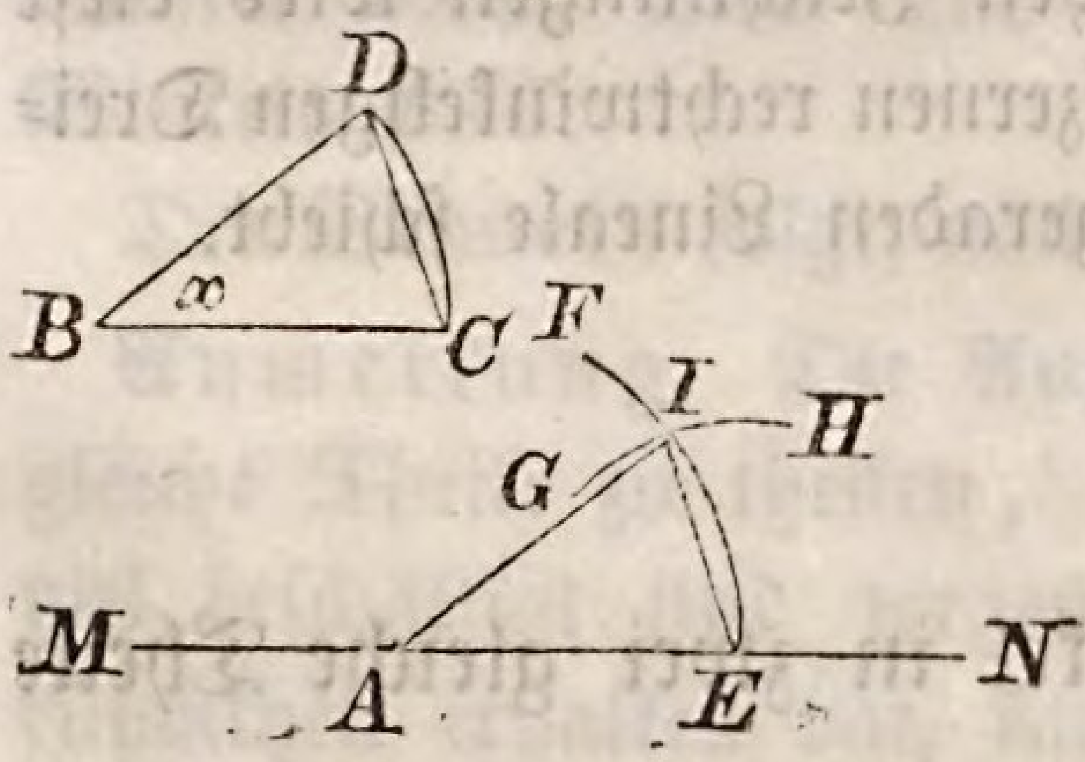
Anmerkung. Die fünf Lehrsätze §§. 56, 58, 60, 76 und 83 werden die fünf Congruenzsätze des Dreiecks genannt. Die Anzahl derselben reducirt sich auf vier, wenn man nach der Anmerkung zu §. 58 die beiden ersten dieser Sätze in einen einzigen zusammenzieht.

Aufgaben über das Dreieck.

§. 84.

Aufgabe. An eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte derselben einen gegebenen Winkel zu tragen.

Fig. 57.



Gegeben:

$\angle x$,

Linie *MN* mit dem Punkte *A*.

Gesucht:

$\angle x$ an *MN* in *A*.

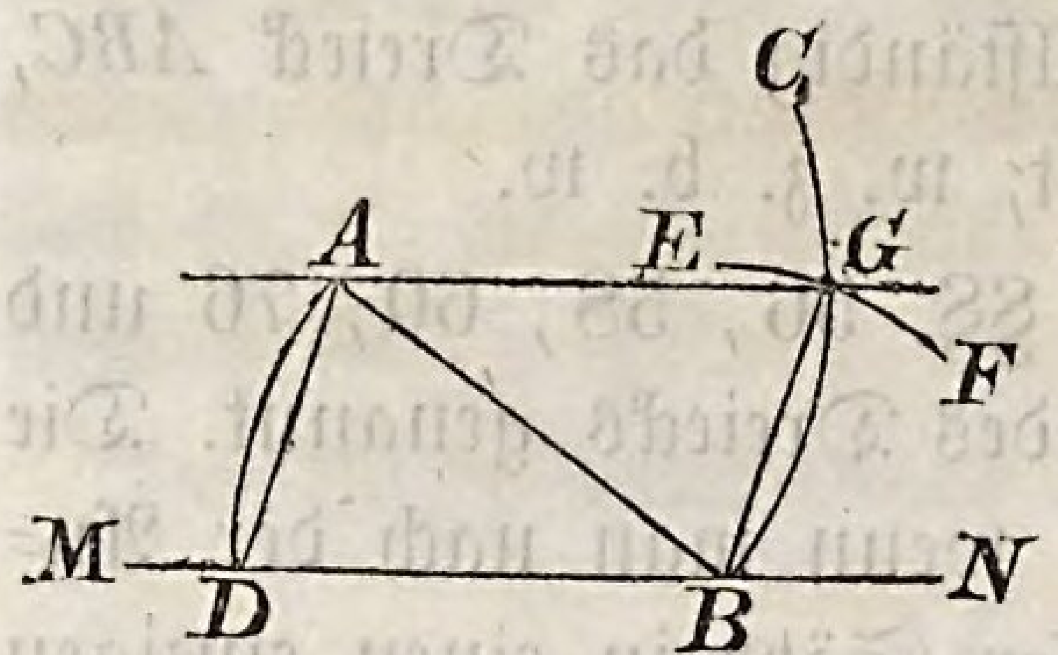
Construction. Man construire aus dem Scheitelpunkte *B* das $\angle x$, als Mittelpunkt, mit einem beliebigen Halbmesser *BC* zwischen den Schenkeln dieses Winkels den Bogen *CD*, und aus dem gegebenen Punkte *A*, als Mittelpunkt, mit demselben Halbmesser den Bogen *EF*; ziehe *CD*; und mit einem Halbmesser gleich *CD* construire man aus *E*, als Mittelpunkt, den Bogen *GH*. Verbindet man sodann *A* mit dem Durchschnittspunkt *I* der Bögen *EF* und *GH* durch die gerade Linie *AI*, so ist $\angle IAE$ der gesuchte Winkel $= \angle x$.

Der Beweis folgt, wenn man *EI* zieht, aus §. 83.

§. 85.

Aufgabe. Zu einer gegebenen geraden Linie durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu ziehen.

Fig. 58.



Gegeben:
Linie MN,
Punkt A.

Gesucht:
Parallele zu MN durch A.

Construction. Man construire aus dem gegebenen Punkte A mit einem beliebigen, jedoch hinreichend großen Halbmesser AB den Bogen BC, und aus B mit demselben Halbmesser den Bogen AD; ziehe AD; und mit einem Halbmesser gleich AD construire man aus B den Bogen EF. Verbindet man sodann A mit dem Durchschnittspunkte G der Bögen BC und EF durch die gerade Linie AG, so ist diese die gesuchte Parallele zu MN.

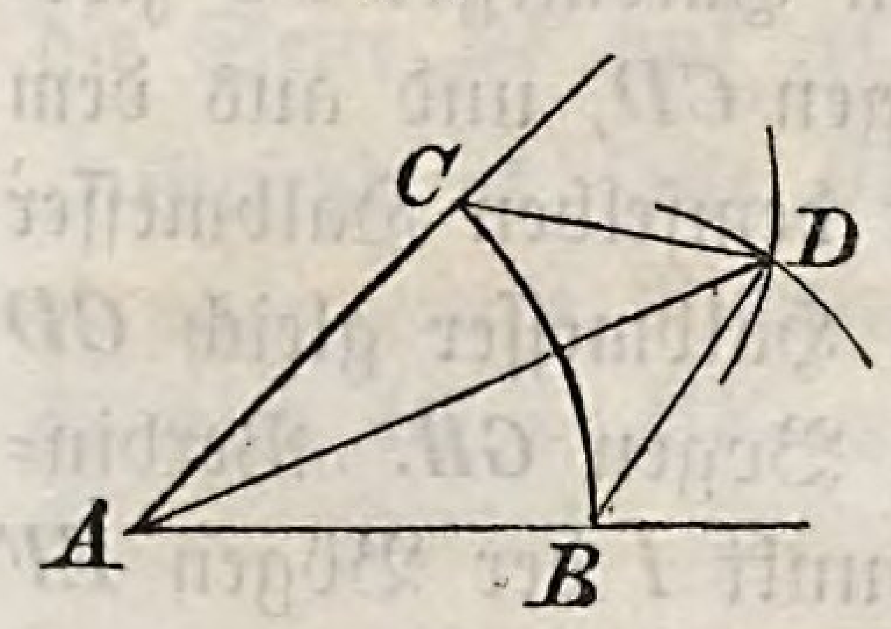
Der Beweis folgt, nachdem man BG gezogen hat, aus den §§. 83 und 37.

Anmerkung. In den planimetrischen Zeichnungen wird diese Aufgabe einfacher durch Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks gelöst, welches man längs einem geraden Lineale schiebt.

§. 86.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 59.



Gegeben:
$\angle BAC$.

Gesucht:
$\frac{1}{2} \angle BAC$.

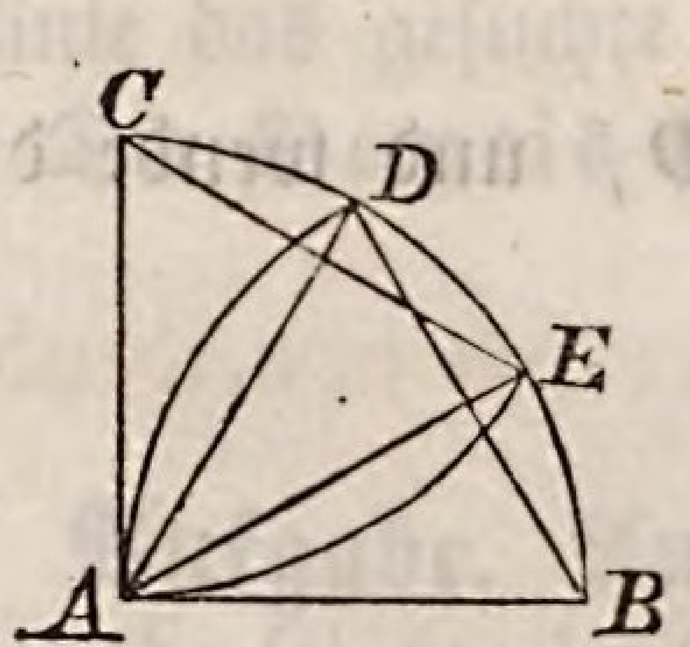
Construction. Man construire aus dem Scheitelpunkte A des gegebenen Winkels mit einem beliebigen Halbmesser zwischen den Schenkeln dieses Winkels den Bogen BC, und darauf aus B und C mit einerlei, jedoch hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche sich in D schneiden. Zieht man sodann AD, so ist sowohl $\angle DAC$ als $\angle DAB$ die gesuchte Hälfte von $\angle BAC$.

Zum Beweise ziehe man BD und CD, und wende §. 83 an.

§. 87.

Aufgabe. Einem gegebenen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 60.



Gegeben:
$\angle BAC = R$.

Gesucht:
$\frac{1}{3} \angle BAC$.

Construction. Man construire aus dem Scheitelpunkte A des gegebenen rechten Winkels mit einem beliebigen Halbmesser zwischen den Schenkeln dieses Winkels den Bogen BC, und darauf mit demselben Halbmesser aus B den Bogen AD, und aus C den Bogen AE. Zieht man nun AD und AE, so ist jeder der drei Winkel BAE, EAD und DAC ein Drittel des gegebenen rechten Winkels BAC.

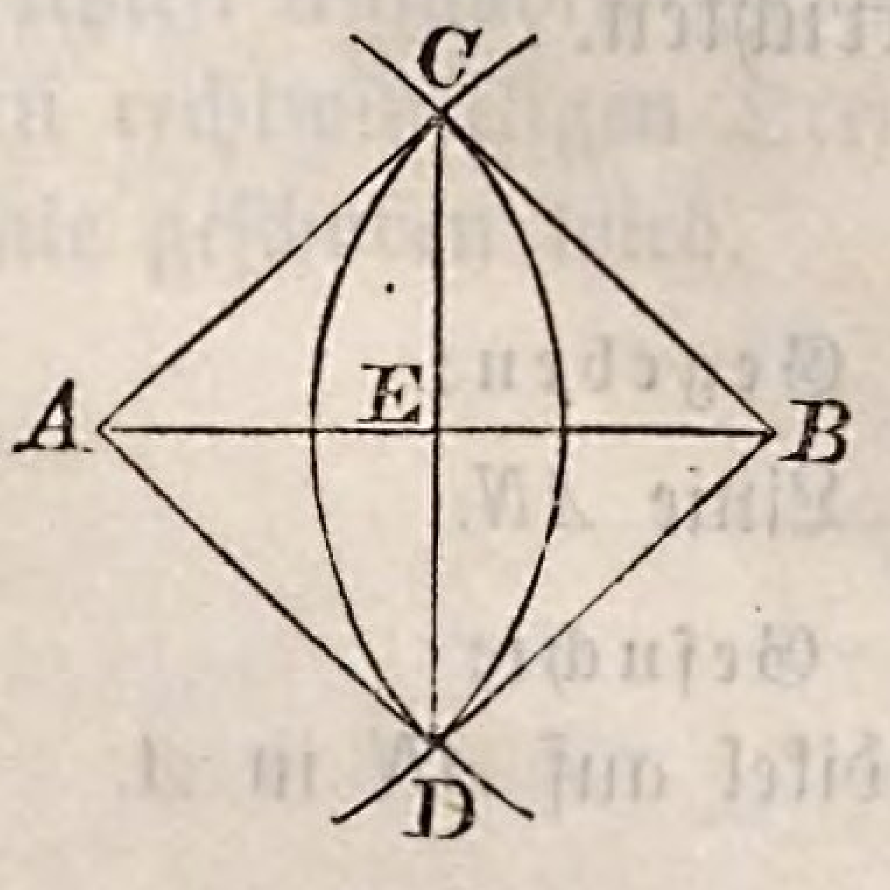
Der Beweis folgt, nachdem man BD und CE gezogen, aus §. 62.

Anmerkung. Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, welche die Griechen zur Zeit Platon's viel beschäftigt und wegen ihrer Schwierigkeit eine gewisse Berühmtheit erhalten hat, kann durch die Hülfsmittel der Elementar-Geometrie allein nicht aufgelöst werden.

§. 88.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 61.



Gegeben:
Linie AB.

Gesucht:
$\frac{1}{2} AB$.

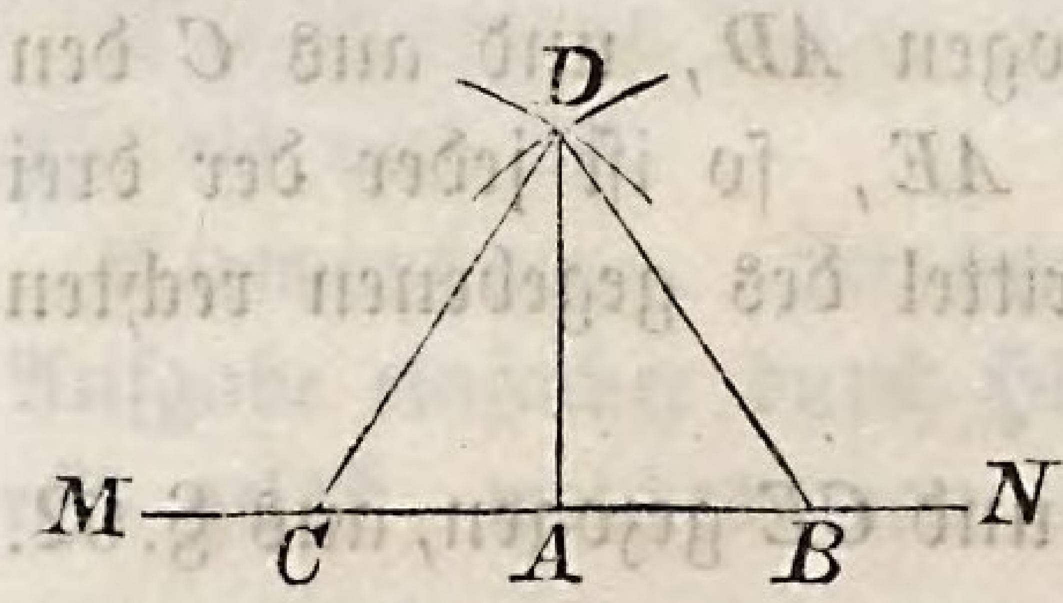
Construction. Man construire aus *A* und *B* mit einerlei, jedoch hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche sich in *C* und *D* durchschneiden, und ziehe *CD*. Der Schnittpunkt *E* theilt sodann die gegebene gerade Linie *AB* in die beiden gleichen Theile *AE* und *BE*.

Zum Beweise ziehe man *AC*, *BC*, *AD*, *BD*, und wende die §§. 83 und 60 an.

§. 89.

Aufgabe. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel auf dieser Linie zu errichten.

Fig. 62.



Gegeben:

Linie *MN* mit dem Punkte *A*.

Gesucht:

Perpendikel auf *MN* in *A*.

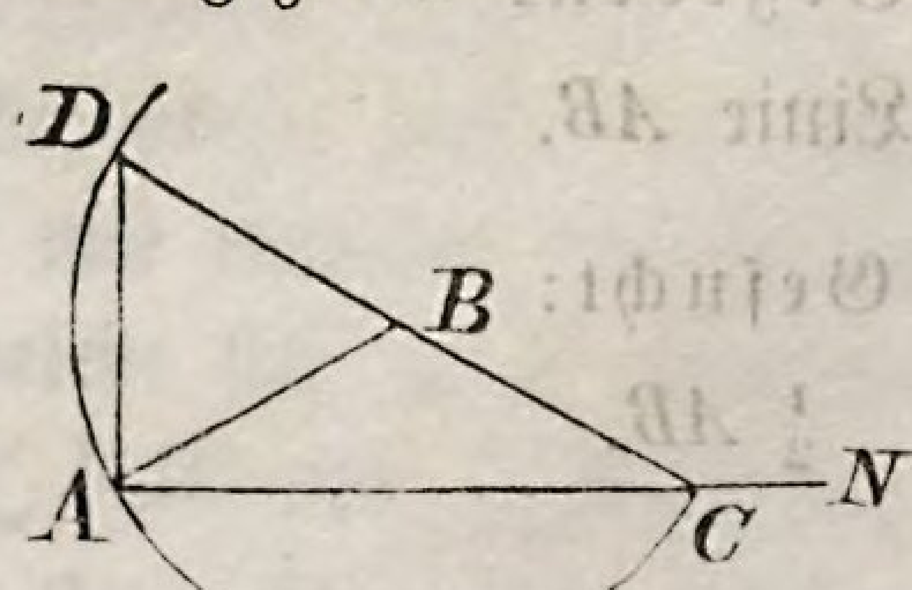
Construction. Man trage aus *A* auf *MN* die beiden gleichen Abschnitte *AB* und *AC* ab, und construire darauf aus *B* und *C* mit einerlei, jedoch hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche sich in *D* schneiden. Zieht man nun *AD*, so ist diese Linie das gesuchte Perpendikel.

Der Beweis folgt, wenn man *BD* und *CD* zieht, aus §. 83.

§. 90.

Aufgabe. In dem Endpunkte einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel auf dieser Linie zu errichten.

Fig. 63.



Gegeben:

Linie *AN*.

Gesucht:

Perpendikel auf *AN* in *A*.

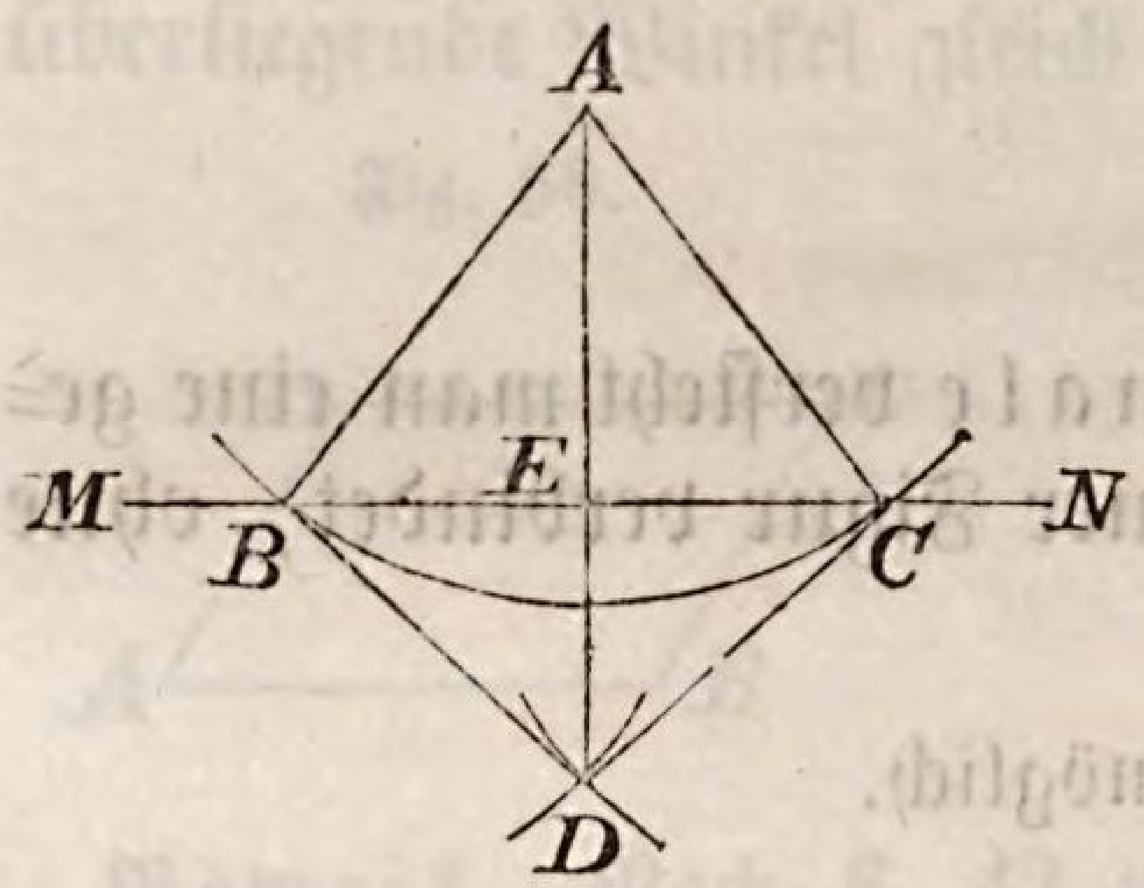
Construction. Aus einem beliebigen außerhalb *AN* angenommenen Punkte *B* construire man mit dem Halbmesser *BA* den Bogen *CAD*, ziehe *CB*, und verlängere diese Linie über *B* hinaus, bis sie den Bogen in *D* trifft. Zieht man nun *AD*, so ist diese Linie das gesuchte Perpendikel.

Der Beweis folgt aus §. 68.

§. 91.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene gerade Linie ein Perpendikel zu fällen.

Fig. 64.



Gegeben:
Linie *MN*,
Punkt *A*.
Gesucht:
Perpendikel auf *MN* aus *A*.

Construction. Man construire aus *A* mit einem beliebigen, jedoch hinreichend großen Halbmesser einen Bogen *BC*, welcher die Linie *MN* in *B* und *C* schneidet, und darauf aus *B* und *C* mit einerlei, jedoch gleichfalls hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche einander in *D* durchschneiden. Zieht man nun *AD*, so ist *AE* das gesuchte Perpendikel.

Der Beweis folgt, nachdem man *AB*, *AC*, *BD* und *CD* gezogen, aus den §§. 83 und 60.

Anmerkung. In den planimetrischen Zeichnungen werden diese drei letzten Aufgaben §§. 89—91 einfacher durch Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks gelöst, welches längs einem geraden Lineale geschoben wird.

Vierter Abschnitt.

Vom Viereck.

§. 92.

Erklärung. Ein Viereck ist ein durch vier sich schneidende gerade Linien umgränzter Theil einer Ebene.

Das Viereck hat 4 Eckpunkte, welche paarweise einander gegenüberliegen. Ebenso 4 Seiten, welche paarweise einander gegenüberliegen, und 4 Winkel, welche paarweise einander gegenüberliegen.

§. 93.

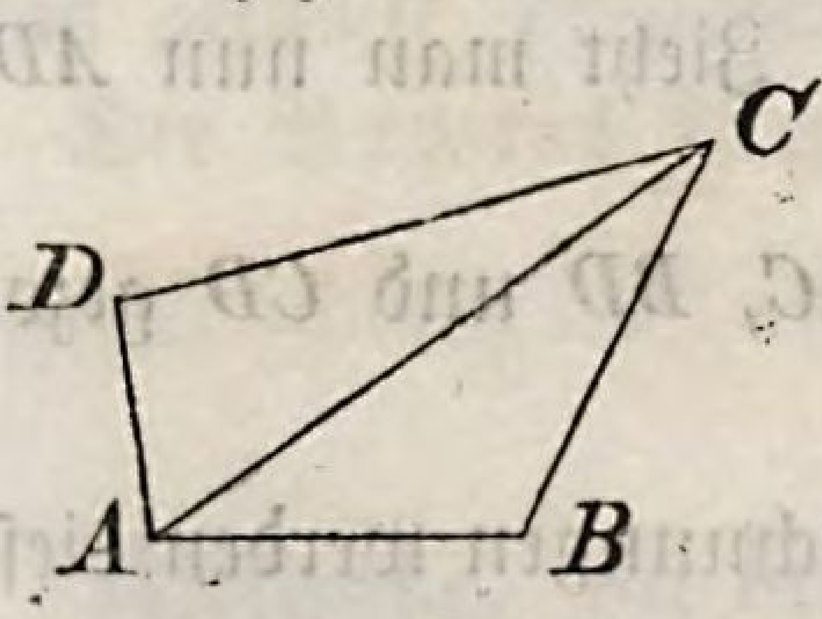
Erklärung. Unter einer Diagonale versteht man eine gerade Linie, welche zwei Eckpunkte einer Figur verbindet, ohne Seite der Figur zu sein.

Im Viereck sind zwei Diagonalen möglich.

§. 94.

Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Vierecks ist gleich 4 rechten Winkeln.

Fig. 65.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Viereck.

Folgerung:
$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 4R.$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale *AC*, welche das Viereck in zwei Dreiecke *ABC* und *ADC* zerlegt. In diesen beiden Dreiecken ist nach §. 45

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 2R$$
$$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 2R$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen wird

$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 4R.$$

w. z. b. w.

Das Parallelogramm.

§. 95.

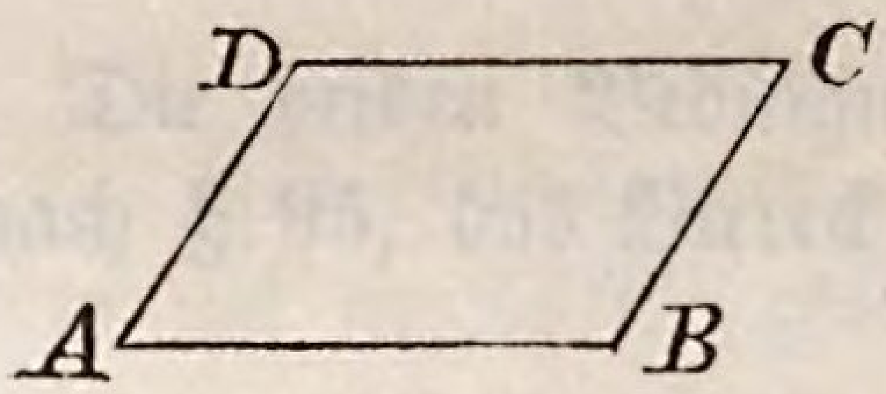
Erklärung. Unter einem Parallelogramm versteht man ein Viereck, in welchem jede zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Man gebraucht das Zeichen ▱ für Parallelogramm.

§. 96.

Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind jede zwei gegenüberliegende Winkel gleich groß.

Fig. 66.



Voraussetzung:
$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Folgerung:
$\angle DAB = \angle DCB$
$\angle ABC = \angle ADC.$

Beweis. Nach §. 42 ist, wenn man AD wie Transversale ansieht,

$$\angle DAB + \angle ADC = 2\,\mathfrak{R},$$

und wenn man DC wie Transversale ansieht,

$$\angle ADC + \angle DCB = 2\,\mathfrak{R}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\angle DAB + \angle ADC = \angle ADC + \angle DCB,$$

und daraus, indem man auf beiden Seiten $\angle ADC$ subtrahirt,

$$\angle DAB = \angle DCB,$$

w. z. b. w.

Auf dieselbe Weise hat man

$$\angle ABC + \angle DCB = 2\,\mathfrak{R},$$

und

$$\angle DCB + \angle ADC = 2\,\mathfrak{R}.$$

Folglich

$$\angle ABC + \angle DCB = \angle DCB + \angle ADC,$$

und daraus

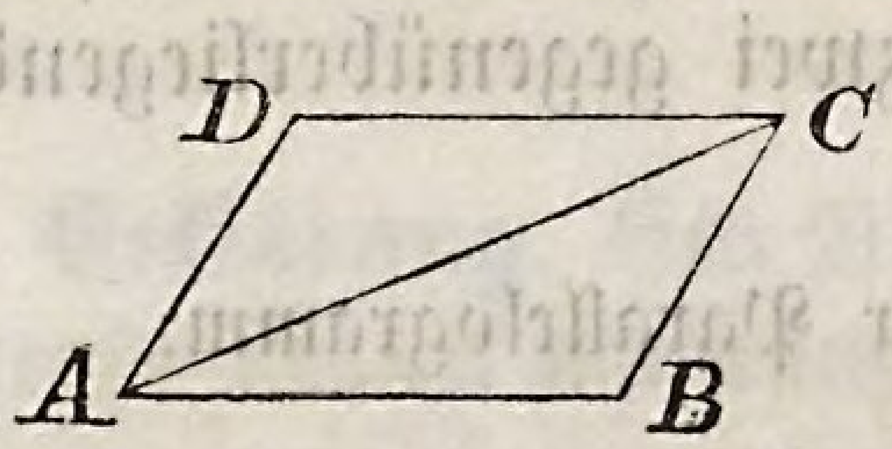
$$\angle ABC = \angle ADC,$$

w. z. b. w.

§. 97.

Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind jede zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß.

Fig. 67.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Parallelogramm.

Folgerung:
$$AB = DC$$
$$BC = AD.$$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale *AC*. Betrachtet man dieselbe wie Transversale, so hat man nach §. 40

$$\angle BAC = \angle ACD,$$
$$\angle BCA = \angle CAD,$$

und wenn man hiezu die identische Gleichung

$$AC = AC$$

nimmt, so folgt nach §. 56

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC,$$

und daraus nach §. 54

$$AB = DC$$
$$BC = AD,$$

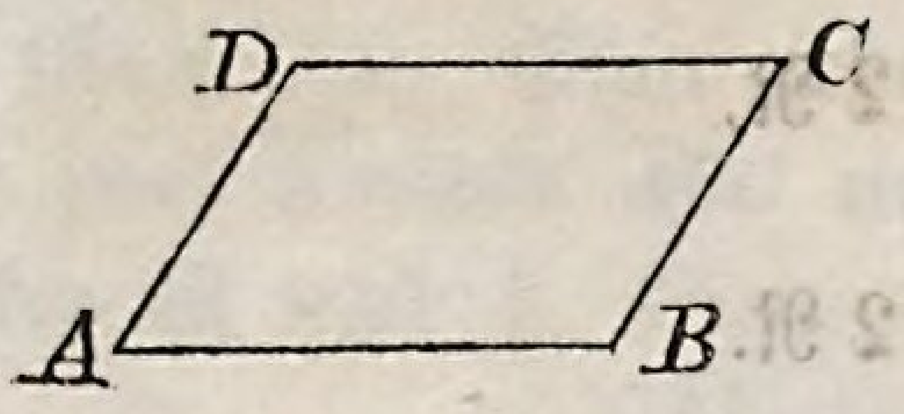
w. z. b. w.

§. 98.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck jede zwei gegenüberliegende Winkel gleich groß sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 96.)

Fig. 66.



Voraussetzung:
$$\angle DAB = \angle DCB$$
$$\angle ABC = \angle ADC.$$

Folgerung:
ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis. Aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$\angle DAB = \angle DCB$$
$$\angle ABC = \angle ADC$$

folgt durch Addition

$$\angle DAB + \angle ABC = \angle DCB + \angle ADC;$$

und da nach §. 94 die Summe der vier Winkel, welche in dieser Gleichung enthalten sind, 4 R beträgt, so muß

$$\angle DAB + \angle ABC = 2 R$$

sein, woraus nach §. 39 folgt

$$BC \parallel AD.$$

Ebenso aus den beiden Gleichungen

$$\angle DAB = \angle DCB$$
$$\angle ADC = \angle ABC$$

folgt durch Addition

$$\angle DAB + \angle ADC = \angle DCB + \angle ABC;$$

und deshalb muß aus demselben Grunde wie vorhin

$$\angle DAB + \angle ADC = 2 R$$

sein, woraus nach §. 39 folgt

$$AB \parallel DC.$$

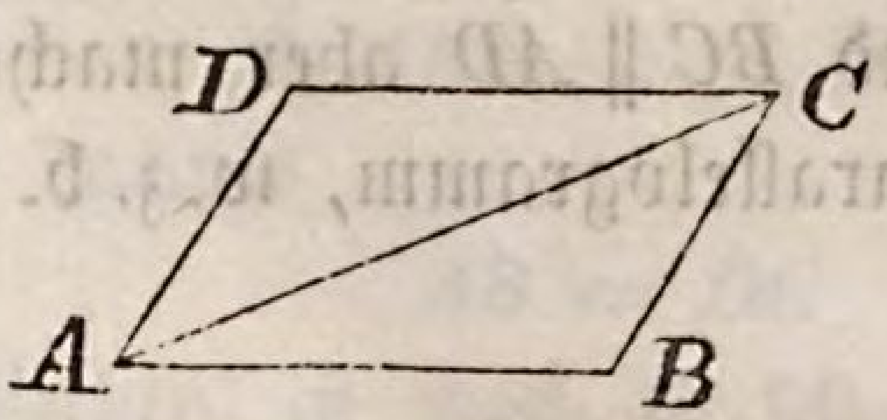
Die beiden Bedingungen $BC \parallel AD$ und $AB \parallel DC$ aber machen, nach §. 95, das Viereck $ABCD$ zu einem Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 99.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck jede zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 97.)

Fig. 67.



Voraussetzung:

$$AB = DC$$
$$BC = AD.$$

Folgerung:

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale AC. Aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$AB = DC$$
$$BC = AD$$

mit Zuziehung der identischen Gleichung

$$AC = AC$$

folgt nach §. 83

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC;$$

und hieraus ist nach §. 54

$\angle BAC = \angle ACD$, mithin nach §. 37 $AB \parallel DC$;

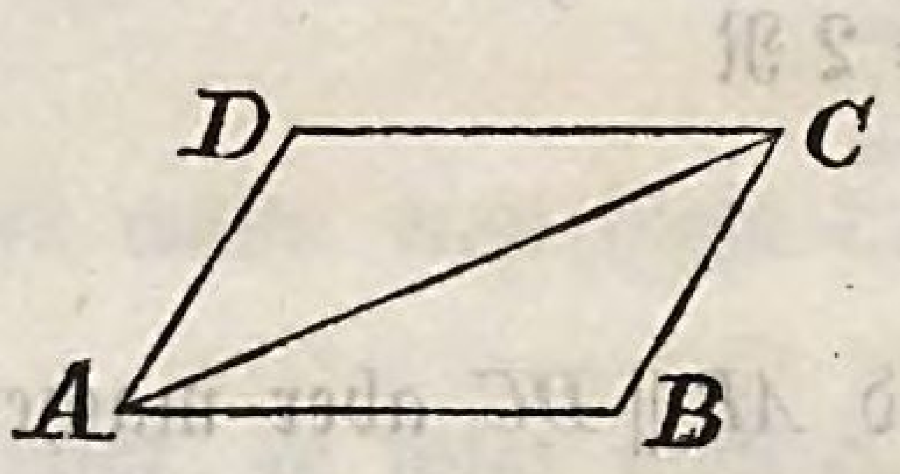
$\angle BCA = \angle CAD$, " " " $BC \parallel AD$.

Die beiden Bedingungen $AB \parallel DC$ und $BC \parallel AD$ aber machen, nach §. 95, das Viereck $ABCD$ zu einem Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 100.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß und parallel sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Fig. 67.



Voraussetzung:

$AB = DC$

$AB \parallel DC$.

Folgerung:

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale AC. Alsdann hat man

$AB = DC$ nach der Voraussetzung

$AC = AC$

$\angle BAC = \angle ACD$ nach §. 40

folglich nach §. 60

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$;

und hieraus ist nach §. 54

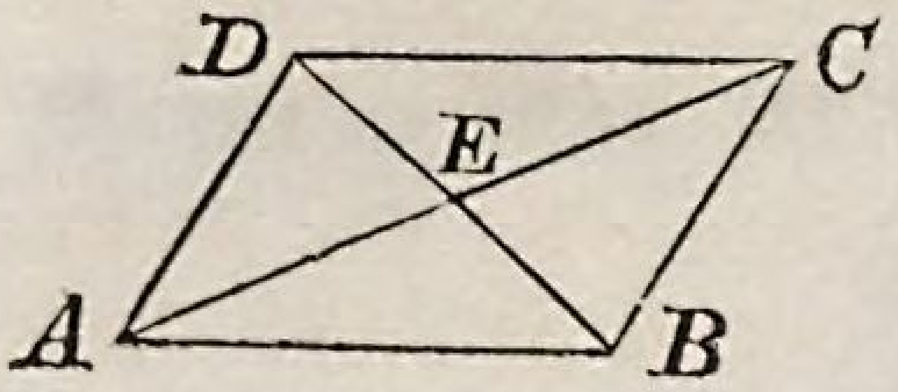
$\angle BCA = \angle CAD$, mithin nach §. 37 $BC \parallel AD$.

Die beiden Bedingungen $AB \parallel DC$ und $BC \parallel AD$ aber machen, nach §. 95, das Viereck $ABCD$ zu einem Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 101.

Lehrsatz. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramm halbiren einander.

Fig. 68.



Voraussetzung:

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Folgerung:

$AE = EC$

$BE = ED$.

Beweis. Man hat

$$AB = DC \text{ nach §. 97}$$
$$\angle EAB = \angle ECD \text{ nach §. 40}$$
$$\angle EBA = \angle EDC \quad " \quad "$$

folglich nach §. 56

$$\triangle ABE \equiv \triangle DCE$$

und daraus

$$AE = EC$$
$$BE = ED$$

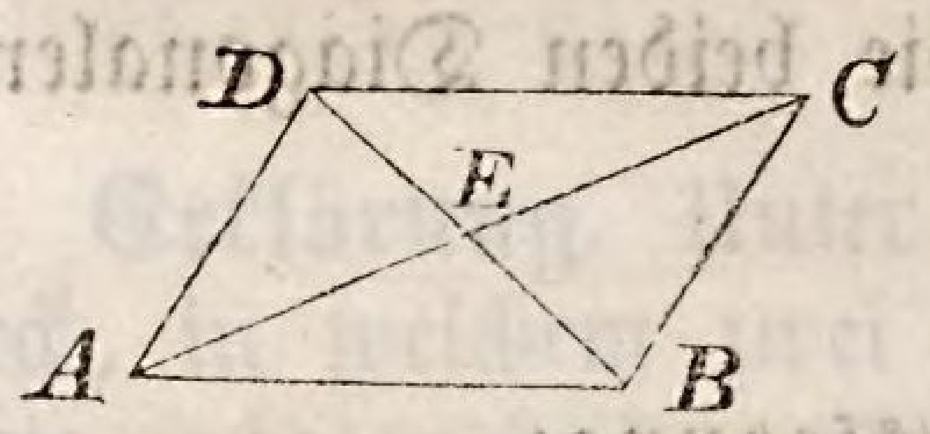
w. z. b. w.

§. 102.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck die beiden Diagonalen einander halbiren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 68.



Voraussetzung:

$$AE = EC$$
$$BE = ED$$

Folgerung:

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man hat

1)	2)	
$AE = EC$	$AE = EC$	
$BE = ED$	$DE = EB$	
$\angle AEB = \angle DEC$	$\angle AED = BEC$	(§. 25.)

folglich nach §. 60

$$\triangle AEB \equiv \triangle DEC \qquad \triangle AED \equiv \triangle BEC$$

und daraus

$$AB = DC \qquad AD = BC.$$

Mithin ist nach §. 99 das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 103.

Erklärung. Ein Parallelogramm wird ein Rechteck genannt, wenn ein Winkel desselben ein rechter Winkel ist.

Ein Parallelogramm wird ein Rhombus genannt, wenn zwei zusammenstoßende Seiten desselben gleich groß sind.

Ein Parallelogramm wird ein Quadrat genannt, wenn

ein Winkel desselben ein rechter Winkel ist und zwei zusammenstoßende Seiten gleich groß sind.

Weiter unten wird ein Rechteck, in welchem *AB* und *AD* zwei zusammenstoßende Seiten sind, abgekürzt durch ▭ *AB.AD*, und ein Quadrat über der Seite *AB* abgekürzt durch □ *AB* bezeichnet.

§. 104.

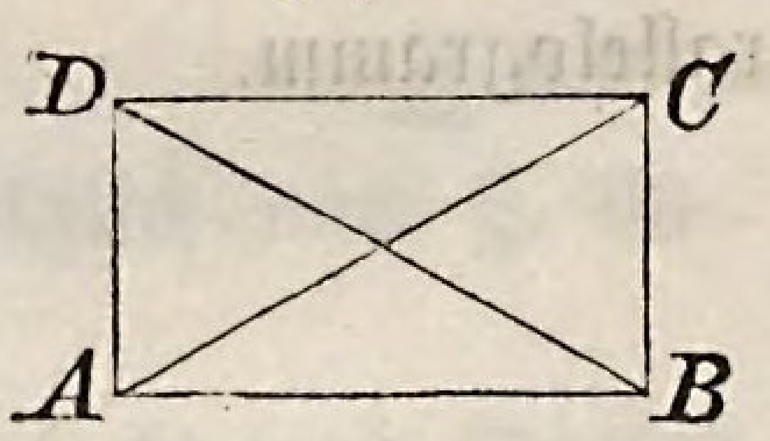
Zusatz. Im Rechteck sind alle vier Winkel rechte Winkel.
Im Rhombus sind alle vier Seiten gleich groß.
Im Quadrat sind alle vier Winkel rechte Winkel und alle Seiten gleich groß.

Dies folgt durch Zuziehung der allgemeinen Eigenschaften der Parallelogramme.

§. 105.

Lehrsatz. In jedem Rechteck sind die beiden Diagonalen gleich groß.

Fig. 69.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Rechteck.

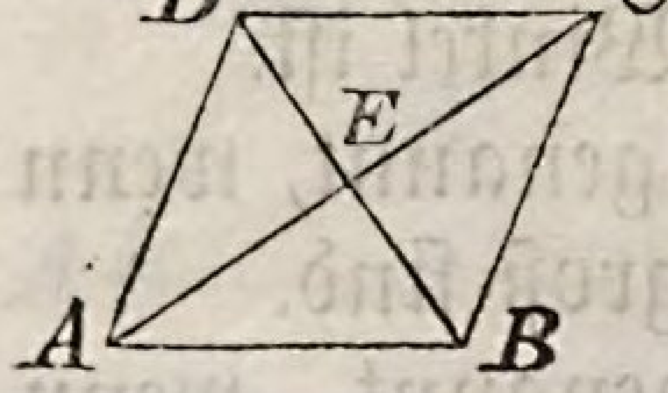
Folgerung:
$AC = BD$.

Der Beweis ergiebt sich durch Congruenz der beiden Dreiecke *ABC* und *ABD* nach §. 60.

§. 106.

Lehrsatz. In jedem Rhombus stehen die beiden Diagonalen auf einander rechtwinkelig, und halbiren die Winkel des Rhombus.

Fig. 70.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Rhombus.

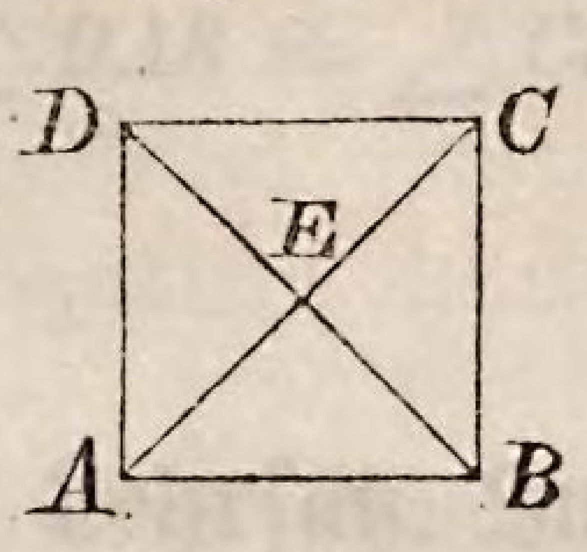
Folgerung:
$\angle AEB = \Re$
$\angle BAE = \angle DAE$.

Der Beweis ergiebt sich durch die Eigenschaften des gleichschenkeligen Dreiecks *ABD* nach §. 69.

§. 107.

Zusatz. Im Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich groß; stehen auf einander rechtwinkelig, und halbiren die Winkel des Quadrats.

Fig. 71.



In dem Quadrat *ABCD* ist

$$AC = BD$$
$$\angle AEB = \mathfrak{R}$$
$$\angle BAE = \angle DAE.$$

Das Trapez.

§. 108.

Erklärung. Unter einem Trapez versteht man ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel, und die anderen beiden Seiten nicht parallel sind.

Die beiden parallelen Seiten sind überdies ungleich lang, wegen §. 100.

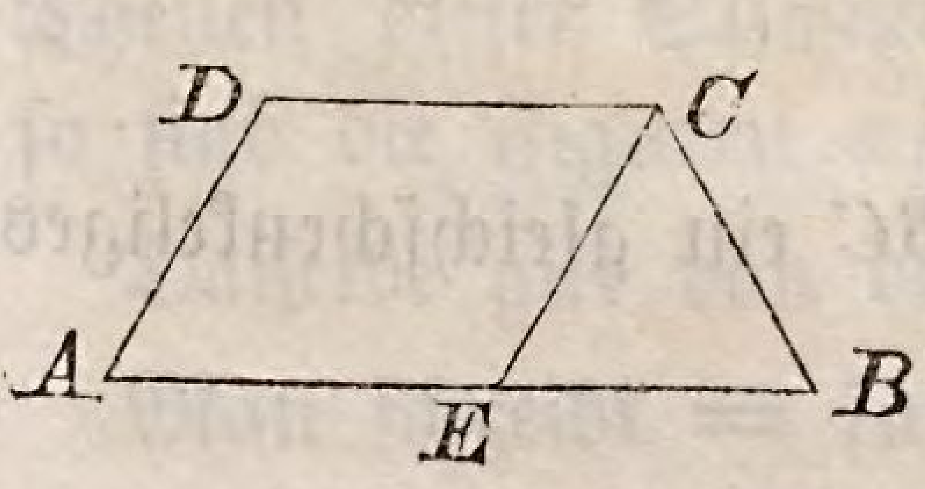
§. 109.

Erklärung. Ein Trapez wird ein gleichschenkeliges Trapez genannt, wenn die beiden nicht parallelen Seiten desselben gleich groß sind.

§. 110.

Lehrsatz. Im gleichschenkeligen Trapez sind die Winkel an jeder der beiden parallelen Seiten gleich groß.

Fig. 72.



Voraussetzung:

ABCD ist ein gleichschenkeliges Trapez.

Folgerung:

$$\angle DAB = \angle CBA$$
$$\angle ADC = \angle BCD.$$

Beweis. Man ziehe $CE \parallel DA$. Alsdann ist $AECD$ ein Parallelogramm, in welchem man nach §. 97 hat

$$EC = AD.$$

Aber weil vermöge der Voraussetzung $AD = BC$ ist, so folgt weiter

$$EC = BC$$

d. h. das Dreieck EBC ist gleichschenkelig. Daraus ergiebt sich nach §. 61

$$\angle CEB = \angle CBE;$$

folglich, weil nach §. 41 $\angle DAB = \angle CEB$ ist,

$$\angle DAB = \angle CBA$$

w. z. b. w.

Ferner hat man nach §. 42

$$\angle DAB + \angle ADC = 2 R$$

$$\angle CBA + \angle BCD = 2 R$$

woraus folgt

$$\angle DAB + \angle ADC = \angle CBA + \angle BCD;$$

und wenn man von dieser Gleichung die so eben bewiesene Gleichung $\angle DAB = \angle CBA$ subtrahirt, so bleibt

$$\angle ADC = \angle BCD$$

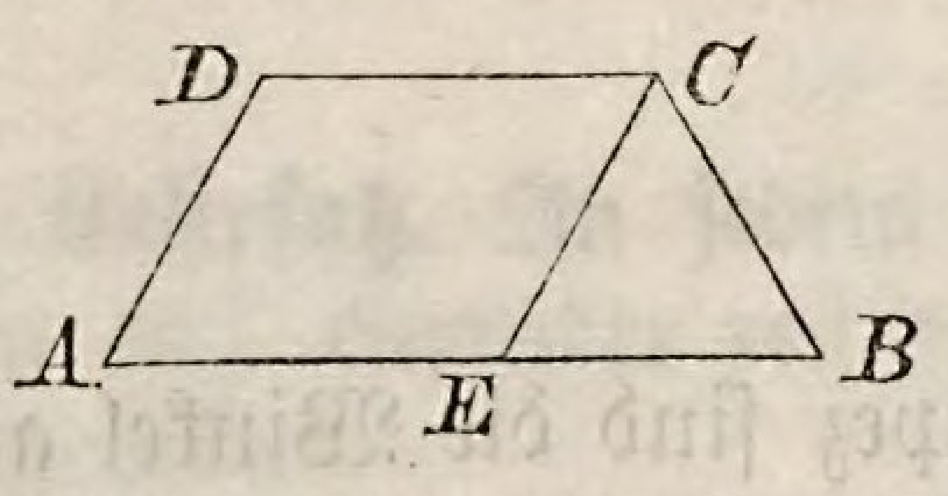
w. z. b. w.

§. 111.

Lehrsatz. Wenn in einem Trapez die Winkel an einer der beiden parallelen Seiten gleich groß sind, so ist das Trapez ein gleichschenkeliges.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 72.



Voraussetzung:

$$\angle DAB = \angle CBA.$$

Folgerung:

$ABCD$ ist ein gleichschenkeliges Trapez.

Beweis. Man ziehe $CE \parallel DA$. Alsdann ist nach §. 41 $\angle DAB = \angle CEB$, folglich vermöge der Voraussetzung

$$\angle CEB = \angle CBE,$$

und hieraus folgt nach §. 64, daß $\triangle EBC$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist, d. h.

$$EC = BC.$$

Aber zugleich ist $AECD$ ein Parallelogramm, in welchem nach §. 97 $EC = AD$ ist; folglich hat man auch

$$AD = BC,$$

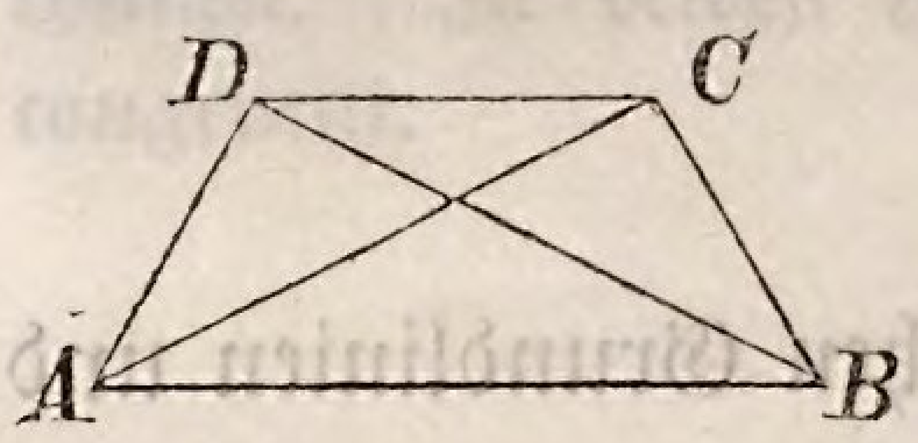
d. h. nach §. 109 das Trapez $ABCD$ ist ein gleichschenkeliges Trapez, w. z. b. w.

Würde als Voraussetzung die Gleichung $\angle ADC = \angle BCD$ gegeben, so müßte man aus ihr durch ähnliche Schlüsse, wie in dem zweiten Theile des vorigen Beweises, zuvor die Gleichung $\angle DAB = \angle CBA$ ableiten.

§. 112.

Lehrsatz. Im gleichschenkeligen Trapez sind die beiden Diagonalen gleich groß.

Fig. 73.



Voraussetzung:
$ABCD$ ist ein gleichschenkeliges Trapez.
Folgerung:
$AC = BD$.

Der Beweis ergiebt sich durch Congruenz der beiden Dreiecke ABC und ABD nach §. 60.

Inhaltsgleichheit der Figuren.

§. 113.

Erklärung. Zwei Figuren werden inhaltsgleich (oder kürzer gleich) genannt, wenn sie entweder congruent sind oder durch Addition oder Subtraction congruenter Figuren zusammengesetzt werden können.

So wenn z. B. eine Figur durch die Summe $a + b$ und eine andere durch die Summe $c + d$ gebildet wird, und man von den Theilen dieser Summen einzeln weiß, daß $a \equiv c$ und $b \equiv d$ ist, so sind die Figuren $a + b$ und $c + d$ inhaltsgleich.

Dasselbe gilt von den beiden Figuren $a - b$ und $c - d$.

Man schreibt $=$ für inhaltsgleich.

§. 114.

Erklärung. Wenn man in einem Dreieck oder Parallelogramm eine beliebige Seite, oder im Trapez eine der beiden parallelen Seiten als Grundlinie angenommen hat, so versteht man unter der Höhe im Dreieck ein Perpendikel aus der gegenüberliegenden Spitze auf die Grundlinie; im Parallelogramm oder Trapez dagegen ein Perpendikel aus einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seite auf die Grundlinie.

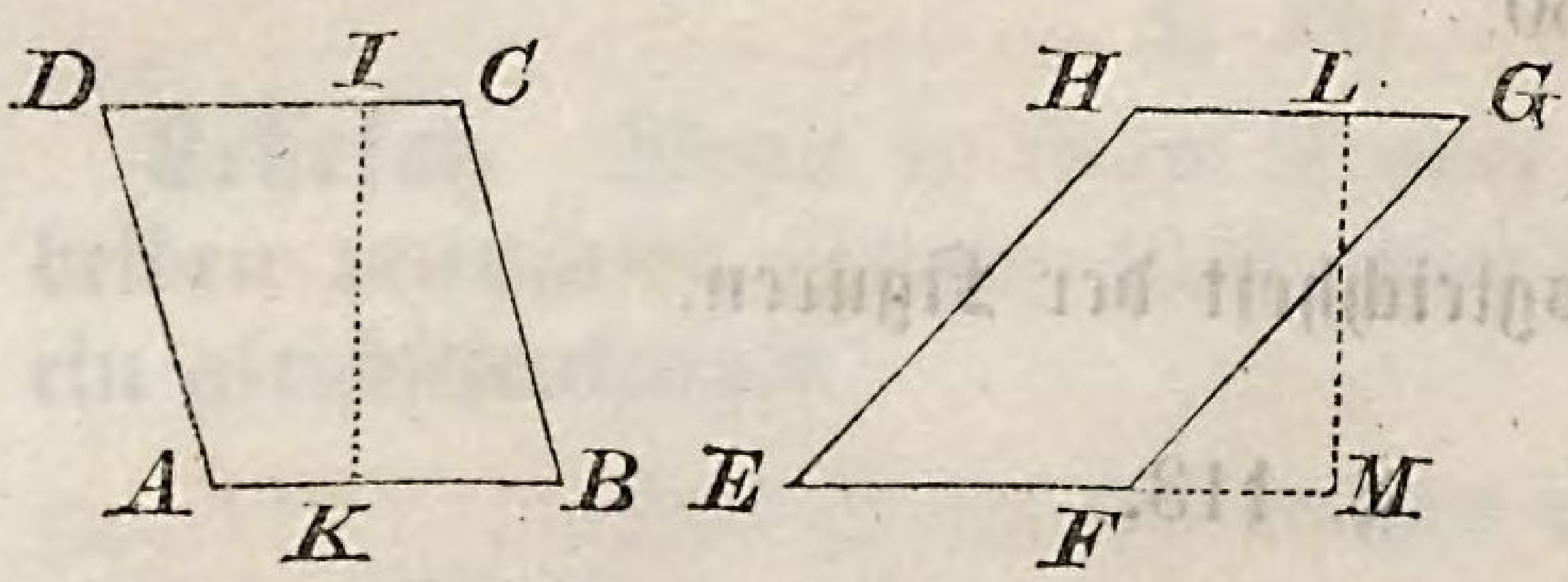
Das Perpendikel, welches die Höhe genannt wird, trifft entweder die Grundlinie selbst oder die Verlängerung derselben, weshalb man die Grundlinie immer sich hinreichend verlängert denken muß.

Im Parallelogramm und Trapez sind die verschiedenen Perpendikel, welche man als Höhen construiren kann, sämmtlich gleich groß, wegen §. 97. Denn je zwei derselben sind immer gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramm.

§. 115.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

Fig. 74.

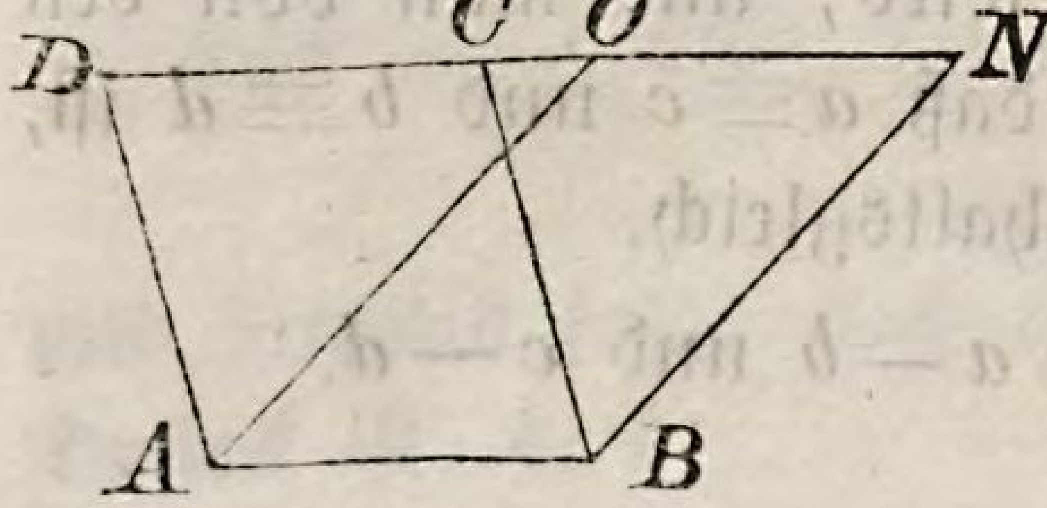


Voraussetzung:
$AB = EF$
$IK = LM$.

Folgerung:
$ABCD = EFGH$.

Beweis. Man lege die beiden Parallelogramme *ABCD* und *EFGH* so auf einander, daß die Grundlinie *EF* auf die Grundlinie *AB* fällt, welches der Voraussetzung gemäß möglich ist. Alsdann werden, wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Höhen, die gegenüberliegenden Seiten *DC* und *HG* in eine und dieselbe gerade Linie fallen, z. B. in die Linie *DN*, Fig. 75, so daß das Parallelogramm *EFGH* die Lage *ABNO* annimmt.

Fig. 75.



In dem Trapez *ABND* ist nun

$$AD = BC \text{ nach §. 97}$$
$$\angle ADO = \angle BCN \text{ nach §. 41}$$
$$\angle AOD = \angle BNC \text{ „ „}$$

folglich nach §. 58

$$\triangle ADO \equiv \triangle BCN.$$

Subtrahirt man nun von dem Trapez *ABND* das Dreieck *BCN*, so bleibt das Parallelogramm *ABCD*. Subtrahirt man aber von dem Trapez *ABND* das Dreieck *ADO*, so bleibt das Parallelogramm *ABNO*. Folglich ist nach §. 113

$$ABCD = ABNO$$
$$\text{d. i. } ABCD = EFGH$$

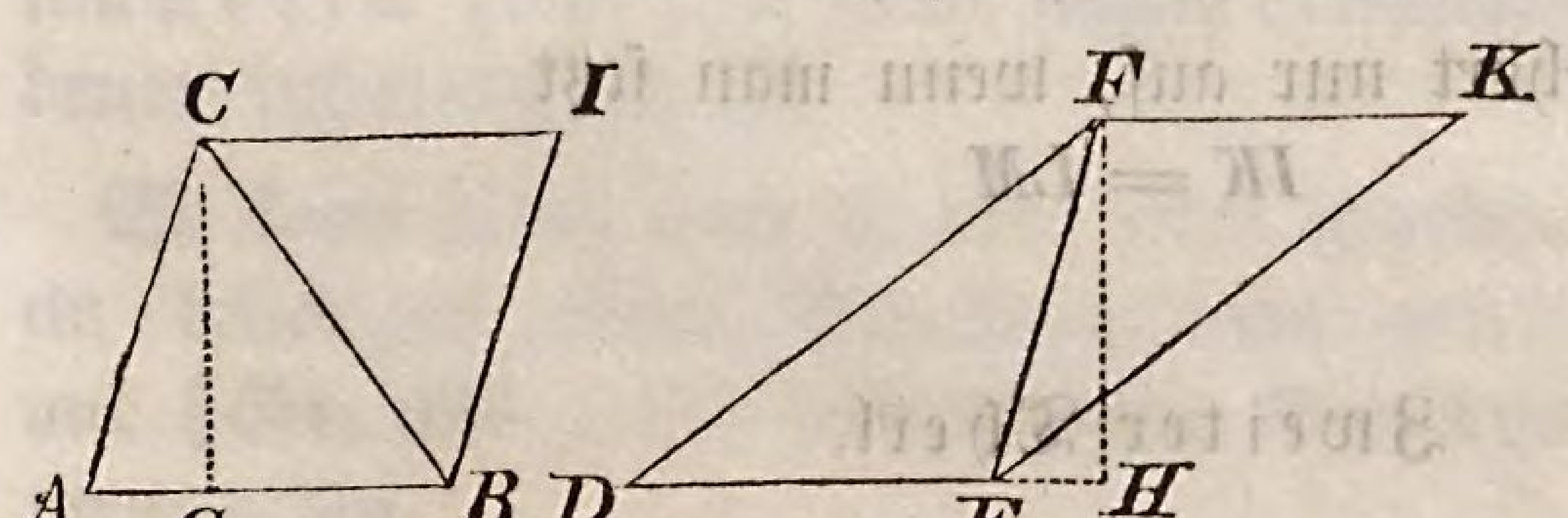
w. z. b. w.

Das Trapez *ABND* hätte unter besonderen Voraussetzungen zu einem Parallelogramm oder einem gleichschenkeligen Trapez werden können. In beiden Fällen sind die gegebenen Parallelogramme congruent.

§. 116.

Lehrsatz. Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

Fig. 76.



Voraussetzung:

$$AB = DE$$
$$CG = FH.$$

Folgerung:

$$ABC = DEF.$$

Beweis. Man ergänze die gegebenen Dreiecke *ABC* und *DEF* zu den Parallelogrammen *ABIC* und *DEKF* von derselben Grundlinie und derselben Höhe. Alsdann ist nach dem vorigen Lehrsatze

$$ABIC = DEKF.$$

Aber *ABC* ist die Hälfte von *ABIC*, und *DEF* ist die Hälfte von *DEKF*; folglich hat man auch

$$ABC = DEF$$

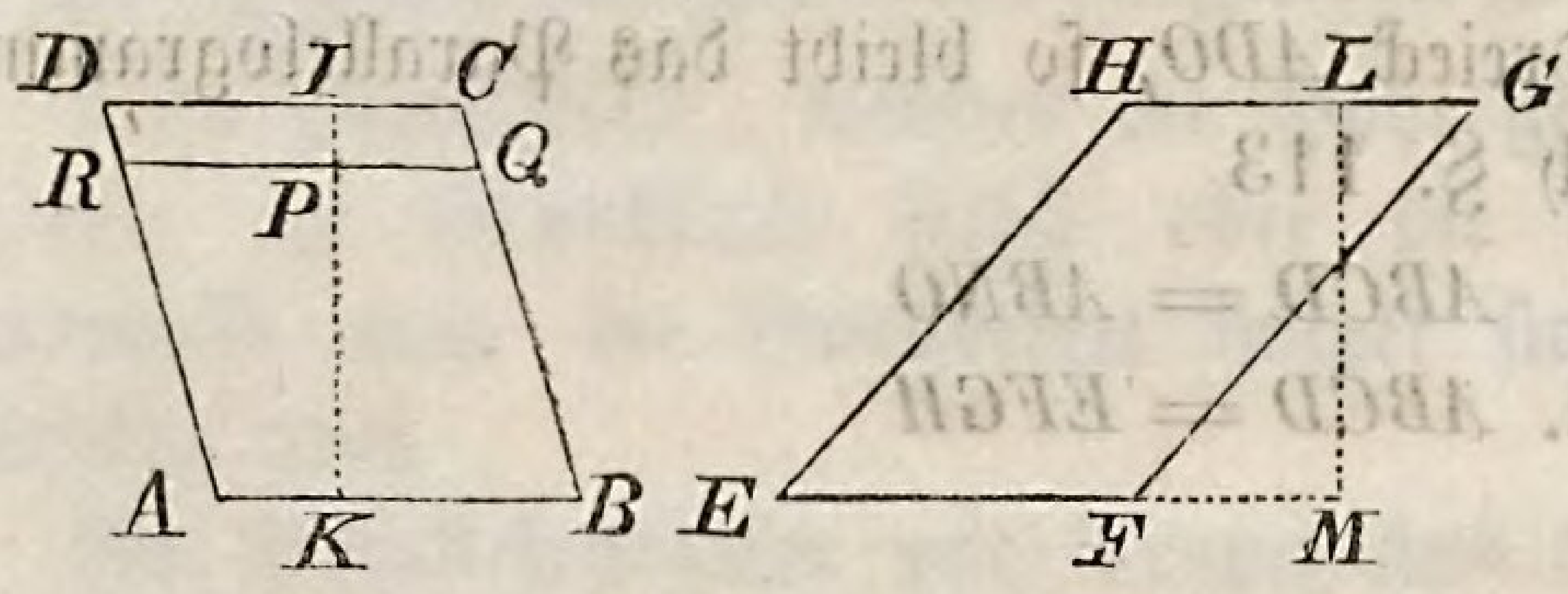
w. z. b. w.

§. 117.

Lehrsatz. Inhaltsgleiche Parallelogramme von gleichen Grundlinien haben gleiche Höhen, und inhaltsgleiche Parallelogramme von gleichen Höhen haben gleiche Grundlinien.

Erster Theil.

Fig. 77.



Voraussetzung:
$ABCD = EFGH$
$AB = EF$
Folgerung:
$IK = LM.$

Beweis. Gesetzt es seien die Höhen IK und LM ungleich, z. B. $IK > LM$. Alsdann trage man auf IK von K aus einen Abschnitt $KP = LM$ ab, und ziehe durch P die Linie $RQ \parallel AB$. Nun ist nach dem Lehrsatze §. 115

$$ABQR = EFGH.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$ABCD = EFGH,$$

folglich

$$ABQR = ABCD$$

welche Gleichung einen Widerspruch enthält.

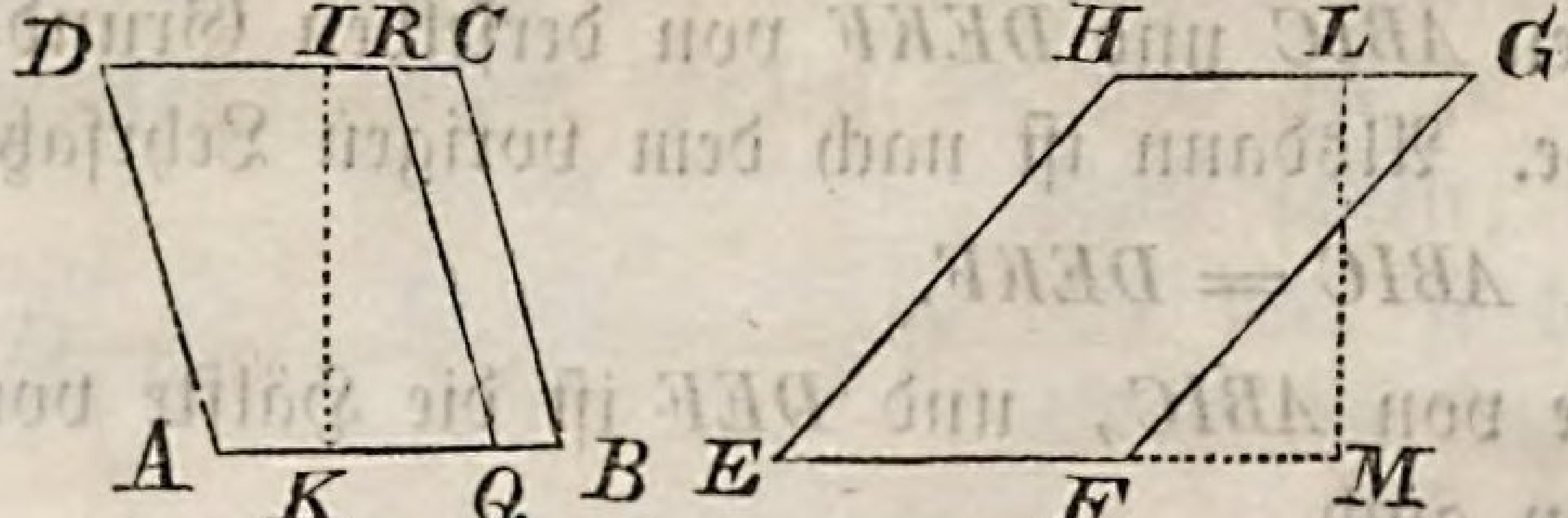
Der Widerspruch hört nur auf, wenn man setzt

$$IK = LM$$

w. z. b. w.

Zweiter Theil.

Fig. 78.



Voraussetzung:
$ABCD = EFGH$
$IK = LM$
Folgerung:
$AB = EF.$

Beweis. Gesetzt es seien die Grundlinien, AB und EF ungleich, z. B. $AB > EF$. Alsdann trage man auf AB von A aus

einen Abschnitt $AQ = EF$ ab, und ziehe durch Q die Linie $QR \parallel AD$. Nun ist nach dem Lehrsatze §. 115

$$AQRD = EFGH.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$ABCD = EFGH,$$

folglich

$$AQRD = ABCD$$

welche Gleichung einen Widerspruch enthält.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn man setzt

$$AB = EF$$

w. z. b. w.

§. 118.

Zusatz. Inhaltsgleiche Dreiecke von gleichen Grundlinien haben gleiche Höhen, und inhaltsgleiche Dreiecke von gleichen Höhen haben gleiche Grundlinien.

Denn man ergänze die gegebenen Dreiecke, wie im §. 116, zu Parallelogrammen von derselben Grundlinie und derselben Höhe; alsdann ergiebt sich das Weitere unmittelbar aus dem vorigen Lehrsatze.

§. 119.

Erklärung. Eine gegebene Figur in eine neue Figur verwandeln heißt eine neue Figur construiren, welche der gegebenen inhaltsgleich ist.

So kann man, nach §. 115, jedes gegebene Parallelogramm in ein beliebiges neues Parallelogramm von derselben Grundlinie und Höhe, also z. B. auch in einen Rhombus oder in ein Rechteck verwandeln.

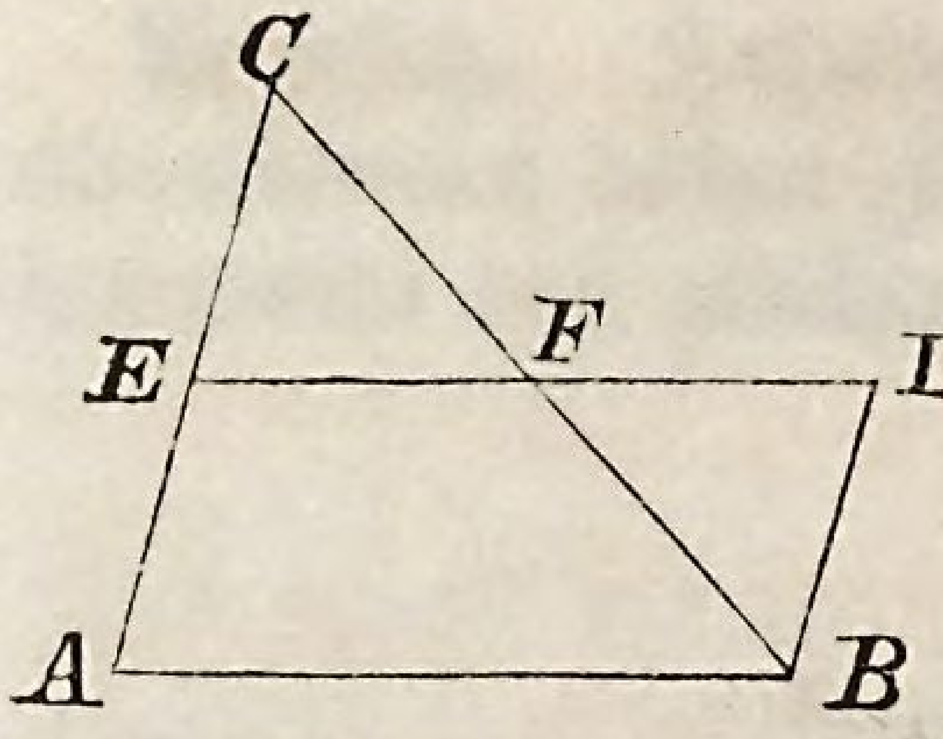
Ebenso kann man, nach §. 116, jedes gegebene Dreieck in ein neues Dreieck von derselben Grundlinie und Höhe, also z. B. auch in ein gleichschenkeliges oder ein rechtwinkeliges verwandeln.

Die Auflösung dieser Aufgaben wird, ihrer Einfachheit wegen, hier übergangen.

§. 120.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm von derselben Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 79.



Gegeben:
△ *ABC.*

Gesucht:
Inhaltsgleiches ▱ über *AB.*

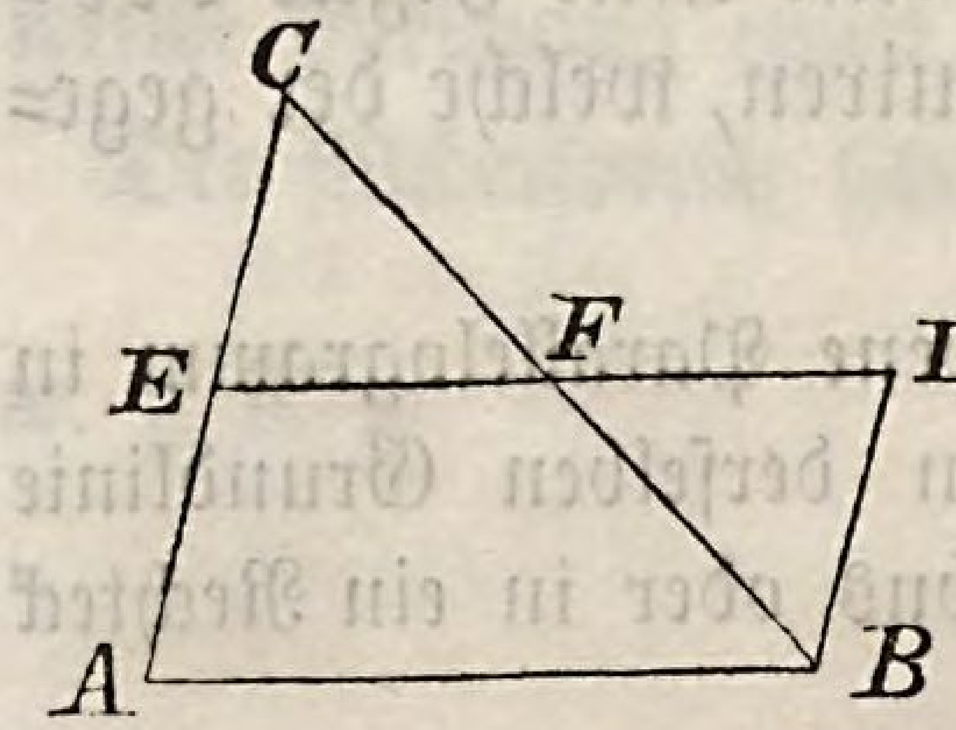
Construction. Man halbire *AC* im *E*, und ziehe *ED* ∥ *AB* und *BD* ∥ *AE.* Alsdann ist *ABDE* das gesuchte Parallelogramm, welches dem gegebenen Dreieck *ABC* inhaltsgleich ist.

Der Beweis folgt durch Congruenz der beiden Dreiecke *ECF* und *DBF.*

Wenn man *AC* wie Grundlinie des gegebenen Dreiecks *ABC* ansieht, so löst dieselbe Construction zugleich die Aufgabe: Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm von derselben Höhe zu verwandeln.

§. 121.

Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck von derselben Grundlinie zu verwandeln.



Gegeben:
▱ *ABDE.*

Gesucht:
Inhaltsgleiches △ über *AB.*

Construction. Man verlängere *AE* über *E* hinaus nach *C*, so daß *EC* = *AE* wird, und ziehe *BC.* Alsdann ist *ABC* das gesuchte Dreieck, welches dem gegebenen Parallelogramm *ABDE* inhaltsgleich ist.

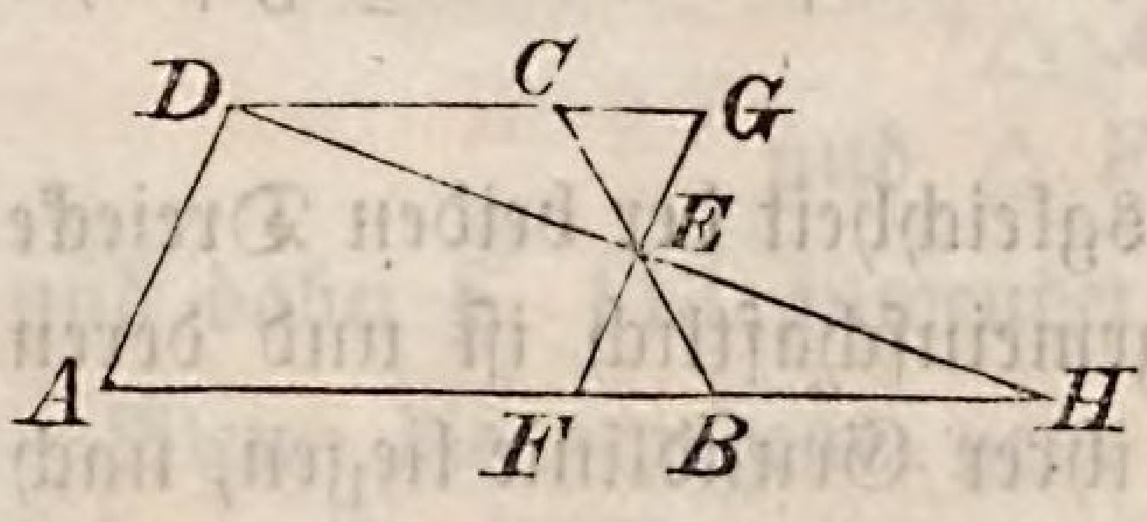
Der Beweis wie im vorigen §.

Wenn man *AE* wie Grundlinie des gegebenen Parallelogramm *ABDE* ansieht, so löst dieselbe Construction zugleich die Aufgabe: Ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck von derselben Höhe zu verwandeln.

§. 122.

Aufgabe. Ein gegebenes Trapez in ein Dreieck oder in ein Parallelogramm von derselben Höhe zu verwandeln.

Fig. 80.



Gegeben:
Trapez *ABCD*.
Gesucht:
Inhaltsgleiches △ oder ▱ von derselben Höhe.

Construction. 1) Man halbire eine der nicht parallelen Seiten des Trapez, *BC*, in *E*, ziehe *DE* und verlängere diese Linie bis zu ihrem Durchschnitt mit der verlängerten *AB* in *H*. Alsdann ist *AHD* das gesuchte Dreieck.

Der Beweis folgt aus der Congruenz der Dreiecke *DEC* und *HEB*.

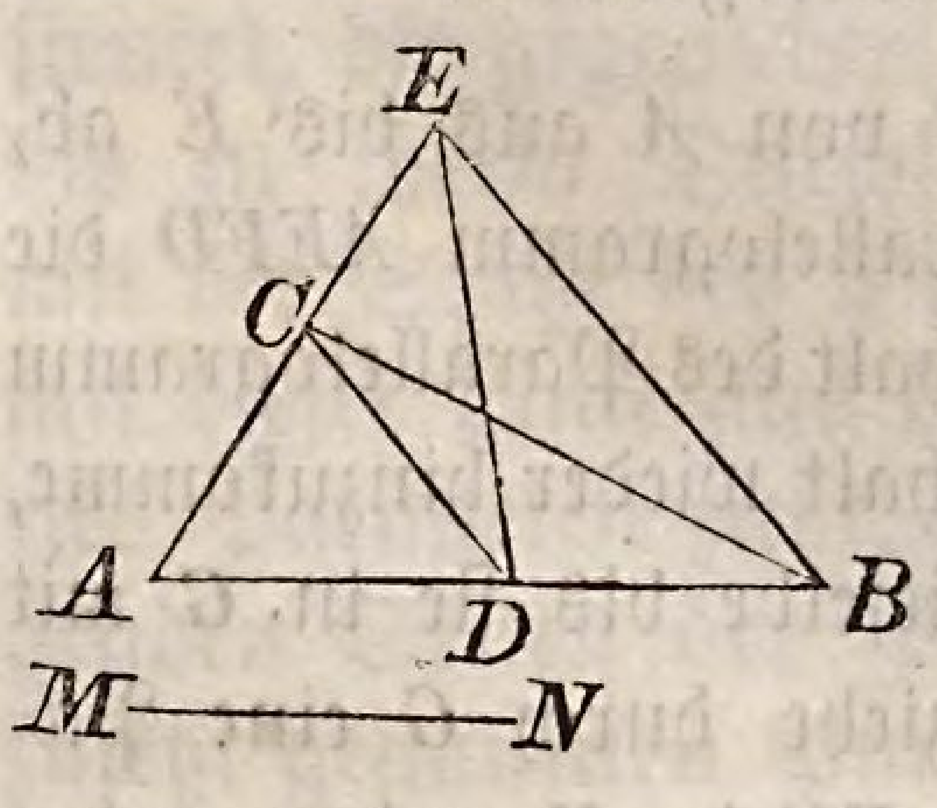
2) Man halbire eine der nicht parallelen Seiten des Trapez, *BC*, in *E* und ziehe durch *E* eine Linie *FG* || *AD*, welche die Seite *AB* in *F* und die verlängerte *DC* in *G* trifft. Alsdann ist *AFGD* das gesuchte Parallelogramm.

Der Beweis folgt aus der Congruenz der Dreiecke *CEG* und *BEF*.

§. 123.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes Dreieck über einer gegebenen neuen Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 81.



Gegeben:
△ *ABC*,
Linie *MN*.
Gesucht:
Inhaltsgleiches △ über *MN*.

Construction. Die gegebene neue Grundlinie *MN* sei kleiner als die Grundlinie *AB* des gegebenen Dreiecks.

Man trage die Grundlinie *MN* auf *AB* von *A* aus bis *D* ab,

und ziehe *CD*. Alsdann hat das Dreieck *ADC* die verlangte Grundlinie, ist jedoch um den Inhalt des Dreiecks *DBC* zu klein geworden. Damit dieser Inhalt wieder hinzukomme, ziehe man durch *B* eine Linie *BE* ∥ *DC* bis zu dem Punkte *E*, wo sie die verlängerte *AC* trifft, und ziehe endlich *DE*. Alsdann ist *ADE* das gesuchte Dreieck.

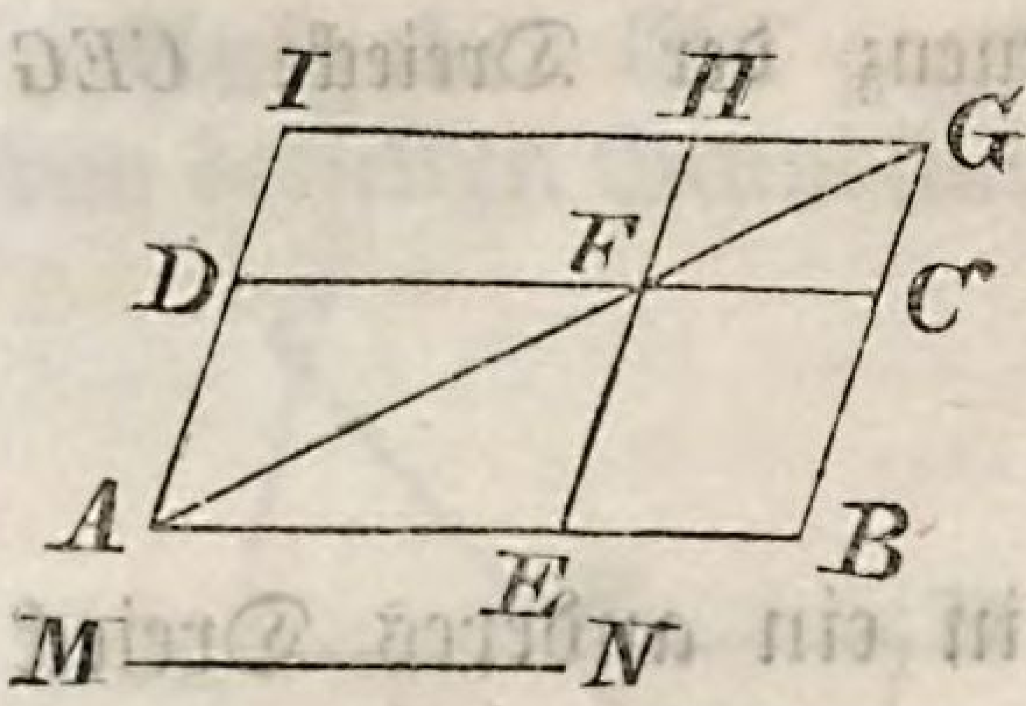
Der Beweis folgt aus der Inhaltsgleichheit der beiden Dreiecke *DBC* und *DEC*, deren Grundlinie *DC* gemeinschaftlich ist und deren Spitzen *B* und *E* in einer Parallele zu ihrer Grundlinie liegen, nach §. 116.

Wenn die gegebene neue Grundlinie größer als die Grundlinie des gegebenen Dreiecks ist, so kann man in derselben Figur △ *ADE* wie gegeben und △ *ABC* wie gesucht ansehen.

§. 124.

Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes Parallelogramm über einer gegebenen neuen Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 82.



Gegeben:
▱ *ABCD*,
Linie *MN*.
Gesucht:
Inhaltsgleiches ▱ über *MN*.

Construction. Die gegebene neue Grundlinie *MN* sei kleiner als die Grundlinie *AB* des gegebenen Parallelogramm.

Man trage die Grundlinie *MN* auf *AB* von *A* aus bis *E* ab, und ziehe *EF* ∥ *AD*. Alsdann hat das Parallelogramm *AEFD* die verlangte Grundlinie, ist jedoch um den Inhalt des Parallelogramm *EBCD* zu klein geworden. Damit dieser Inhalt wieder hinzukomme, ziehe man die Diagonale *AF*, verlängere dieselbe bis sie in *G* mit der verlängerten *BC* zusammentrifft, und ziehe durch *G* eine Parallele zu *BA*, welche von der verlängerten *EF* in *H* und von der verlängerten *AD* in *I* getroffen wird. Alsdann ist *AEHI* das gesuchte Parallelogramm.

Der Beweis folgt aus der Inhaltsgleichheit der beiden Parallelogramme *EBCF* und *DFHI*, welche sich ergiebt, wenn man von

$$\triangle\ ABG \equiv \triangle\ AIG$$

subtrahirt

$$\triangle\ AEF \equiv \triangle\ ADF$$

$$\text{und } \triangle\ FCG \equiv \triangle\ FHG$$

und dabei §. 113 anwendet.

Wenn die gegebene neue Grundlinie größer als die Grundlinie des gegebenen Parallelogramm ist, so kann man in derselben Figur ▱ *AEHI* wie gegeben und ▱ *ABCD* wie gesucht ansehen.

§. 125.

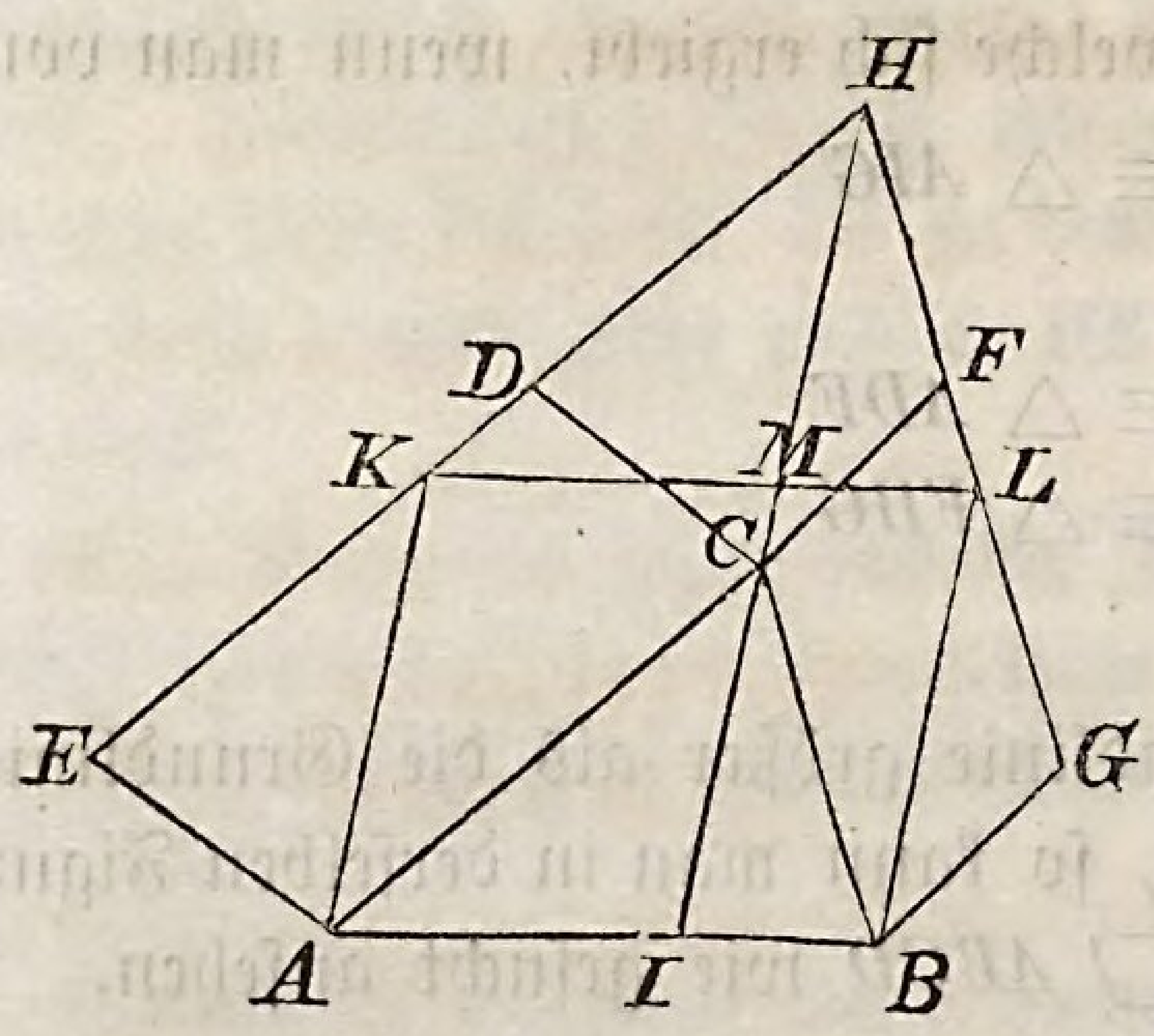
Zusatz. Wenn man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt einer Diagonale zwei gerade Linien parallel mit den Seiten des Parallelogramm zieht, so sind diejenigen beiden neu entstehenden Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, inhaltsgleich.

So sind in dem Parallelogramm *ABGI*, Fig. 82, durch den Punkt *F* der Diagonale *AG* die beiden geraden Linien $DC \parallel AB$ und $EH \parallel AI$ gezogen und dadurch die beiden inhaltsgleichen Parallelogramme *EBCF* und *DFHI* entstanden.

§. 126.

Lehrsatz des Pappus. Wenn man über zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks, als Grundlinien, Parallelogramme construirt, die gegenüberliegenden Seiten dieser Parallelogramme bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, diesen Punkt mit der Spitze des Dreiecks durch eine gerade Linie verbindet, mit dieser Linie aus den Endpunkten der Grundlinie des Dreiecks Parallelen zieht, bis dahin, wo dieselben die gegenüberliegenden Seiten der Parallelogramme treffen, und endlich die zuletzt genannten Punkte durch eine gerade Linie verbindet: so entsteht über der Grundlinie des gegebenen Dreiecks ein Parallelogramm, welches der Summe der beiden über den Seiten dieses Dreiecks construirten Parallelogramme inhaltsgleich ist.

Fig. 83.



Voraussetzung:
ACDE und *BCFG* sind Parallelogramme.
$AK \parallel CH$
$BL \parallel CH$

Folgerung:
▱ $ABLK =$ ▱ $ACDE +$ ▱ $BCFG$.

Beweis. Die Vierecke *ACHK* und *BCHL* sind in Folge der Voraussetzung Parallelogramme, folglich hat man nach §. 97.

$$AK = CH\ ,\ BL = CH,$$

woraus

$$AK = BL;$$

und da ferner, in Folge der Voraussetzung, nach §. 33

$$AK \parallel BL$$

ist, so ist nach §. 100 das Viereck *ABLK* ein Parallelogramm.

Ferner ist nach §. 115

$$AIMK = ACHK = ACDE$$
$$BIML = BCHL = BCFG$$

woraus durch Addition folgt

$$ABLK = ACDE + BCFG$$

w. z. b. w.

Anmerkung.. Diesen Satz hat Pappus von Alexandria gegeben, welcher um das Jahr 400 nach Chr. Geb. lebte. Er ist in einem Werke des Pappus enthalten, welches für uns besonders deshalb große Wichtigkeit hat, weil es uns zugleich von einer Anzahl mathematischer Schriften der Griechen, die seitdem verloren sind, ausführliche Nachricht giebt.

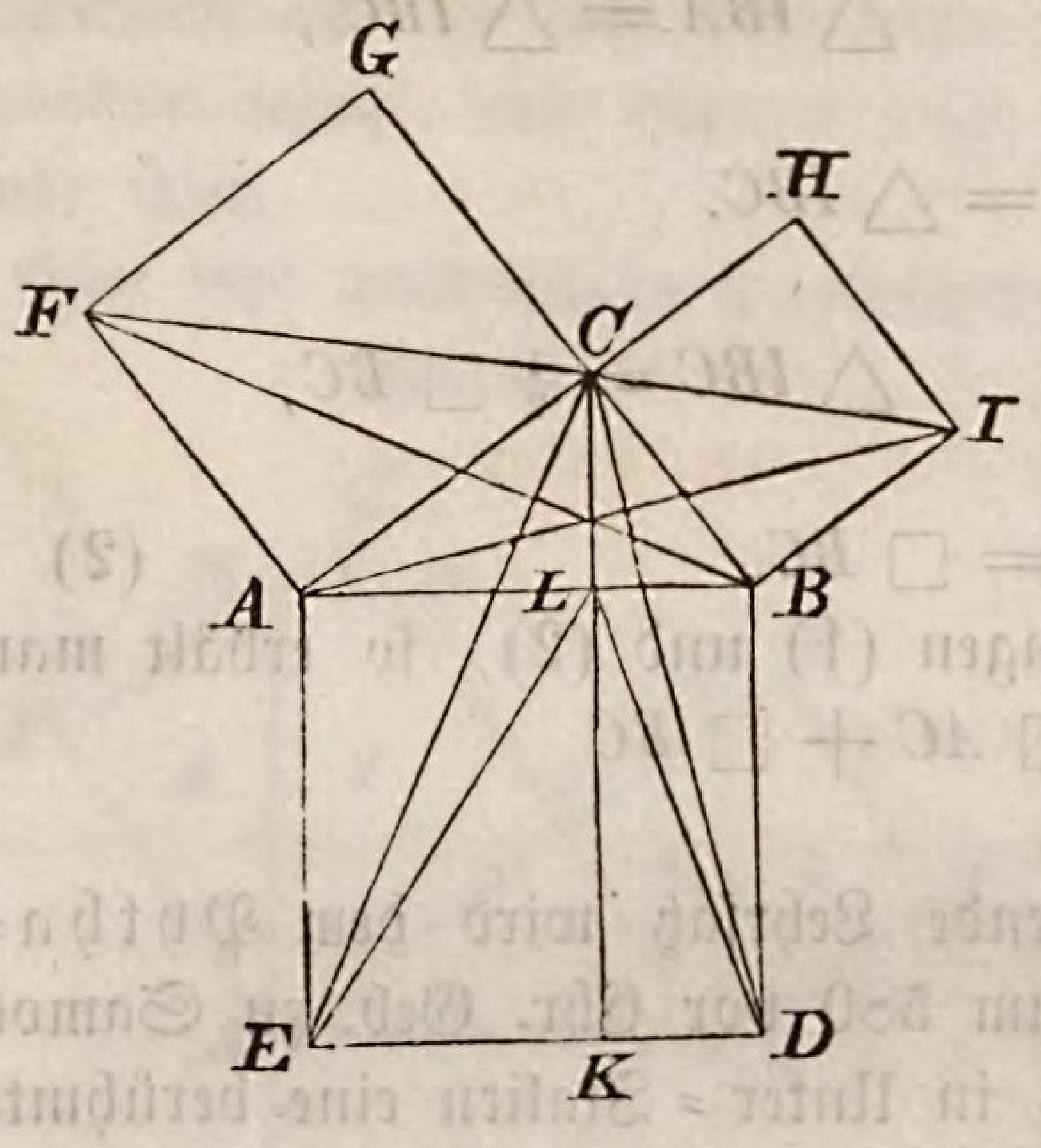
Wie man von dem vorstehenden Lehrsatze Gebrauch machen kann, um zwei gegebene Parallelogramme zu addiren oder zu subtrahiren, so daß die Summe oder Differenz wieder ein Parallelogramm wird, leuchtet von selbst ein.

§. 127.

Lehrsatz des Pythagoras. Das Quadrat über der Hy=

potenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist inhaltsgleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Fig. 84.



Voraussetzung:
$\angle ACB = \mathfrak{R}$.

Folgerung:
$\square AB = \square AC + \square BC$.

Beweis. Man ziehe aus dem Scheitelpunkte C des rechten Winkels die gerade Linie $CK \parallel AE$, und beweise alsdann daß 1) das Rechteck $ALKE = \square AC$, und 2) das Rechteck $BLKD = \square BC$ ist.

Um das Erste zu beweisen, ziehe man die Diagonalen EL und FC, und die Hülfslinien EC und FB. Man hat alsdann

$AC = AF$ als Quadratseiten
$AE = AB$ „ „
$\angle CAE = \angle FAB = \mathfrak{R} + \angle CAB$

folglich nach §. 60

$$\triangle CAE \cong \triangle FAB.$$

Ferner ist nach §. 116

$$\triangle CAE = \triangle LAE, \qquad \triangle FAB = \triangle FAC,$$

folglich auch

$$\triangle LAE = \triangle FAC.$$

Endlich ist

$$\triangle LAE = \tfrac{1}{2} ALKE, \qquad \triangle FAC = \tfrac{1}{2} \square AC,$$

folglich

$$ALKE = \square AC. \qquad (1)$$

Um das Zweite zu beweisen, ziehe man ebenso die Diagonalen DL und IC, und die Hülfslinien DC und IA. Man hat alsdann

$BC = BI$ als Quadratseiten
$BD = BA$ „ „
$\angle CBD = \angle IBA = \mathfrak{R} + \angle CBA$

folglich nach §. 60

$$\triangle CBD \equiv \triangle IBA.$$

Ferner ist nach §. 116

$$\triangle CBD = \triangle LBD, \quad \triangle IBA = \triangle IBC,$$

folglich auch

$$\triangle LBD = \triangle IBC.$$

Endlich ist

$$\triangle LBD = \tfrac{1}{2} BLKD, \quad \triangle IBC = \tfrac{1}{2} \square BC,$$

folglich

$$BLKD = \square BC. \qquad (2)$$

Addirt man nun die Gleichungen (1) und (2), so erhält man

$$\square AB = \square AC + \square BC$$

w. z. b. w.

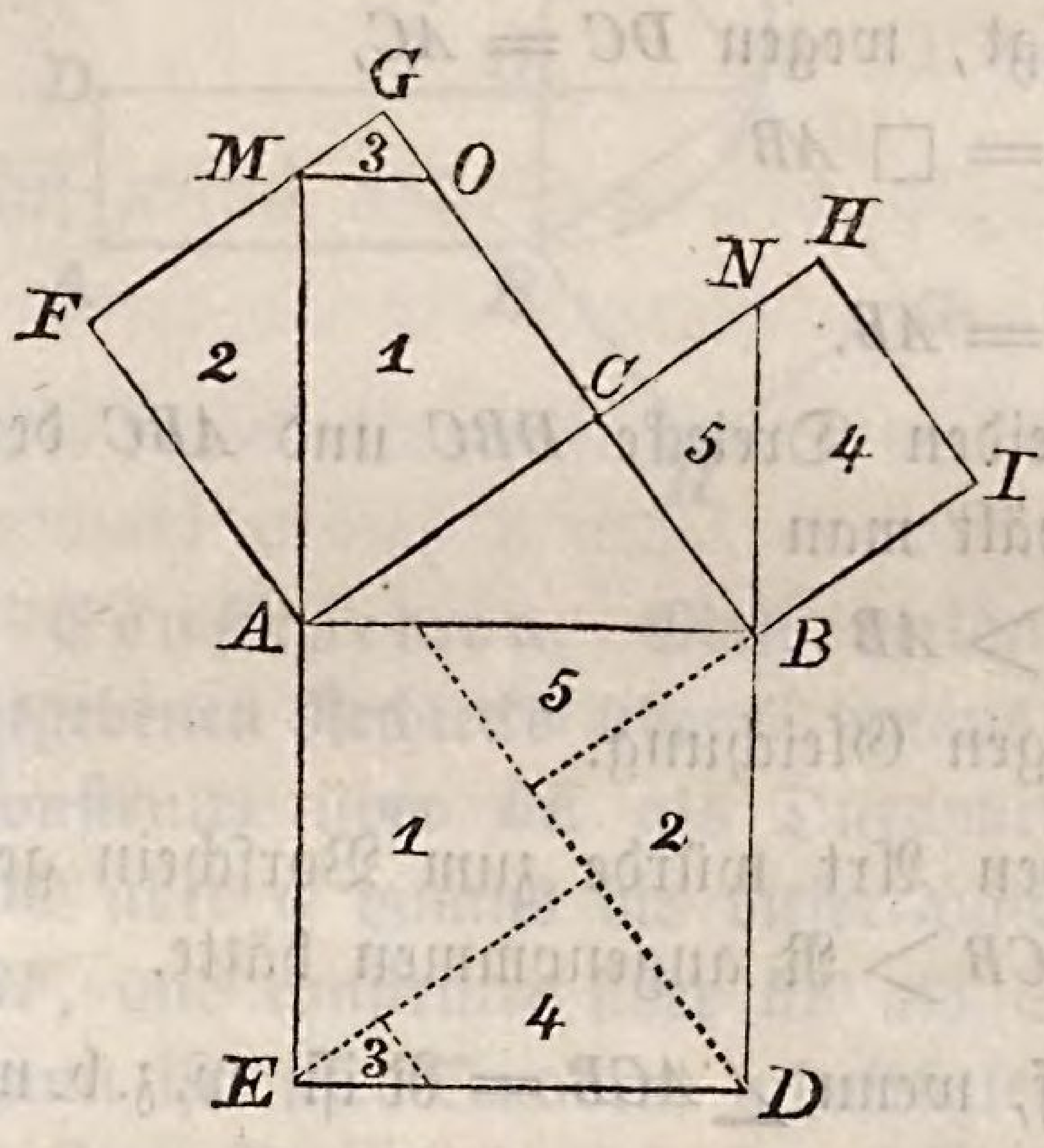
Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz wird dem Pythagoras zugeschrieben, welcher um 580 vor Chr. Geb. zu Samos geboren wurde und zu Kroton in Unter-Italien eine berühmte philosophische Schule gründete. Es wird erzählt, daß Pythagoras aus Dank für seine Erfindung den Göttern eine Hekatombe zum Opfer gebracht habe; doch widerspricht dieser Erzählung der Umstand, daß die Pythagoreer, als Anhänger der Lehre von der Seelenwanderung, eine Tödtung von Thieren sich nicht erlaubten. Auch der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks (§. 45) wird dem Pythagoras zugeschrieben, der überhaupt auf das Studium der Mathematik großen Werth legte. Nach ihm wird die bekannte quadratförmige Anordnung der Ein-mal-Eins die Pythagoreische Rechentafel genannt. Unsere neun Ziffern und ihr Gebrauch beim Zahlenschreiben sollen ihm gleichfalls bekannt gewesen sein; vielleicht hatte er sie auf seiner Reise nach Indien kennen gelernt und von dort mitgebracht; doch sind sie sonst nirgends bei den Griechen erweisbar in den Gebrauch gekommen. Endlich lehrte schon Pythagoras, so weit man aus den dunkelen Berichten seiner Schüler schließen kann, die Bewegung der Erde um die Sonne; eine Lehre, die indessen durch Aristoteles verworfen wurde, bis erst Copernicus berufen war, sie wieder zu einem Fundamentalsatze der Astronomie zu erheben.

Wie Pythagoras den nach ihm benannten Lehrsatz bewiesen hat, ist uns unbekannt. Der oben gegebene Beweis ist derselbe, welchen Euklides in seinen Elementen mittheilt. Einen zweiten Be-

weis kann man sogleich aus dem Lehrsatze des Pappus §. 126 ableiten. Denn nimmt man in Fig. 81 den Winkel *ACB* gleich einem rechten Winkel und die Figuren *ACDE* und *BCFG* als Quadrate an, so läßt sich leicht beweisen, daß auch *ABLK* ein Quadrat wird, und daraus folgt alsdann sogleich der zu beweisende Satz.

Eine sehr anschauliche Darstellung des Pythagoreischen Lehrsatzes ergiebt sich auf folgende Weise. Man ziehe, Fig. 85, $AM \perp AB$, $BN \perp AB$ und $MO \parallel AB$. Diese Linien zerlegen die Quadrate der beiden Katheten in die fünf mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichneten Theile. Wenn man nun diese fünf Theile aus einander nimmt und in der durch Punkte angedeuteten Weise in *ABDE* wieder zusammensetzt, so decken sie genau das Quadrat der Hypotenuse.

Fig. 85.



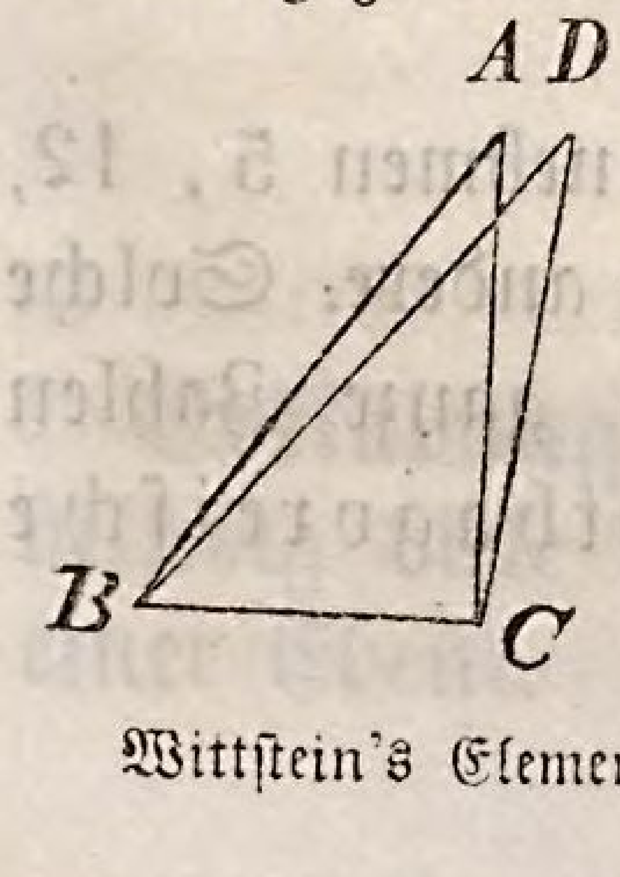
Wie man von dem Lehrsatze des Pythagoras Gebrauch machen kann, um zwei gegebene Quadrate zu addiren oder zu subtrahiren, so daß die Summe oder Differenz wieder ein Quadrat wird, leuchtet von selbst ein.

§. 128.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreiecke das Quadrat über einer Seite inhaltsgleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten ist, so ist das Dreieck ein rechtwinkeliges.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 86.



Voraussetzung:

$\square AB = \square AC + \square BC$

Folgerung:

$\angle ACB = R.$

Beweis. Gesetzt der Winkel ACB sei nicht ein rechter Winkel, sondern z. B. $\angle ACB < R$. Man errichte in C auf BC ein Perpendikel CD, mache $CD = CA$ und ziehe BD. Alsdann ist DCB ein in C rechtwinkeliges Dreieck, in welchem man nach dem vorigen Lehrsatze hat

$$\square DB = \square DC + \square BC.$$

Ferner ist nach der Voraussetzung

$$\square AB = \square AC + \square BC,$$

und aus beiden Gleichungen folgt, wegen $DC = AC$,

$$\square DB = \square AB$$

mithin auch

$$DB = AB.$$

Wenn man aber auf die beiden Dreiecke DBC und ABC den Lehrsatz §. 81 anwendet, so erhält man

$$DB > AB$$

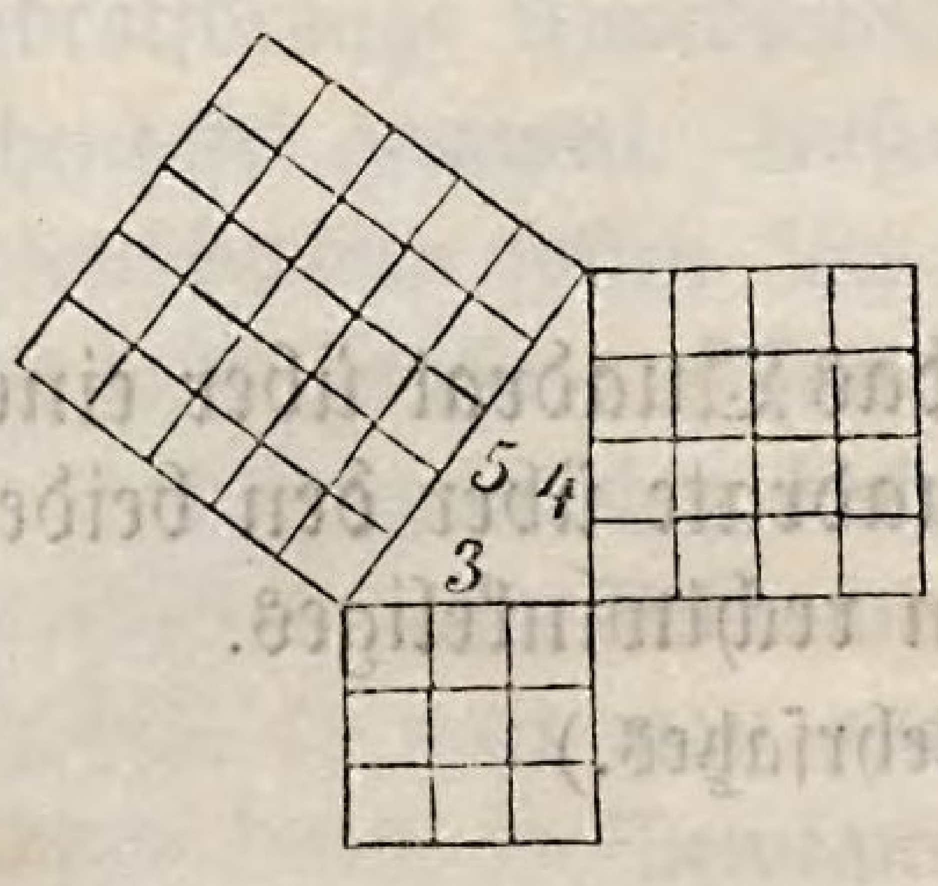
und dieses widerspricht der vorigen Gleichung.

Ein Widerspruch von derselben Art würde zum Vorschein gekommen sein, wenn man $\angle ACB > R$ angenommen hätte.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn $\angle ACB = R$ ist, w. z. b. w.

Beispiel. Wenn die Seiten eines Dreiecks in einer beliebigen Längen-Einheit durch die Zahlen 3, 4, 5 ausgedrückt werden, so ist das Dreieck ein rechtwinkeliges. Denn construirt man die Quadrate über den drei Seiten und zerlegt dieselben, wie in Fig. 87, in kleine Quadrate, welche die Längen-Einheit zur Seite haben, so sind in den drei Quadraten der Reihe nach 9, 16, 25 kleine Quadrate enthalten; und da $9 + 16 = 25$ ist, so geschieht damit dem vorstehenden Lehrsatze Genüge.

Fig. 87.

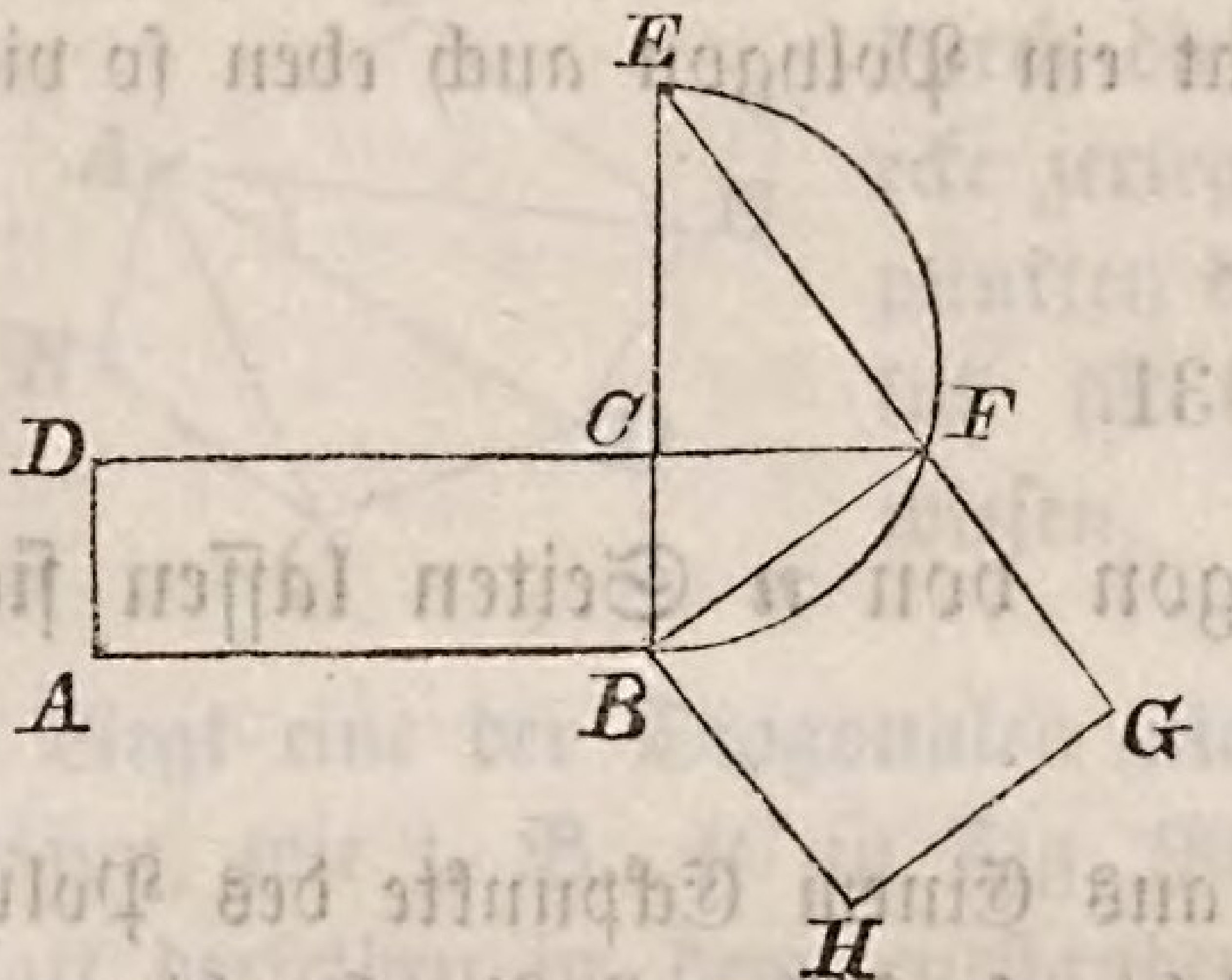


Statt der drei Zahlen 3, 4, 5 kann man auch nehmen 5, 12, 13; oder 8, 15, 17; oder 20, 21, 29; und viele andere. Solche rechtwinkelige Dreiecke, deren Seiten sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, nennt man vorzugsweise Pythagoreische Dreiecke.

§. 129.

Aufgabe. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 88.



Gegeben:
Rechteck *ABCD*.

Gesucht:
Inhaltsgleiches Quadrat.

Construction. Man verlängere die kleinere Seite *BC* des gegebenen Rechtecks über *C* hinaus nach *E*, so daß *BE* = *AB* wird, construire über *BE* als Durchmesser einen Halbkreis, verlängere *DC* über *C* hinaus bis dieser Halbkreis in *F* getroffen wird, ziehe *BF*, und construire über *BF* als Seite das Quadrat *BFGH*. Alsdann ist dieses Quadrat inhaltsgleich dem gegebenen Rechteck *ABCD*.

Zum Beweise ziehe man *EF*. Dann ist *BFGH* Quadrat über einer Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks *EBF*, und das Weitere folgt aus §. 127.

Anmerkung. Durch diese Aufgabe, mit Zuziehung früherer Aufgaben, ist man im Stande jedes gegebene Dreieck oder Viereck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fünfter Abschnitt.

Von den Polygonen.

§. 130.

Erklärung. Ein Polygon oder Vieleck ist ein durch beliebig viele sich schneidende gerade Linien umgränzter Theil einer Ebene.

Gewöhnlich schließt man das Dreieck, häufig auch das Viereck von den Polygonen aus. Doch gelten die meisten Eigenschaften der Polygone auch von den Vierecken und Dreiecken.

Ein Polygon hat eben so viel Eckpunkte wie Seiten. Und da in jedem Eckpunkte des Polygon zwei daselbst zusammenstoßende Seiten einen Winkel bilden, so hat ein Polygon auch eben so viel Winkel wie Seiten.

§. 131.

Lehrsatz. In einem Polygon von n Seiten lassen sich $\frac{n.(n-3)}{2}$ Diagonalen ziehen.

Beweis. Wenn man zuerst aus Einem Eckpunkte des Polygon alle möglichen Diagonalen zieht, so fallen 3 Punkte hinweg, nach denen man keine Diagonale ziehen kann; nämlich der Punkt selbst, aus welchem die Diagonalen gezogen werden, und die beiden benachbarten Eckpunkte des Polygon. Also bleiben nur $n-3$ Eckpunkte übrig, nach denen man Diagonalen ziehen kann, oder die Anzahl der aus Einem Eckpunkte des Polygon möglichen Diagonalen beträgt $n-3$.

Werden nun aus jedem der n Eckpunkte alle möglichen Diagonalen gezogen, so wiederholt sich die vorige Anzahl n mal, oder man erhält $n.(n-3)$. Aber in dieser Aufzählung ist jede Diagonale zweimal gezählt, nämlich sowohl von ihrem einen Endpunkte als von ihrem anderen Endpunkte aus. Also beträgt die Anzahl der möglichen Diagonalen nur $\frac{n.(n-3)}{2}$, w. z. b. w.

Beispiel. Die Anzahl der möglichen Diagonalen im Viereck beträgt 2, im Fünfeck 5, im Sechseck 9, rc.

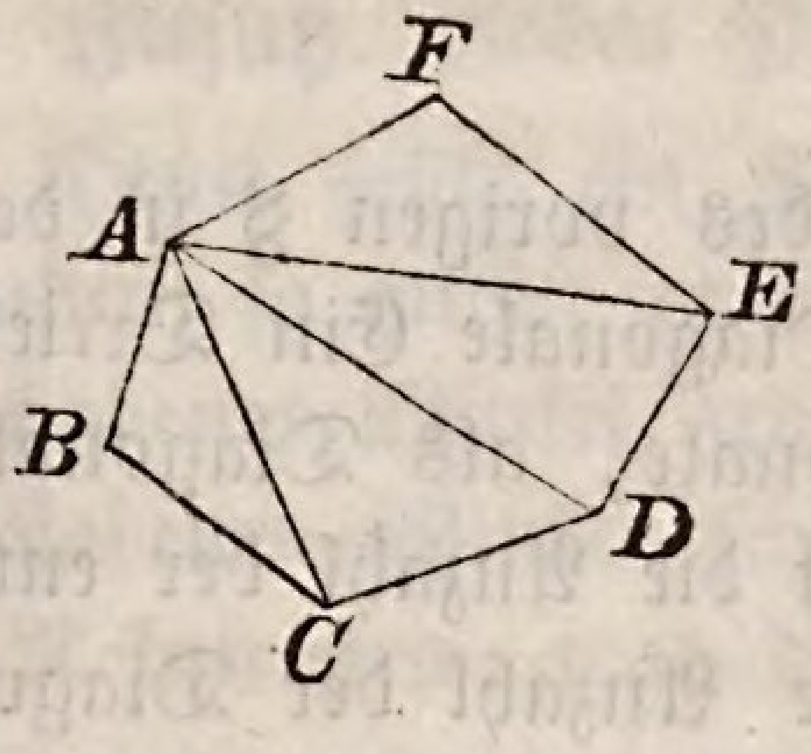
Diese Diagonalen können, jede einzeln genommen, entweder ganz innerhalb, oder ganz außerhalb, oder zum Theil innerhalb und zum Theil außerhalb der Fläche der Figur fallen.

§. 132.

Lehrsatz. Um ein gegebenes Polygon von n Seiten in Dreiecke zu zerlegen, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygon zusammenfallen, müssen $n-3$ Diagonalen gezogen werden.

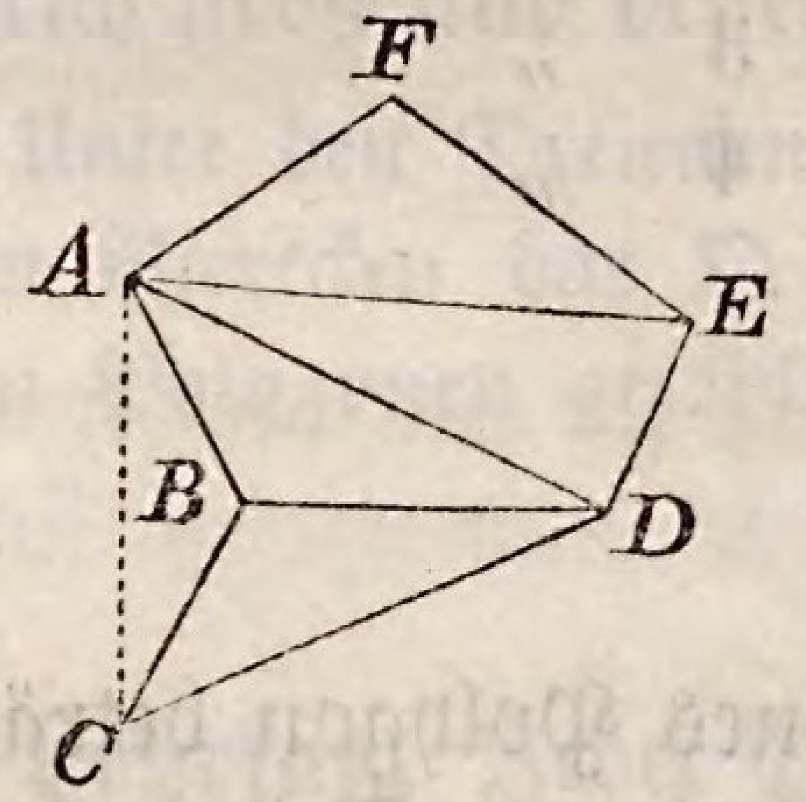
Beweis. Wenn man aus Einem Eckpunkte des Polygon alle möglichen Diagonalen zieht, so beträgt die Anzahl dieser Diagonalen $n-3$ (s. d. vorigen Beweis). Liegen nun alle diese Diagonalen innerhalb der Fläche des Polygon, wie in Fig. 89, *AC*, *AD* und *AE*, so wird durch dieselben das Polygon in lauter Dreiecke zerlegt, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygon zusammenfallen; folglich ist für diesen Fall der Lehrsatz bewiesen.

Fig. 89.



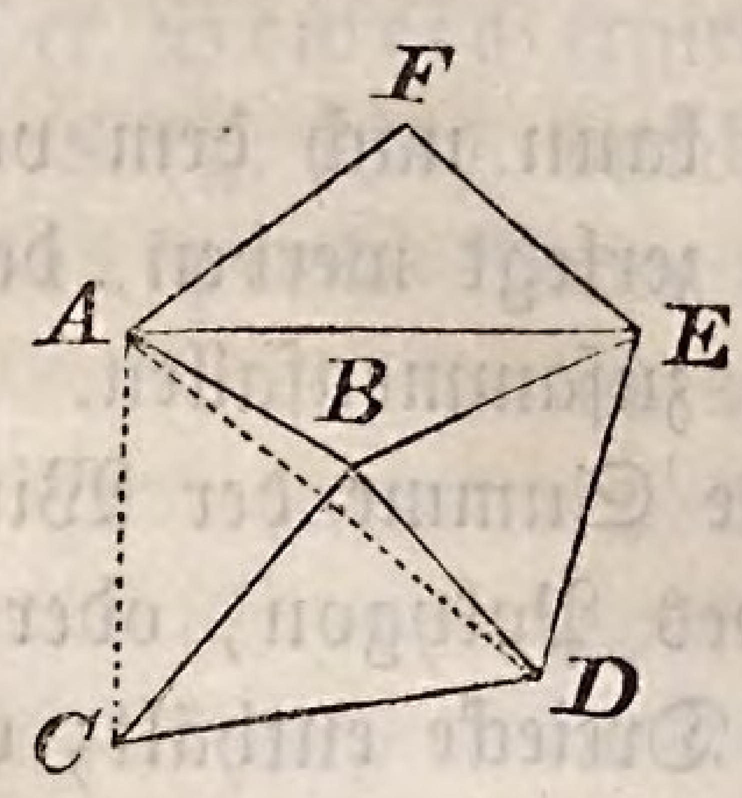
Liegt eine der Diagonalen nicht innerhalb der Fläche des Polygon, wie z. B. *AC* in Fig. 90, so kann man sie weglassen und statt derselben in dem entstandenen Viereck *ABCD* aus einem anderen Eckpunkte, *B*, eine Diagonale, *BD*, ziehen, welche innerhalb der Fläche dieses Vierecks liegt. Also bleibt die Anzahl der Diagonalen, welche das Polygon in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygon zusammenfallen, so groß wie vorhin.

Fig. 90.



Liegen zwei auf einander folgende Diagonalen nicht innerhalb der Fläche des Polygon, wie z. B. *AC* und *AD*, Fig. 91, so kann man sie beide weglassen und statt derselben in dem entstandenen Fünfeck *ABCDE* zwei andere Diagonalen, *BD* und *BE*, ziehen, welche innerhalb der Fläche dieses Fünfecks liegen. Also bleibt wieder die Anzahl der Diagonalen, welche das Polygon in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygon zusammenfallen, so groß wie vorhin.

Fig. 91.



So kann man fortfahren, wenn mehr als zwei auf einander folgende Diagonalen nicht innerhalb der Fläche des Polygon fallen, und gelangt allgemein zu dem Schlusse, daß die Anzahl der erforderlichen Diagonalen immer $n-3$ beträgt, w. z. b. w.

§. 133.

Lehrsatz. Die Anzahl der Dreiecke, in welche ein gegebenes Polygon von n Seiten zerlegt werden kann und deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygon zusammenfallen, beträgt $n-2$.

Beweis. Wenn man die Diagonalen des vorigen § in der gehörigen Reihefolge zieht, so schneidet jede Diagonale Ein Dreieck von dem Polygon ab; nur die letzte Diagonale, als Diagonale eines Vierecks, liefert zwei Dreiecke. Also ist die Anzahl der entstandenen Dreiecke um Eins größer als die Anzahl der Diagonalen. Da nun die Anzahl dieser Diagonalen $n-3$ war, so beträgt die Anzahl der entstandenen Dreiecke $n-2$, w. z. b. w.

Beispiel. So zerlegt man also

ein Viereck	durch	1	Diagonalen	in 2	Dreiecke
„ Fünfeck	„	2	„	„ 3	„
„ Sechseck	„	3	„	„ 4	„
ꝛc.					

§. 134.

Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Polygon beträgt so viel mal zwei rechte Winkel, wie das Polygon Seiten hat, weniger vier rechte Winkel.

Oder wenn man in einem Polygon von n Seiten die Summe aller Winkel mit S bezeichnet, so ist

$$S = 2n\,\mathfrak{R} - 4\,\mathfrak{R}.$$

Beweis. Das Polygon von n Seiten kann nach dem vorigen §. durch Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Dreiecks zusammenfallen. In jedem dieser Dreiecke beträgt nach §. 45 die Summe der Winkel $2\,\mathfrak{R}$. Also muß die Summe aller Winkel des Polygon, oder S, so viel mal $2\,\mathfrak{R}$ betragen wie das Polygon Dreiecke enthält; oder es ist

$$S = (n-2)\,.\,2\,\mathfrak{R}$$

woraus durch weitere Entwickelung folgt

$$S = 2n\mathfrak{R} - 4\,\mathfrak{R}$$

Beispiel. Die Summe aller Winkel beträgt im Dreieck 2 R, im Viereck 4 R, im Fünfeck 6 R, im Sechseck 8 R, 2c.

§. 135.

Zusatz. Jedes Polygon hat wenigstens drei hohle Winkel.

Denn sollte ein Polygon von n Seiten nur 2 hohle Winkel haben, so müßte es $n-2$ erhabene Winkel enthalten; und da ein erhabener Winkel größer als 2 R ist, so würde die Summe dieser erhabenen Winkel schon mehr als $(n-2) . 2$ R, d. i. $2n$ R — 4 R betragen, was dem vorigen §. widerspricht.

§. 136.

Erklärung. Unter einem regelmäßigen oder regulären Polygon versteht man ein Polygon, dessen Seiten gleich groß und dessen Winkel gleich groß sind.

Unter den Dreiecken das gleichseitige Dreieck, und unter den Vierecken das Quadrat können demnach zu den regelmäßigen Polygonen gezählt werden.

§. 137.

Lehrsatz. Jeder Polygonwinkel in einem regelmäßigen Polygon von n Seiten beträgt zwei rechte Winkel weniger $\frac{4}{n}$ R.

Oder wenn man den Polygonwinkel mit W bezeichnet, so ist

$$W = 2\,\mathrm{R} - \frac{4}{n}\,\mathrm{R}.$$

Der Beweis ergiebt sich, wenn man die Summe aller Winkel, oder S (§. 134), durch die Anzahl dieser Winkel, oder n, dividirt.

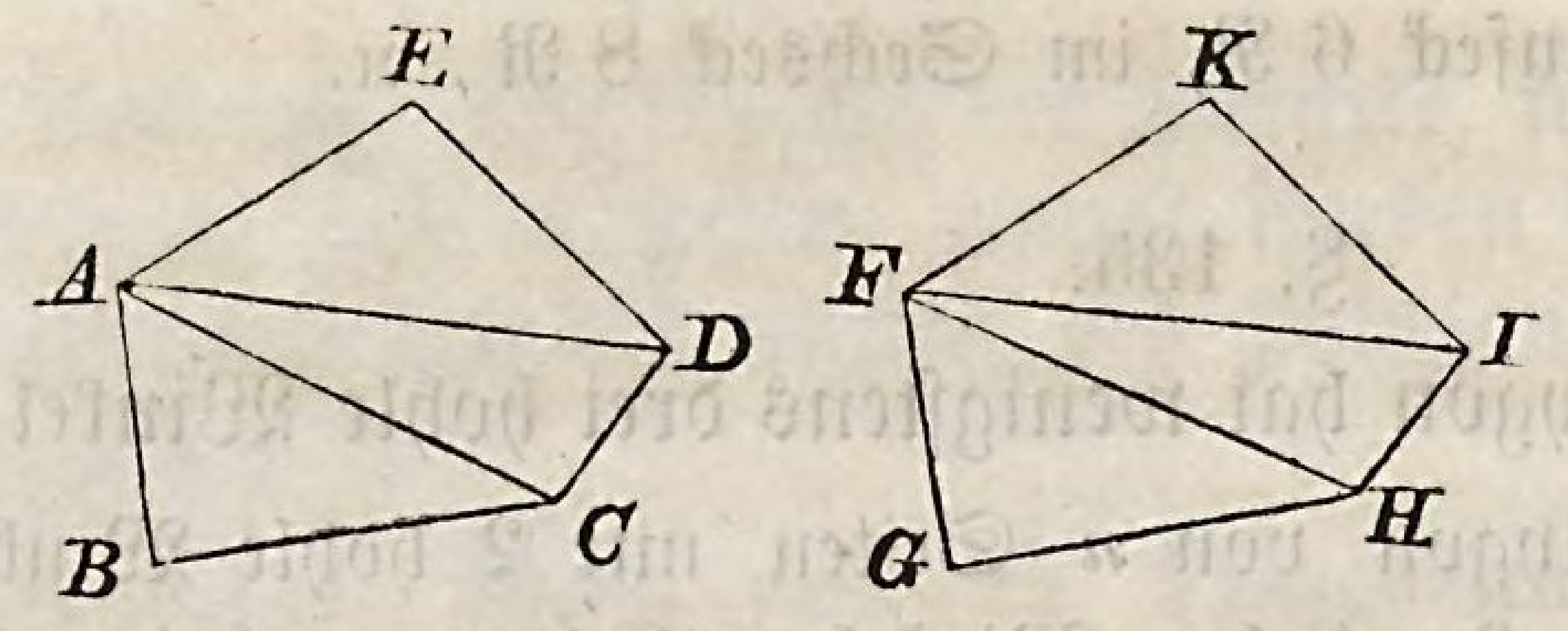
Beispiel. Jeder Polygonwinkel beträgt

im	regelmäßigen	Dreieck	60°
„	„	Viereck	90°
„	„	Fünfeck	108°
„	„	Sechseck	120°
		2c.	

§. 138.

Lehrsatz. Congruente Polygone werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in congruente Dreiecke zerlegt.

Fig. 92.



Voraussetzung:
$ABCDE \equiv FGHIK$.

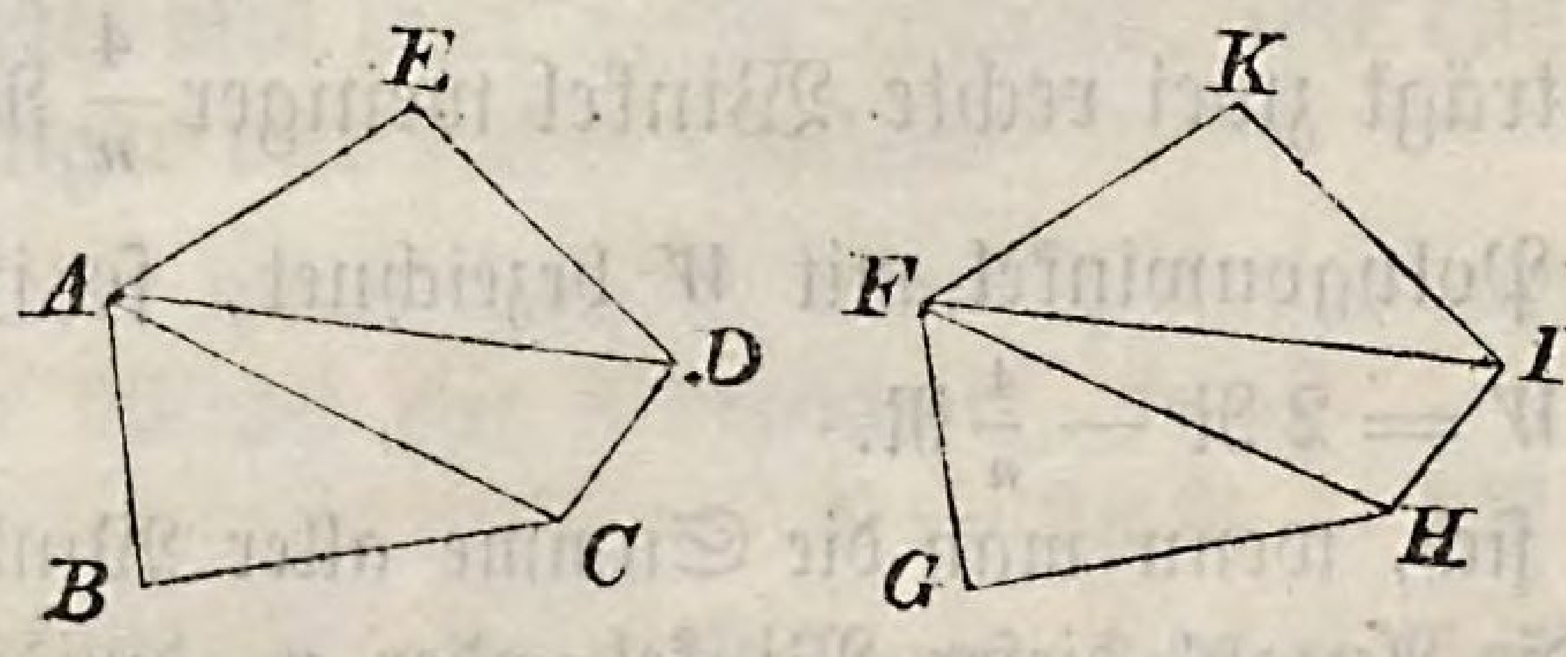
Folgerung:
$\triangle ABC \equiv \triangle FGH$
$\triangle ACD \equiv \triangle FHI$
$\triangle ADE \equiv \triangle FIK$

Beweis. Da die Polygone *ABCDE* und *FGHIK* als congruent vorausgesetzt werden, so kann man sie so auf einander legen, daß sie sich vollständig decken. Alsdann werden auch die gleichliegenden Eckpunkte beider Polygone zusammenfallen, folglich auch (§. 9) die übereinstimmend gezogenen Diagonalen *AC* und *FH*, *AD* und *FI*; und mithin decken sich auch die Dreiecke *ABC* und *FGH*, *ACD* und *FHI*, *ADE* und *FIK*, d. h. diese Dreiecke sind paarweise congruent, w. z. b. w.

§. 139.

Lehrsatz. Polygone sind congruent, wenn sie aus congruenten Dreiecken auf übereinstimmende Weise zusammengesetzt sind.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.



Voraussetzung:
$\triangle ABC \equiv \triangle FGH$
$\triangle ACD \equiv \triangle FHI$
$\triangle ADE \equiv \triangle FIK$

Folgerung:
$ABCDE \equiv FGHIK$.

Beweis. Man lege die beiden Polygone *ABCDE* und *FGHIK* so auf einander, daß das Dreieck *FGH* auf *ABC* fällt, welches möglich ist, da beide Dreiecke nach der Voraussetzung congruent sind. Alsdann sind, wegen der übereinstimmenden Zusammensetzung der beiden Polygone, die zusammenfallenden Punkte *A* und *F*, *C* und *H* zugleich auch gleichliegende Eckpunkte der beiden folgenden congruenten Dreiecke *ACD* und *FHI*; folglich wird auch das Dreieck *FHI* auf *ACD* fallen. Ferner sind, wegen der übereinstimmenden Zusammensetzung der beiden Polygone, die jetzt zusammenfallenden Punkte *A* und *F*, *D* und *I* zugleich auch gleich=

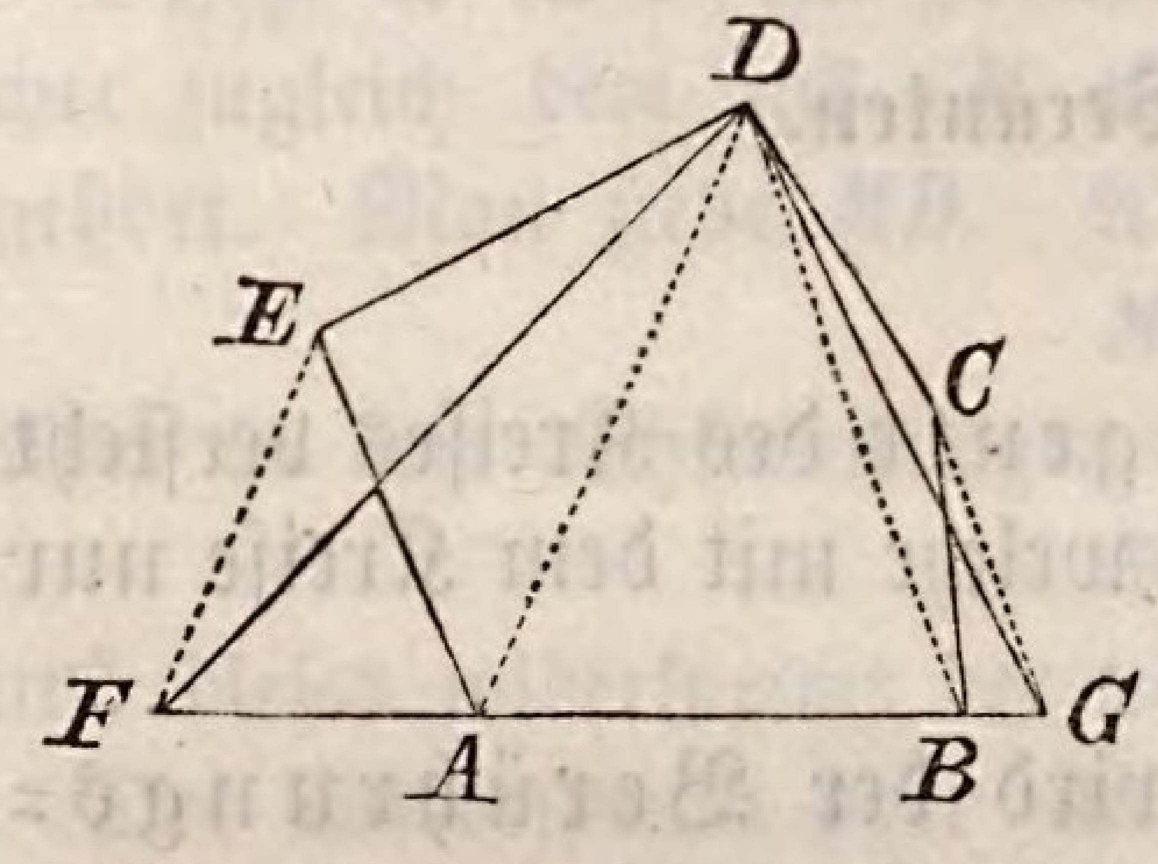
liegende Eckpunkte der beiden folgenden congruenten Dreiecke *ADE* und *FIK*; folglich wird auch das Dreieck *FIK* auf *ADE* fallen. Ebenso würde man fortfahren, wenn die Reihe der Dreiecke noch größer wäre. Man gelangt mithin allgemein zu dem Schlusse, daß die beiden vorliegenden Polygone vollständig zusammenfallen, also congruent sind, w. z. b. w.

Anmerkung. Durch diesen Lehrsatz ist man immer im Stande, die Congruenz zweier Polygone auf die Congruenz derjenigen Dreiecke zurückzuführen, aus welchem die Polygone zusammengesetzt werden können. Aus diesem Grunde ist eine weitere Betrachtung der Congruenz der Polygone unnöthig.

§. 140.

Aufgabe. Ein gegebenes Polygon in ein Dreieck zu verwandeln.

Fig. 93.



Gegeben:

Polygon *ABCDE*.

Gesucht:

Inhaltsgleiches △.

Construction. In dem gegebenen Fünfeck *ABCDE* ziehe man eine Diagonale *AD*, welche das Dreieck *ADE* abschneidet; lege durch die gegenüberliegende Spitze *E* dieses Dreiecks eine Parallele zu *AD*, mache dieselbe so lang bis sie die Verlängerung der anliegenden Seite *BA* in *F* trifft, und ziehe *DF*. Alsdann ist aus dem Fünfeck *ABCDE* das inhaltsgleiche Viereck *FBCD* geworden.

Ferner ziehe man in dem entstandenen Viereck *FBCD* eine Diagonale *BD*, welche das Dreieck *BDC* abschneidet; lege durch die gegenüberliegende Spitze *C* dieses Dreiecks eine Parallele zu *BD*, mache dieselben so lang bis sie die Verlängerung der anliegenden Seite *AB* in *G* trifft, und ziehe *DG*. Alsdann ist aus dem Viereck *FBCD* das inhaltsgleiche Dreieck *FGD* geworden, mithin die Aufgabe gelöst.

Der Beweis ergiebt sich aus der Inhaltsgleichheit der Dreiecke *ADE* und *ADF*, so wie der Dreiecke *BDC* und *BDG*, nach §. 116.

Aus dieser Construction folgt von selbst, wie man mit einem mehr als fünfseitigen Polygon zu verfahren hat. Auch ist leicht zu erkennen, wie die Construction sich ändern muß, wenn das Polygon erhabene Winkel enthält.

Anmerkung. Nach dem vorigen Abschnitt kann jedes Dreieck in ein Rechteck, und dieses in ein Quadrat verwandelt werden. Folglich läßt sich allgemein jedes Polygon in ein Quadrat verwandeln.

Sechster Abschnitt.

Vom Kreise.

Tangenten und Secanten.

§. 141.

Erklärung. *) Unter einer Tangente des Kreises versteht man eine unbegrenzte gerade Linie, welche mit dem Kreise nur Einen Punkt gemein hat.

Dieser gemeinschaftliche Punkt wird der Berührungspunkt genannt.

Auch sagt man von einer Tangente, sie berühre (oder tangire) den Kreis.

§. 142.

Erklärung. Unter einer Secante des Kreises versteht man eine unbegrenzte gerade Linie, welche mit dem Kreise zwei Punkte gemein hat.

Diese beiden gemeinschaftlichen Punkte werden die Schnittpunkte genannt.

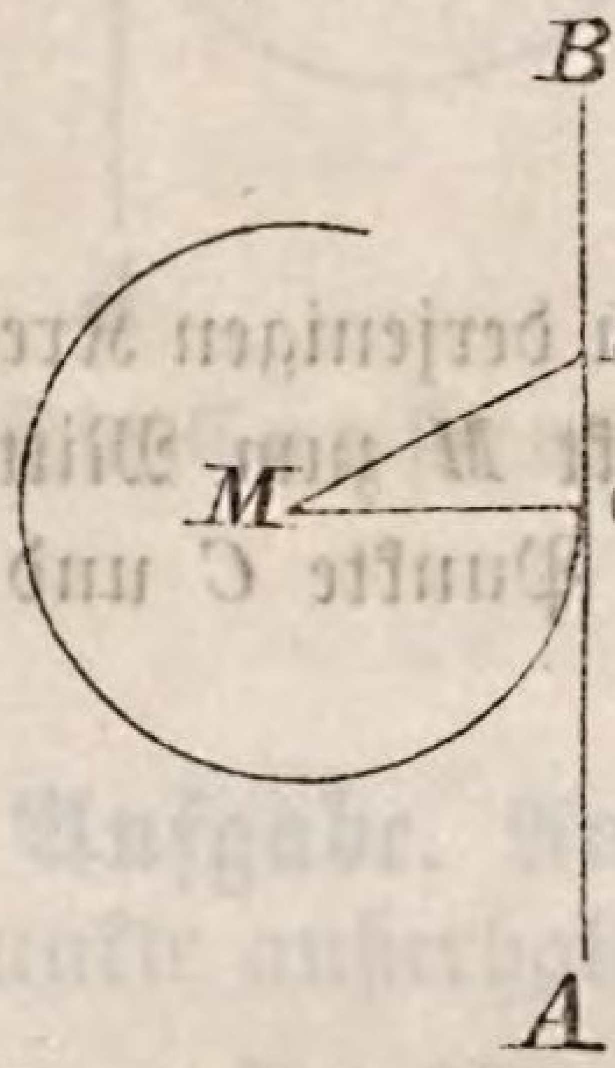
Auch sagt man von einer Secante, sie schneide den Kreis.

*) Hier sind zuvor die §§. 26 — 32 zu wiederholen.

§. 143.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche in dem Endpunkte eines Halbmessers rechtwinkelig auf diesem Halbmesser steht, ist eine Tangente des Kreises.

Fig. 94.



Voraussetzung:

$\angle BCM = \mathfrak{R}$.

Folgerung:

AB ist Tangente.

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß die gerade Linie AB außer dem Punkte C keinen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein hat.

Gesetzt es sei D ein zweiter Punkt der geraden Linie AB, welcher zugleich dem aus M als Mittelpunkt construirten Kreise angehört. Man ziehe MD. Alsdann hat man nach §. 27

$$MD = MC.$$

Aber in dem rechtwinkeligen Dreiecke MDC ist nach §. 67

$$MD > MC,$$

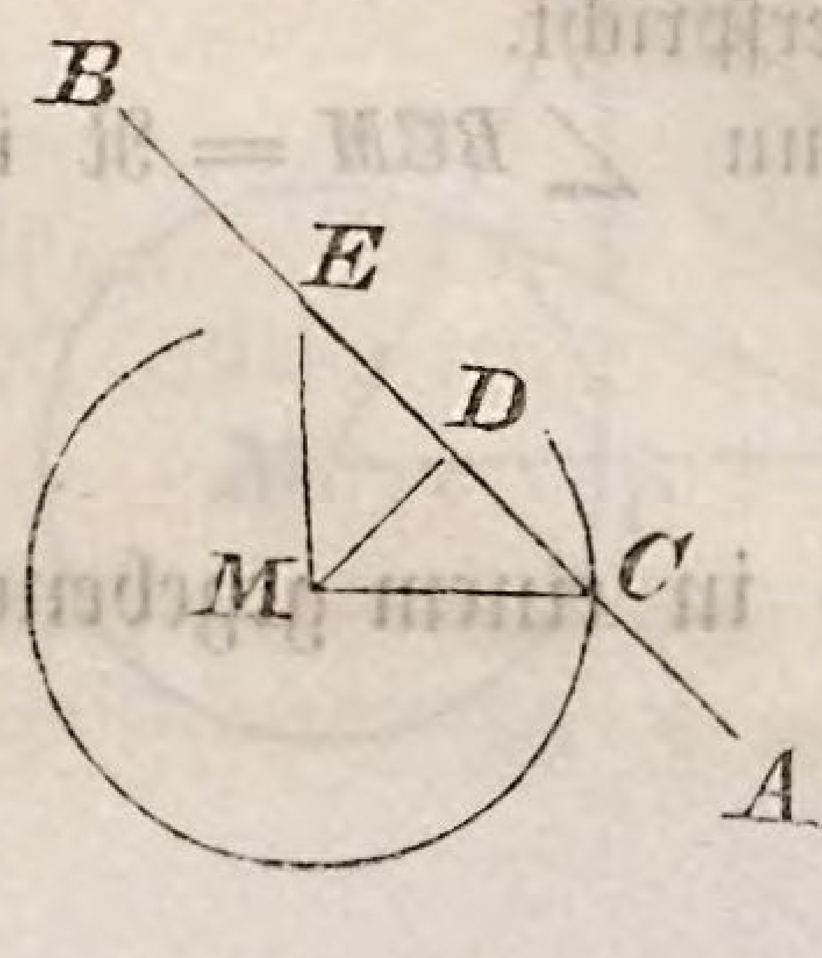
und dieses widerspricht der vorigen Gleichung.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn C der einzige Punkt ist, welchen die gerade Linie AB mit dem Kreise gemein hat, w. z. b. w.

§. 144.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche in dem Endpunkte eines Halbmessers nicht rechtwinkelig auf diesem Halbmesser steht, ist eine Secante des Kreises.

Fig. 95.



Voraussetzung:

$\angle BCM < \mathfrak{R}$.

Folgerung:

AB ist Secante.

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß die gerade Linie *AB* außer dem Punkte *C* noch einen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein hat.

Man fälle aus dem Mittelpunkte *M* des Kreises auf die gerade Linie *AB* des Perpendikels *MD*, trage die Länge *CD* nach *DE* ab und ziehe *ME*. Alsdann ist nach §. 74, 2)

$$MC = ME,$$

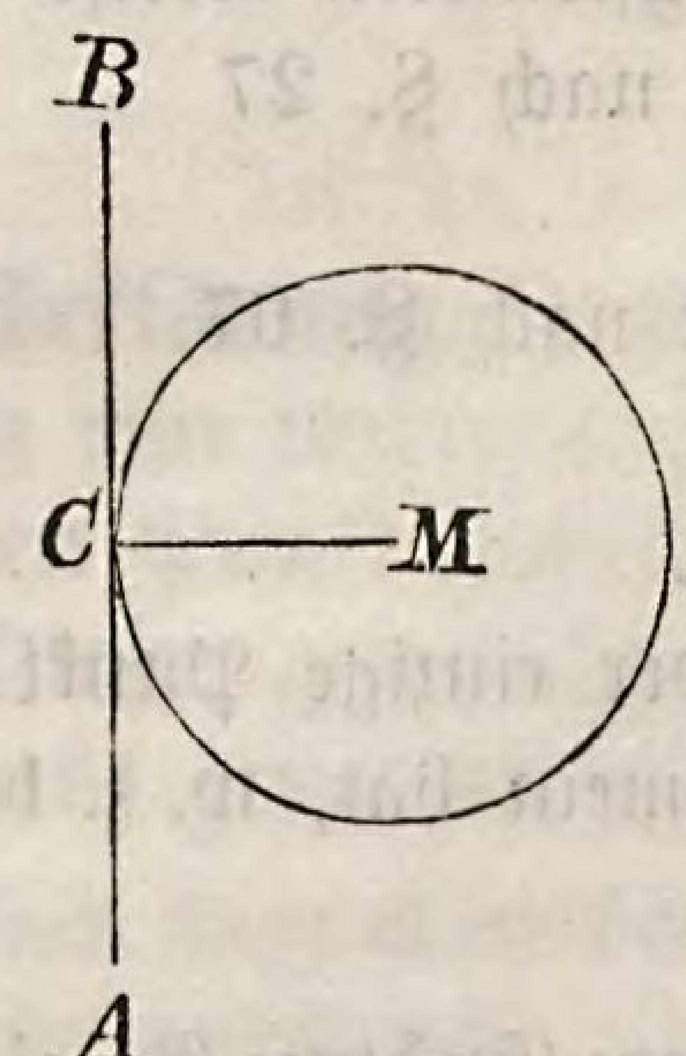
folglich ist nach §. 29 der Punkt *E* ein Punkt in derjenigen Kreis-Peripherie, welche durch *C* geht und den Punkt *M* zum Mittelpunkte hat; d. h. die gerade Linie *AB* hat zwei Punkte *C* und *E* mit dem Kreise gemein, w. z. b. w.

§. 145.

Lehrsatz. Jede Tangente schließt mit dem Halbmesser im Berührungspunkte einen rechten Winkel ein.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 143.)

Fig. 96.



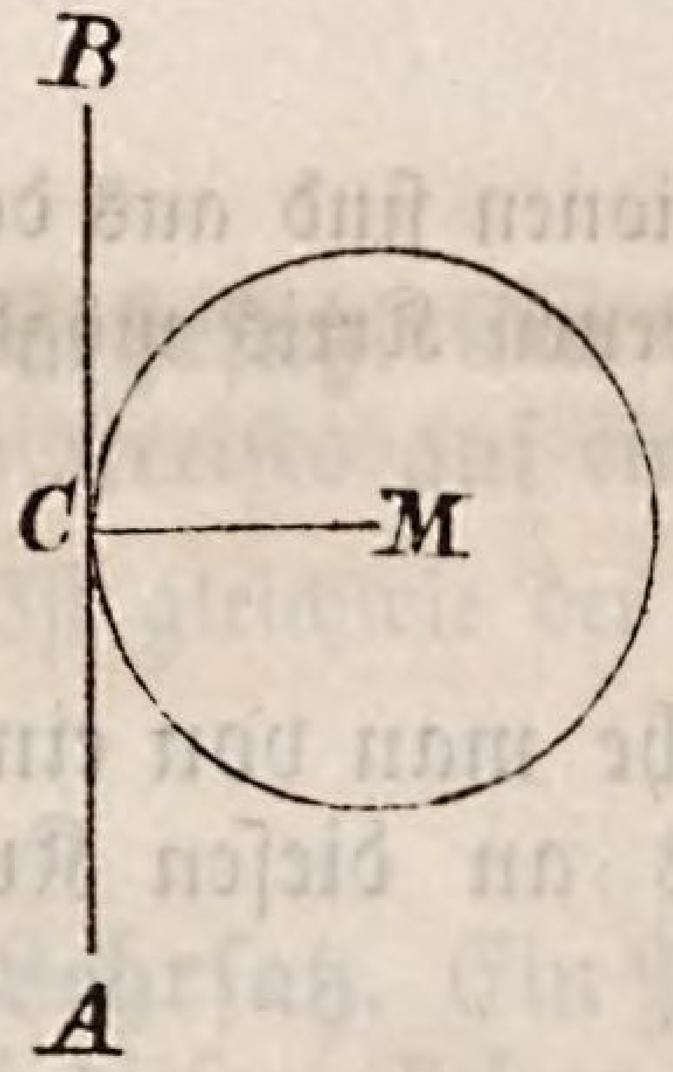
Voraussetzung:
AB ist Tangente in *C*.
Folgerung:
$\angle BCM = R$.

Beweis. Gesetzt es sei $\angle BCM$ nicht gleich einem rechten Winkel, so würde, nach dem vorigen Lehrsatze, die gerade Linie *AB* außer dem Punkte *B* noch einen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein haben, was der Voraussetzung widerspricht.

Dieser Widerspruch hört nur auf, wenn $\angle BCM = R$ ist, w. z. b. w.

§. 146.

Aufgabe. An einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben eine Tangente zu legen.



Gegeben:

○ aus *M*,

Punkt *C* in der Peripherie.

Gesucht:

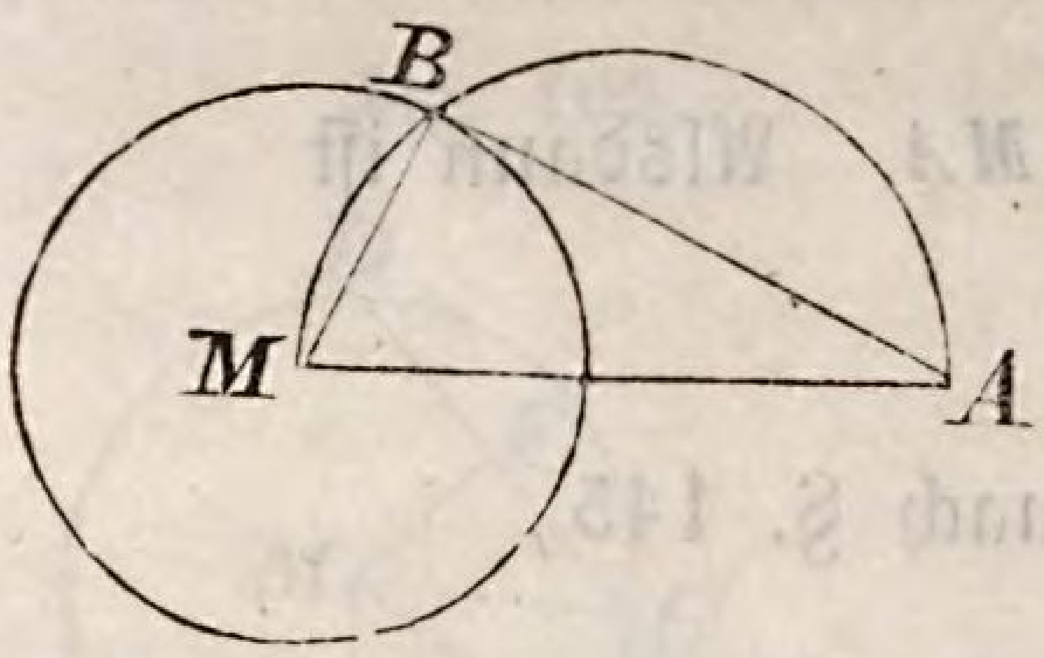
Tangente in *C* an ○.

Die Construction folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze §. 143.

§. 147.

Aufgabe. An einen gegebenen Kreis von einem gegebenen Punkte außerhalb desselben eine Tangente zu ziehen.

Fig. 97.



Gegeben:

○ aus *M*,

Punkt *A* außerhalb desselben.

Gesucht:

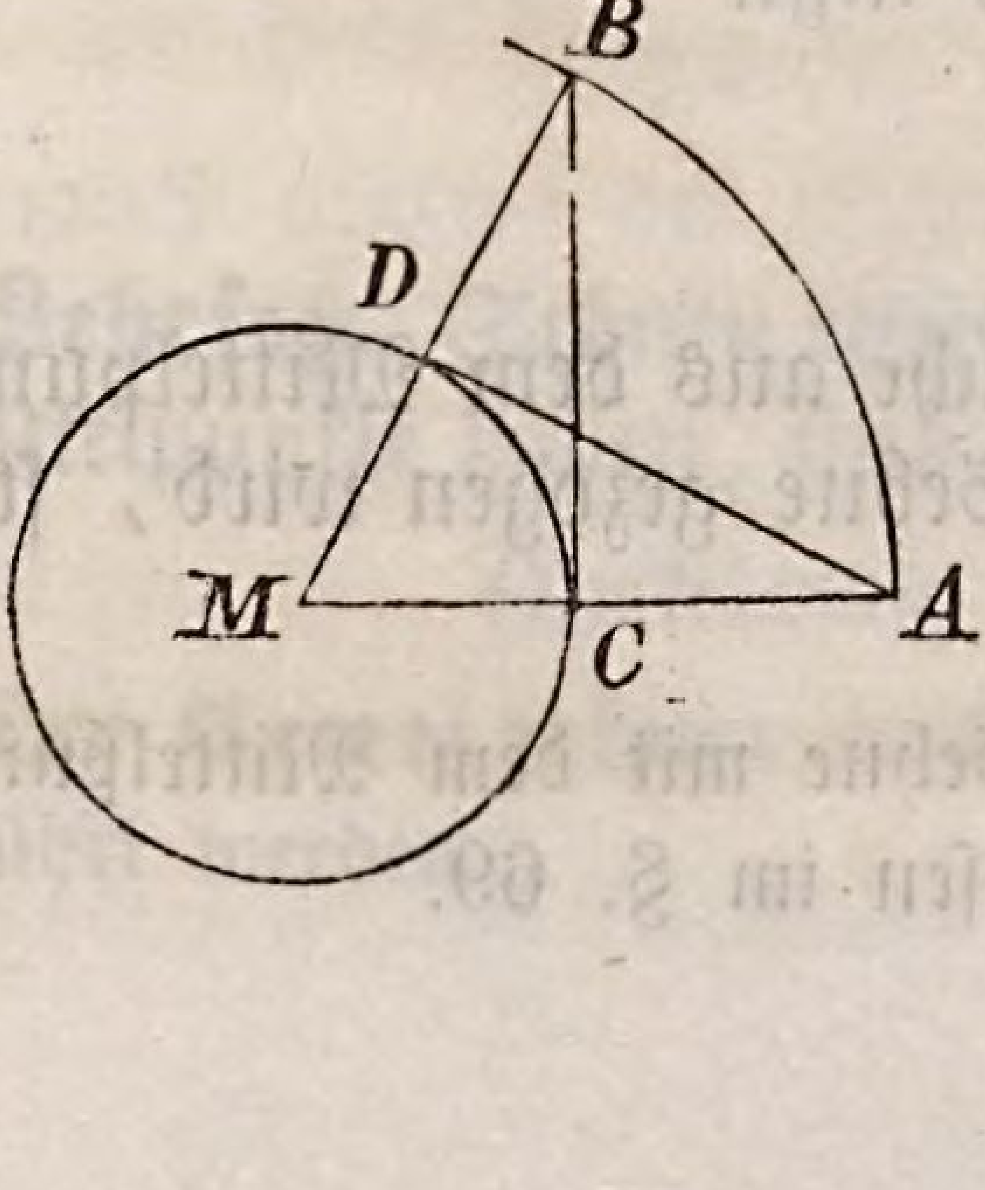
Tangente aus *A* an ○.

Erste Construction, Fig. 97. Man ziehe *MA*, construire über dieser Linie als Durchmesser den Halbkreis *MBA*, und verbinde den Punkt *B*, wo dieser Halbkreis den gegebenen Kreis trifft, mit *A* durch die gerade Linie *BA*. Diese Linie ist die gesuchte Tangente.

Zum Beweise ziehe man *MB* und wende den Lehrsatz §. 68 an, nach welchem $\angle MBA = R$ ist.

Zweite Construction, Fig. 98. Man ziehe *MA*, construire aus *M* als Mittelpunkt mit *MA* als Halbmesser den Kreisbogen *AB*, errichte in *C* auf *MA* das Perpendikel *CB*, welches den Kreisbogen *AB* in *B* trifft, ziehe *MB*, und endlich aus dem Schnittpunkte *D* die gerade Linie *DA*. Diese Linie ist die gesuchte Tangente.

Fig. 98.



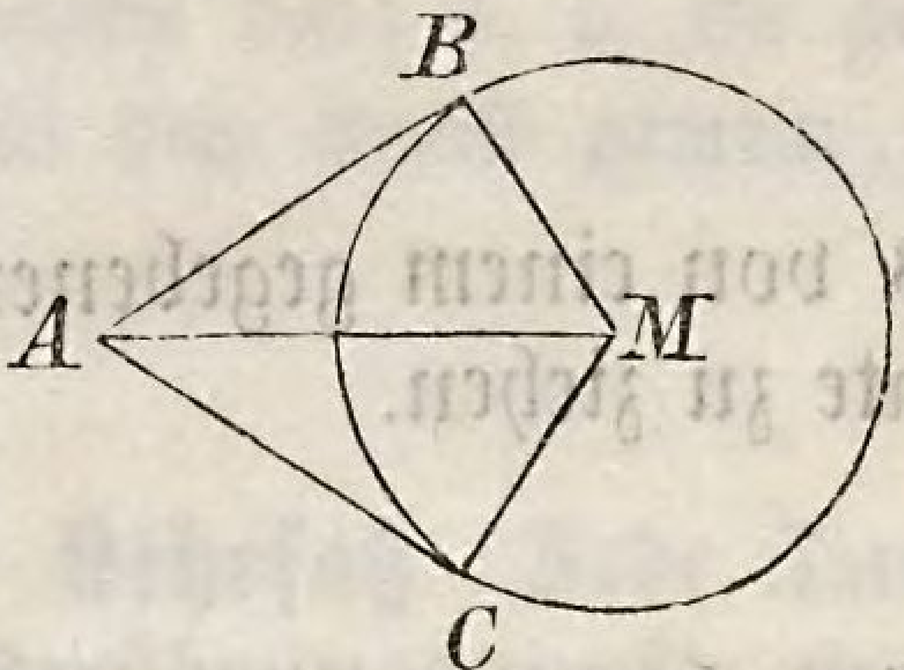
Zum Beweise hat man nach §. 60 $\triangle MDA \cong \triangle MCB$, woraus folgt $\angle MDA = R$.

Anmerkung. Durch jede dieser Constructionen sind aus demselben Punkte A zwei Tangenten an den gegebenen Kreis möglich.

§. 148.

Lehrsatz. Die beiden Tangenten, welche man von einem gegebenen Punkte außerhalb eines Kreises an diesen Kreis legen kann, sind gleich lang.

Fig. 99.



Voraussetzung:

AB und AC sind Tangenten.

Folgerung:

$AB = AC$.

Beweis. Man ziehe MB, MC und MA. Alsdann ist

$$MA = MA$$
$$MB = MC \text{ nach §. 27}$$
$$\angle MBA = \angle MCA = \mathfrak{R}, \text{ nach §. 145,}$$

folglich nach §. 76

$$\triangle MBA \cong \triangle MCA,$$

und daraus, nach §. 54, $AB = AC$ w. z. b. w.

§. 149.

Erklärung. Eine Sehne ist eine begränzte gerade Linie, welche zwei Punkte einer Kreis-Peripherie mit einander verbindet.

Man kann auch sagen, eine Sehne sei derjenige Theil einer Secante, welcher innerhalb des Kreises liegt.

§. 150.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche aus dem Mittelpunkte des Kreises nach der Mitte einer Sehne gezogen wird, steht rechtwinkelig auf dieser Sehne.

Verbindet man die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ist dieser Lehrsatz bewiesen im §. 69.

§. 151.

Lehrsatz. Ein Perpendikel, welches aus dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefällt wird, halbirt diese Sehne.

Ist gleichwie der vorige Lehrsatz bewiesen im §. 70.

§. 152.

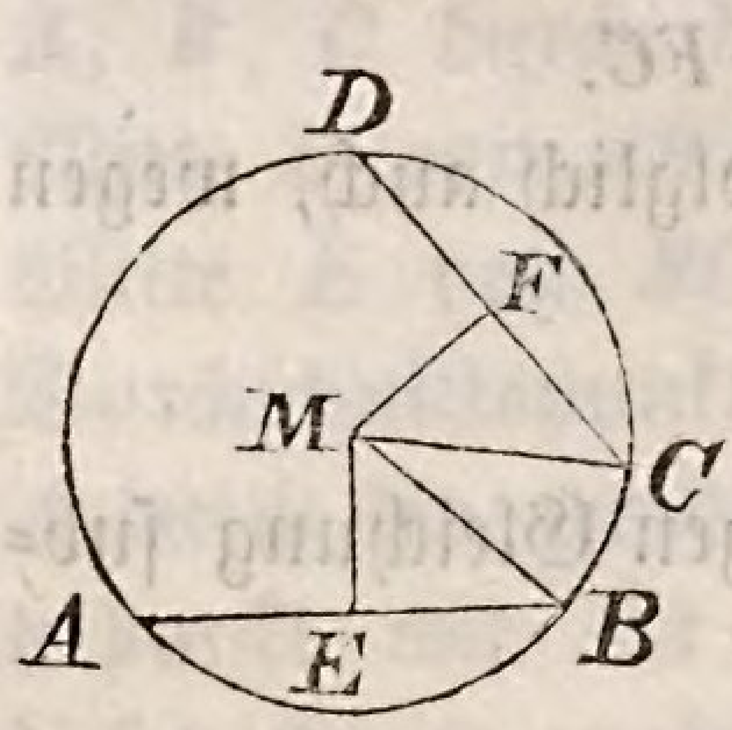
Lehrsatz. Ein Perpendikel, welches in der Mitte einer Sehne auf dieser Sehne errichtet wird, trifft den Mittelpunkt des Kreises.

Ist gleichwie der vorige Lehrsatz bewiesen im §. 73.

§. 153.

Lehrsatz. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Abstände vom Mittelpunkte.

Fig. 100.



Voraussetzung:
$AB = CD$
$ME \perp AB$, $MF \perp CD$.

Folgerung:
$ME = MF$.

Beweis. Man ziehe MB und MC. Alsdann ist
$MB = MC$ nach §. 27
$EB = FC$ nach §. 151
$\angle MEB = \angle MFC = R$ nach der Voraussetzung
folglich nach §. 76
$\triangle MEB \equiv \triangle MFC$,
mithin auch $ME = MF$, w. z. b. w.

§. 154.

Lehrsatz. Sehnen eines Kreises, welche gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, sind gleich groß.

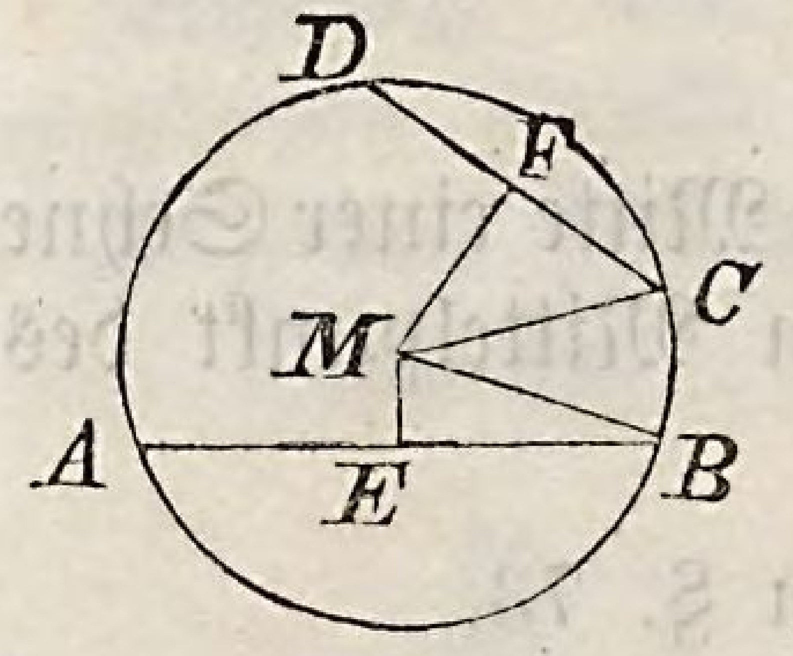
(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Der Beweis kann nach dem Vorbilde des vorigen Beweises geführt werden.

§. 155.

Lehrsatz. Wenn zwei Sehnen eines Kreises ungleich sind, so hat die größere von ihnen den kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Fig. 101.



Voraussetzung:

$AB > CD$,

$ME \perp AB$, $MF \perp CD$.

Folgerung:

$ME < MF$.

Beweis. Man ziehe MB und MC. Alsdann ist nach §. 127

$$\square MB = \square ME + \square EB$$

$$\square MC = \square MF + \square FC$$

und da man außerdem hat $MB = MC$, mithin auch $\square MB = \square MC$, so folgt aus beiden vorigen Gleichungen

$$\square ME + \square EB = \square MF + \square FC.$$

Nun ist nach der Voraussetzung $AB > CD$, folglich auch, wegen §. 151, $EB > FC$ und daraus

$$\square EB > \square FC;$$

und wenn man diese Ungleichung von der vorigen Gleichung subtrahirt, so kommt

$$\square ME < \square MF$$

d. i. $ME < MF$, w. z. b. w.

§. 156.

Lehrsatz. Wenn zwei Sehnen eines Kreises ungleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, so ist diejenige von ihnen die größere, welche den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Der Beweis kann nach dem Vorbilde des vorigen Beweises geführt werden.

§. 157.

Zusatz. Die größte von allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser.

§. 158.

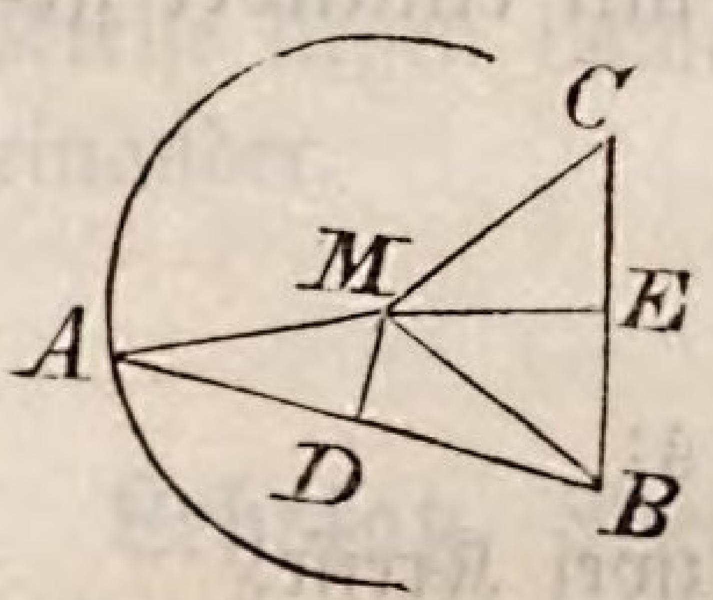
Lehrsatz. Eine gerade Linie kann mit einem Kreise nicht drei Punkte gemein haben.

Der Beweis ist in §. 74, 5) enthalten.

§. 159.

Aufgabe. Einen Kreis zu construiren, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Fig. 102.



Gegeben:

Punkte A, B, C.

Gesucht:

○ durch A, B, C.

Construction. Man verbinde die drei gegebenen Punkte A, B, C durch die beiden geraden Linien AB und BC. In der Mitte D von AB errichte man ein Perpendikel DM; ebenso in der Mitte E von BC errichte man ein Perpendikel EM; und den Durchschnittspunkt M dieser beiden Perpendikel verbinde man mit A durch die gerade Linie MA. Wenn man nun aus M als Mittelpunkt mit MA als Halbmesser einen Kreis construirt, so wird dieser Kreis zugleich durch die drei gegebenen Punkte A, B, C gehen.

Zum Beweise ziehe man noch MB und MC. Alsdann folgt aus §. 74, 2)

$$MA = MB = MC;$$

folglich liegen nach §. 29 die Punkte A, B, C in einer Kreis-Peripherie, deren Mittelpunkt M ist.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die drei gegebenen Punkte in Einer geraden Linie liegen.

Lage zweier Kreise.

§. 160.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise den Mittelpunkt und einen Punkt ihrer Peripherie mit einander gemein haben, so decken sie sich.

Der Beweis ergiebt sich aus §. 29.

§. 161.

Zusatz. Kreise von gleichen Halbmessern sind congruent.

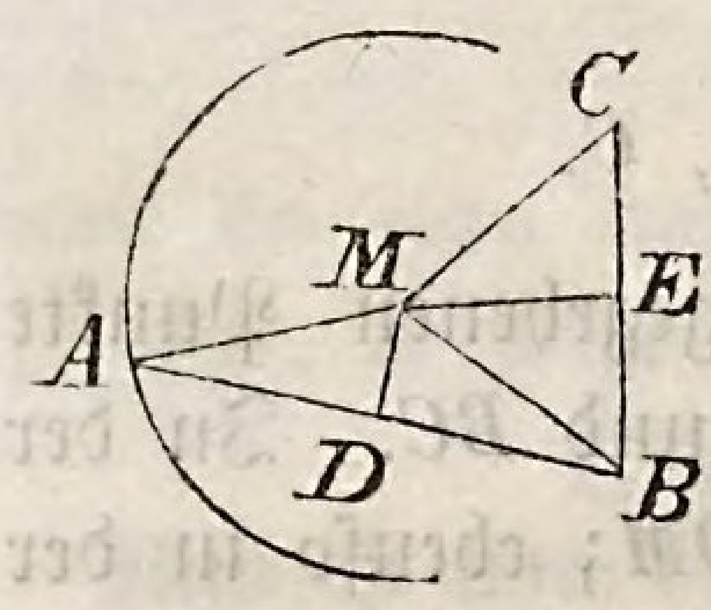
Denn man kann sie nach dem vorigen Lehrsatze so auf einander legen, daß sie sich decken.

Kreise von gleichen Halbmessern nennt man kürzer: gleiche Kreise.

§. 162.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise drei Punkte mit einander gemein haben, so decken sie sich.

Fig. 102.



Voraussetzung:

Durch A, B, C gehen zwei Kreise.

Folgerung:

Beide Kreise decken sich.

Beweis. Da die Punkte A, B, C beiden Kreisen zugleich angehören, so fallen auch die Sehnen AB und BC beider Kreise auf einander; folglich fallen auch die Perpendikel DM und EM auf auf einander, welche in beiden Kreisen auf den Mitten D und E dieser Sehnen errichtet sind; und mithin muß auch endlich der Punkt M als Mittelpunkt beiden Kreisen zugleich angehören. Nun haben die beiden Kreise den Mittelpunkt M und einen Punkt z. B. A der Peripherie mit einander gemein, folglich decken sie sich nach §. 160, w. z. b. w.

§. 163.

Erklärung. Zwei Kreise, welche einerlei Mittelpunkt und verschiedene Halbmesser haben, werden concentrische Kreise genannt.

§. 164.

Erklärung. Wenn zwei Kreise verschiedene Mittelpunkte haben, so versteht man unter ihrer Centrallinie die unbegränzte gerade Linie, welche durch ihre Mittelpunkte gelegt werden kann.

§. 165.

Erklärung. Von zwei Kreisen, welche nur Einen Punkt mit einander gemein haben, sagt man, sie berühren sich in diesem Punkte.

Von zwei Kreisen, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, sagt man, sie schneiden sich in diesen Punkten.

Die Berührung zweier Kreise ist eine äußere oder eine innere Berührung, je nachdem beide Kreise ganz außerhalb einander, oder der eine ganz innerhalb des andern, liegen. Zwei sich schneidende Kreise liegen immer zum Theil in einander und zum Theil außer einander.

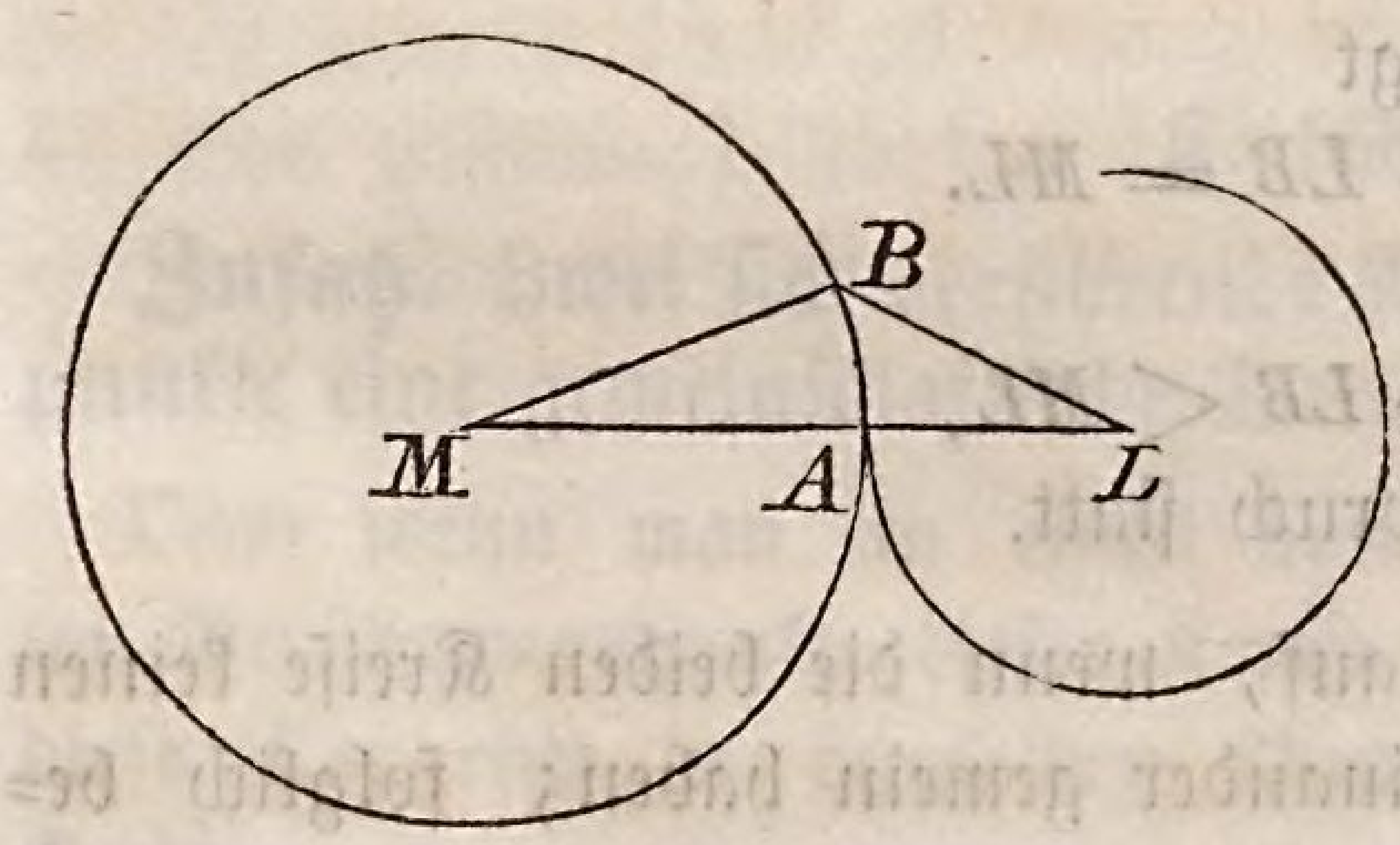
§. 166.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise einen Punkt ihrer Centrallinie mit einander gemein haben, so berühren sie sich in diesem Punkte.

Da die Berührung eine innere oder eine äußere sein kann, so sind hier zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall.

Fig. 103.



Voraussetzung:
M, A, L in gerader Linie.

Folgerung:
A ist Berührungspunkt.

Beweis. Gesetzt die beiden Kreise hätten, außer A, auch einen zweiten Punkt B mit einander gemein. Man ziehe die Halbmesser MB und LB. Alsdann ist nach §. 27

$$MB = MA$$
$$LB = LA$$

woraus durch Addition folgt

$$MB + LB = ML.$$

Aber nach §. 78 ist

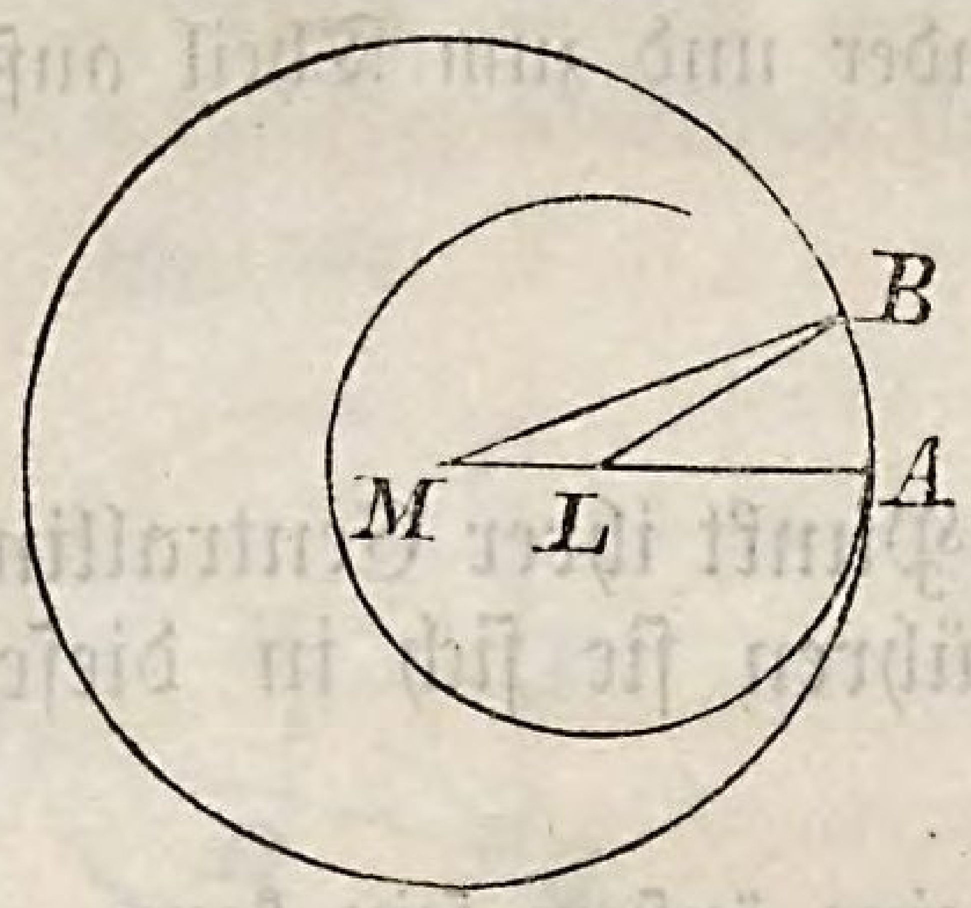
$$MB + LB > ML,$$

folglich findet hier ein Widerspruch statt.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn die beiden Kreise keinen zweiten Punkt außer A mit einander gemein haben; folglich berühren sie sich in A, w. z. b. w.

Zweiter Fall.

Fig. 104.



Voraussetzung:
M, L, A in gerader Linie.

Folgerung:
A ist Berührungspunkt.

Beweis. Gesetzt die beiden Kreise hätten wie vorhin, außer A, einen zweiten Punkt B mit einander gemein. Man ziehe die Halbmesser MB und LB. Alsdann ist nach §. 27

$$MB = MA$$
$$LB = LA$$

woraus durch Subtraction folgt

$$MB - LB = ML.$$

Aber nach §. 79 ist

$$MB - LB < ML,$$

folglich findet hier ein Widerspruch statt.

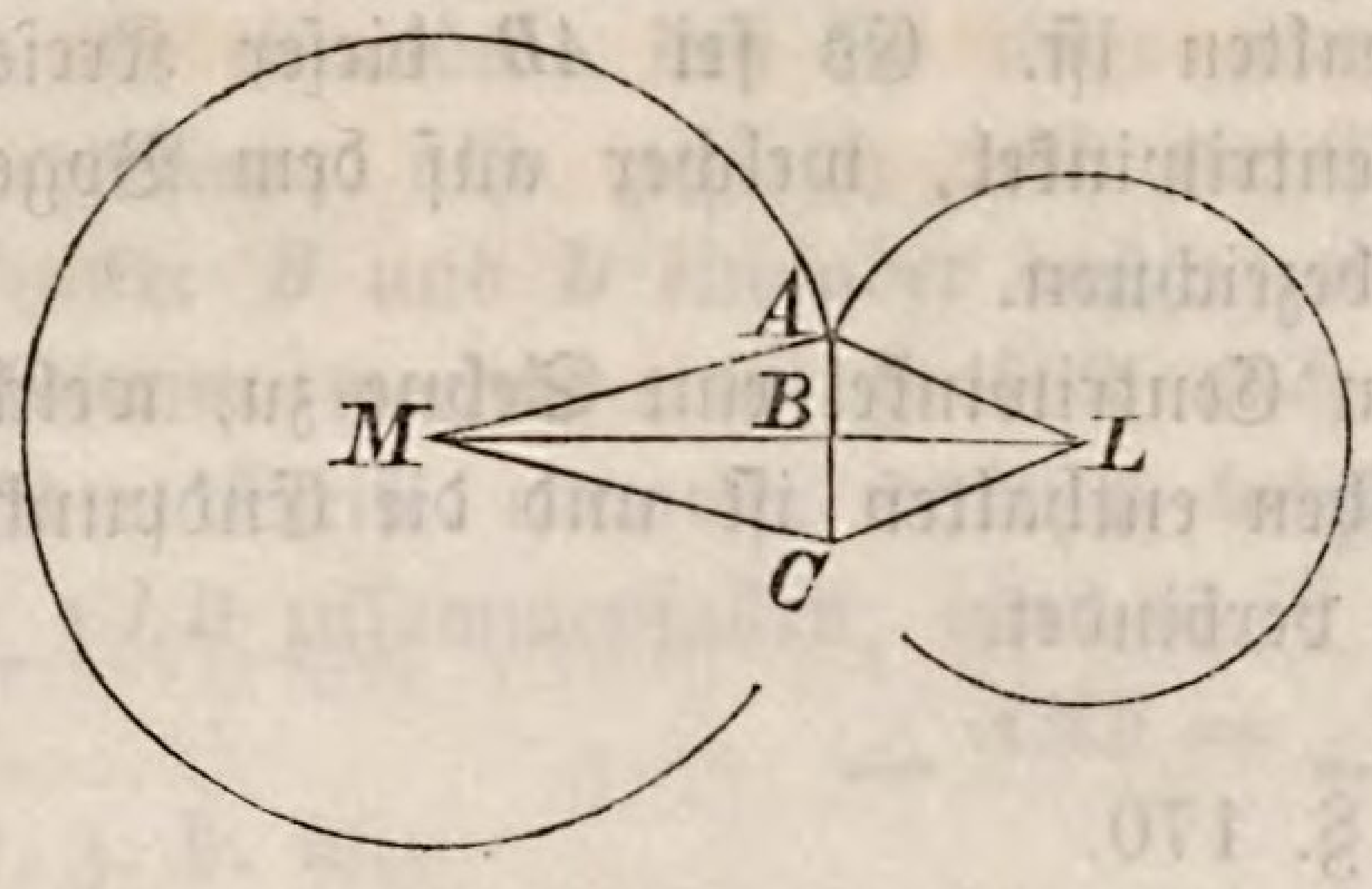
Der Widerspruch hört nur auf, wenn die beiden Kreise keinen zweiten Punkt außer A mit einander gemein haben; folglich berühren sie sich in A, w. z. b. w.

§. 167.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich berühren, so liegt der Berührungspunkt in ihrer Centrallinie.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 105.



Voraussetzung:
A ist Berührungspunkt.

Folgerung:
M, A, L in gerader Linie.

Beweis. Gesetzt der Berührungspunkt A liege nicht in der Centrallinie ML. Man fälle aus A ein Perpendikel AB auf ML, und verlängere dasselbe über B hinaus, so daß $BC = AB$ wird. Alsdann ist nach §. 74, 2)

$$MA = MC,$$
$$LA = LC,$$

folglich haben die beiden Kreise außer dem Berührungspunkte A noch einen zweiten Punkt C mit einander gemein, was der Voraussetzung widerspricht.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn der Berührungspunkt A in die Centrallinie ML fällt, w. z. b. w.

Der Beweis bleibt wörtlich derselbe, die beiden Kreise mögen sich von außen (wie in Fig. 105) oder von innen berühren.

§. 168.

Zusatz. Zwei sich berührende Kreise haben im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.

Oder wenn man an einen von zwei sich berührenden Kreisen im Berührungspunkte dieser Kreise eine Tangente legt, so berührt diese Tangente in demselben Punkte zugleich auch den anderen Kreis.

Winkel im Kreise.

§. 169.

Erklärung. Unter einem Centriwinkel versteht man einen Winkel, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkte eines Kreises liegt.

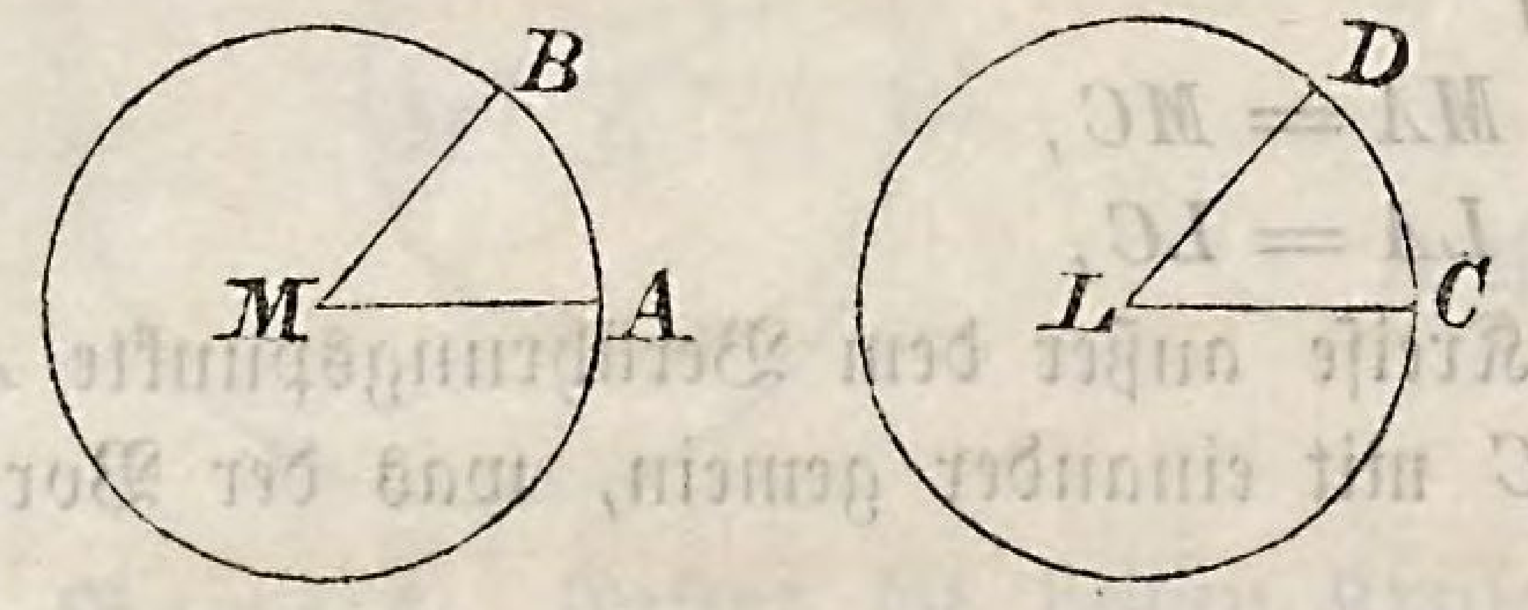
Jedem Centriwinkel gehört ein Kreisbogen zu, welcher zwischen den Schenkeln desselben enthalten ist. Es sei *AB* dieser Kreisbogen; so kann man den Centriwinkel, welcher auf dem Bogen *AB* steht, kurz durch C (*AB*) bezeichnen.

Ebenso gehört jedem hohlen Centriwinkel eine Sehne zu, welche zwischen den Schenkeln desselben enthalten ist und die Endpunkte des ihm zugehörigen Bogens verbindet.

§. 170.

Lehrsatz. Zu gleichen Centriwinkeln in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Bögen.

Fig. 106.



Voraussetzung:

$\angle AMB = \angle CLD.$

Folgerung:

Bogen $AB =$ Bogen $CD.$

Beweis. Man lege die beiden Winkel *AMB* und *CLD* so auf einander, daß *L* auf *M*, und *LC* auf *MA* fällt; alsdann wird wegen der Voraussetzung auch *LD* auf *MB* fallen. Ferner werden, wegen Gleichheit der Halbmesser, die Punkte *A* und *C*, so wie die Punkte *B* und *D* einander decken; und da überdies nach §. 160 die beiden Kreis-Peripherien einander decken, so müssen auch die Bögen *AB* und *CD* ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen, oder nach §. 30 hat man

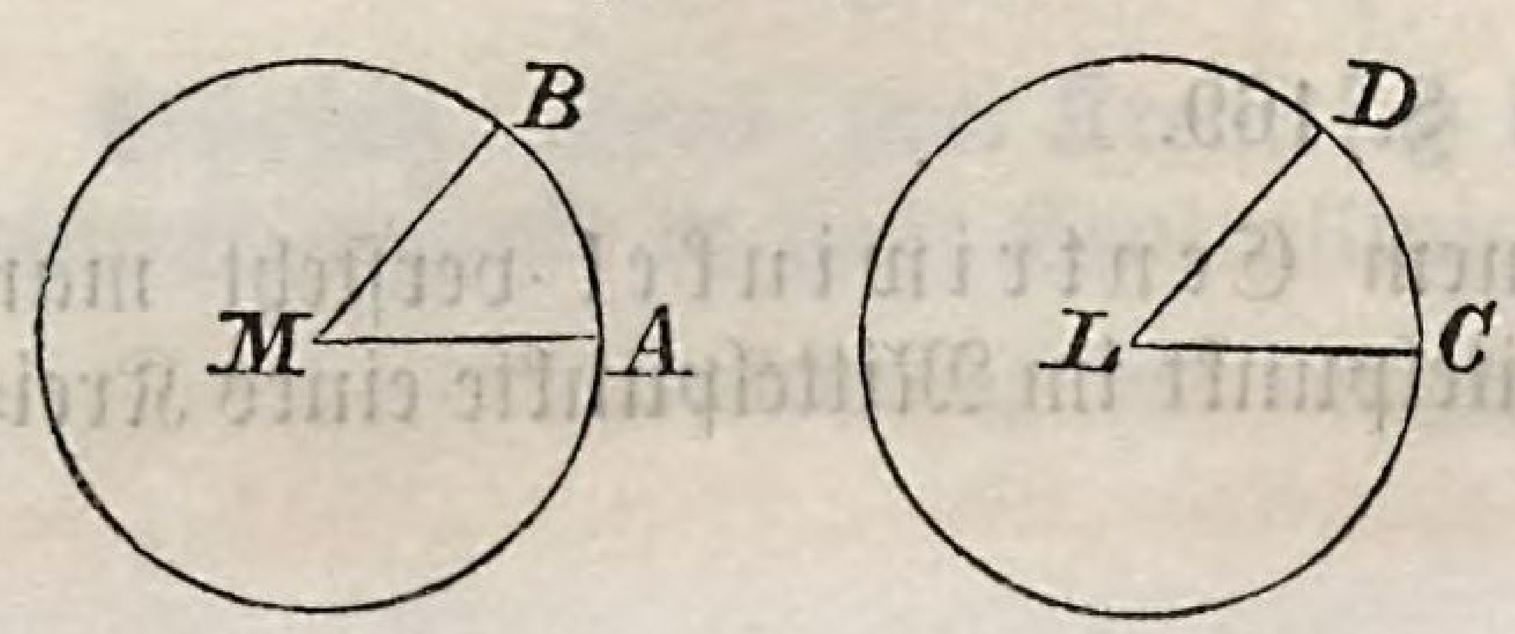
Bogen $AB =$ Bogen CD

w. z. b. w.

§. 171.

Lehrsatz. Zu gleichen Bögen in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Centriwinkel.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:

Bogen $AB =$ Bogen $CD.$

Folgerung:

$\angle AMB = \angle CLD.$

Beweis. Man lege die beiden gleichen Bögen AB und CD so auf einander, daß sie ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen, also zugleich auch die Punkte A und C, so wie die Punkte B und D einander decken; welches nach §. 30 möglich ist. Alsdann werden nach §. 162 auch die Mittelpunkte M und L beider Kreise einander decken; folglich wird auch $\angle AMB$ mit $\angle CLD$ zusammenfallen, oder es ist

$$\angle AMB = \angle CLD$$

w. z. b. w.

Anmerkung. In diesem Lehrsatze beruht der eigentliche Grund für die Messung der Winkel durch Kreisbögen, welche in der Erklärung §. 32 angezeigt worden ist. Denn aus diesem Lehrsatze erst kann man schließen, daß alle Winkel von 1^{0} unter sich gleich groß sind; ebenso alle Winkel von $1'$, und von $1''$; und hieraus kann man ferner schließen, daß man immer dieselbe Anzahl von Graden, Minuten und Secunden für einen gegebenen Winkel erhalten wird, wie groß man auch den Halbmesser desjenigen Kreisbogens annimmt, welcher aus dem Scheitelpunkte des Winkels, als Mittelpunkt, zwischen den Schenkeln desselben construirt wird.

§. 172.

Lehrsatz. Zu gleichen Centriwinkeln in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Sehnen; und umgekehrt zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel.

Dieser Lehrsatz ist nach §. 169 auf hohle Centriwinkel beschränkt.

Der Beweis ergiebt sich in jedem der beiden Fälle durch eine Congruenz zweier Dreiecke.

§. 173.

Zusatz. Zu gleichen Bögen in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Sehnen; und umgekehrt zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bögen.

Dieser Satz, welcher unmittelbar aus den drei vorigen Sätzen folgt, ist auf Bögen beschränkt, welche kleiner als ein Halbkreis sind.

§. 174.

Erklärung. Unter einem Peripheriewinkel versteht man einen Winkel, dessen Scheitelpunkt in die Peripherie eines

Kreises fällt und dessen Schenkel diesen Kreis entweder berühren oder schneiden.

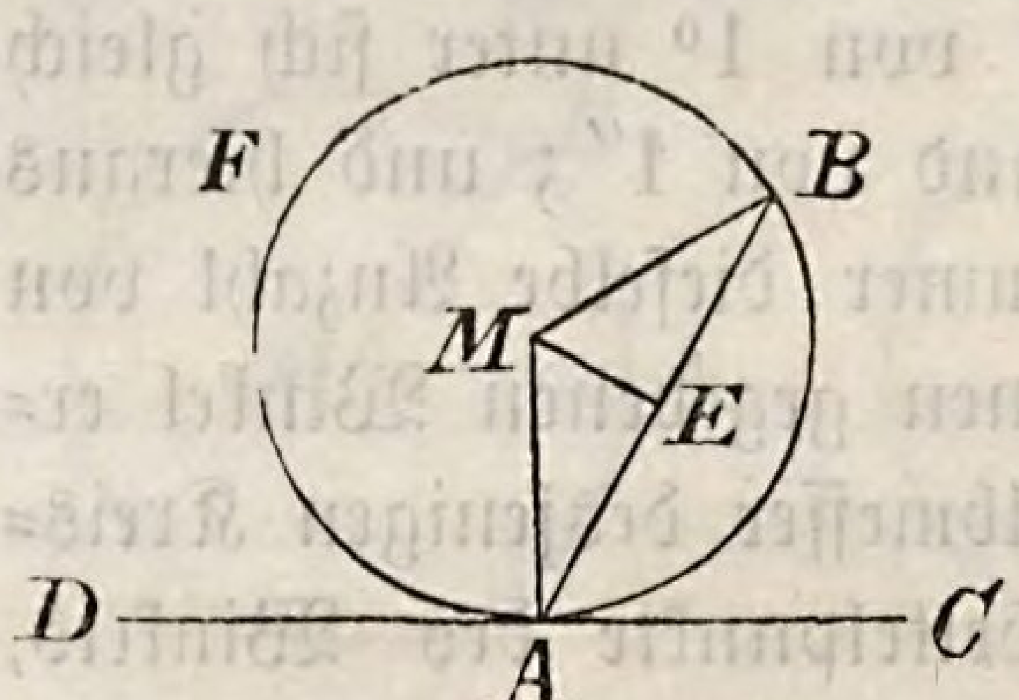
Jedem Peripheriewinkel gehört ein Kreisbogen zu, welcher zwischen den Schenkeln desselben enthalten ist.

§. 175.

Lehrsatz. Ein Peripheriewinkel ist der Hälfte des Centriwinkels gleich, welchem derselbe Bogen zugehört.

Erster Fall. Der Peripheriewinkel wird von einer Sehne und einer Tangente gebildet.

Fig. 107.



Voraussetzung:
AB ist Sehne
AC ist Tangente.

Folgerung:
$\angle BAC = \frac{1}{2}$ ℭ (AB).

Beweis. Es sei M der Mittelpunkt des Kreises. Man ziehe MA und MB; alsdann ist

$$\angle AMB = \mathfrak{C}\,(AB),$$

und wenn man aus M auf AB das Perpendikel ME fällt, so hat man vermöge des §. 70

$$\angle AME = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AB).$$

Nun ist vermöge des Lehrsatzes §. 45 in dem in E rechtwinkeligen Dreiecke AME

$$\angle AME + \angle MAE = \mathfrak{R};$$

ferner ist nach dem Lehrsatze §. 145

$$\angle BAC + \angle MAE = \mathfrak{R}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\angle BAC + \angle MAE = \angle AME + \angle MAE$$

und daraus nach Subtraction des $\angle MAE$

$$\angle BAC = \angle AME$$

d. i. $\angle BAC = \frac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AB)$

w. z. b. w.

In diesem Beweise ist vorausgesetzt worden, daß der gegebene Peripheriewinkel BAC ein spitzer Winkel sei. Sollte dieser Winkel

aber ein stumpfer Winkel sein, z. B. $\angle BAD$, so hat man sofort ebenso

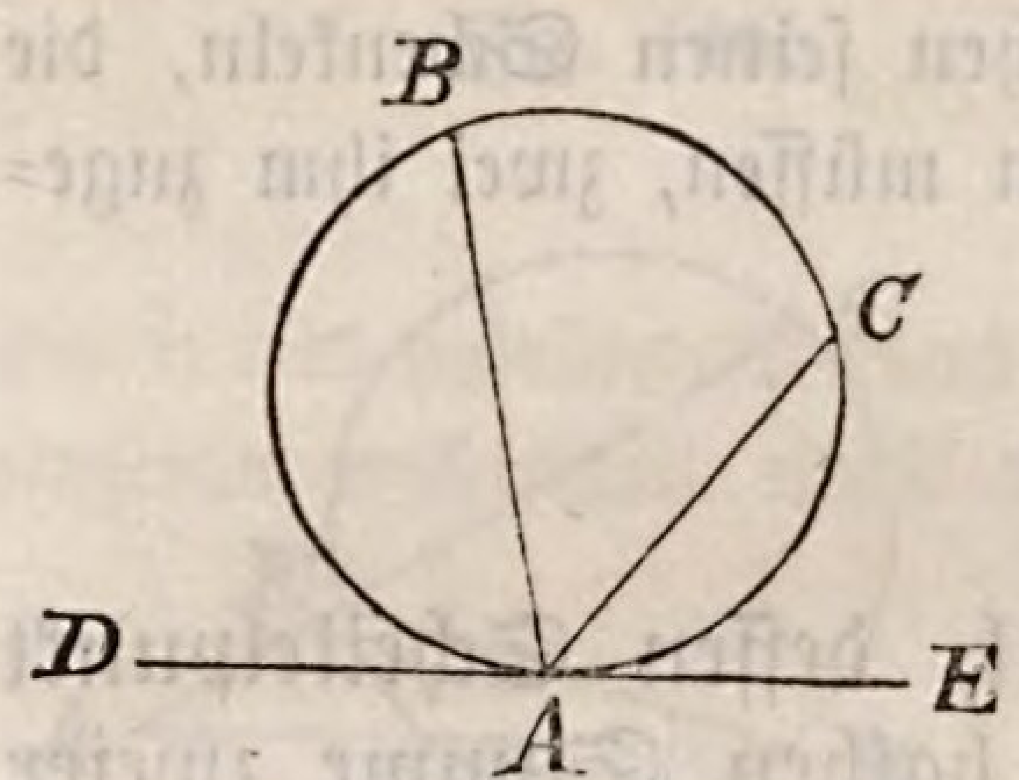
$$\angle BAD = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AFB).$$

Denn diese Gleichung liefert, zu der vorigen Endgleichung addirt, die identische Gleichung

$$2\,\mathfrak{R} = 2\,\mathfrak{R}.$$

Zweiter Fall. Der Peripheriewinkel wird von zwei Sehnen gebildet.

Fig. 108.



Voraussetzung:
AB, AC sind Sehnen.

Folgerung:
$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC)$.

Beweis. Man lege im Scheitelpunkte A des Peripheriewinkels an den Kreis die Tangente DE. Alsdann ist nach dem vorhergehenden ersten Falle

$$\angle BAD = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AB)$$
$$\angle CAE = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AC)$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt und ihre Summe von der identischen Gleichung

$$2\,\mathfrak{R} = 2\,\mathfrak{R}$$

subtrahirt, so bleibt

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC)$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Von dem hier bewiesenen Lehrsatze ist der Lehrsatz des Thales §. 68 nur ein besonderer Fall. Denn der Winkel im Halbkreise ist gleichfalls ein Peripheriewinkel; der ihm zugehörige Bogen ist ein Halbkreis.

§. 176.

Zusatz. Zu gleichen Peripheriewinkeln in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Bögen; und umgekehrt zu gleichen Bögen gehören gleiche Peripheriewinkel.

§. 177.

Erklärung. Unter einem excentrischen Winkel versteht man einen Winkel, dessen Schenkel einen Kreis treffen und dessen Scheitelpunkt weder in den Mittelpunkt, noch in die Peripherie dieses Kreises fällt.

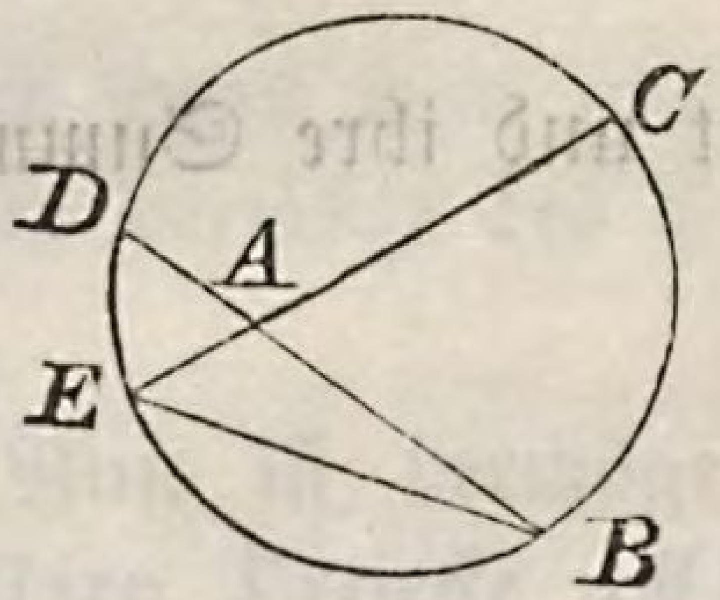
Der Scheitelpunkt des excentrischen Winkels kann entweder innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen. Im ersten Falle können die Schenkel des Winkels den Kreis nur schneiden; im zweiten Falle können sie den Kreis entweder schneiden oder berühren.

Jeder excentrische Winkel enthält zwischen seinen Schenkeln, die nöthigenfalls rückwärts verlängert werden müssen, zwei ihm zugehörige Kreisbögen.

§. 178.

Lehrsatz. Der excentrische Winkel, dessen Scheitelpunkt innerhalb des Kreises liegt, ist der halben Summe zweier Centriwinkel gleich, welche den beiden zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltenen Bögen zugehören.

Fig. 109.



Voraussetzung:
A liegt innerhalb des ○.

Folgerung:

$$\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) + \mathfrak{C}\,(DE)}{2}.$$

Beweis. Man ziehe BE. Alsdann ist nach §. 47

$$\angle BAC = \angle BEC + \angle DBE$$

Ferner hat man aus §. 175

$$\angle BEC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC)$$
$$\angle DBE = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

und wenn man diese beiden Werthe in die vorige Gleichung substituirt, so kommt

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC) + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

d. i. $\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) + \mathfrak{C}\,(DE)}{2}$

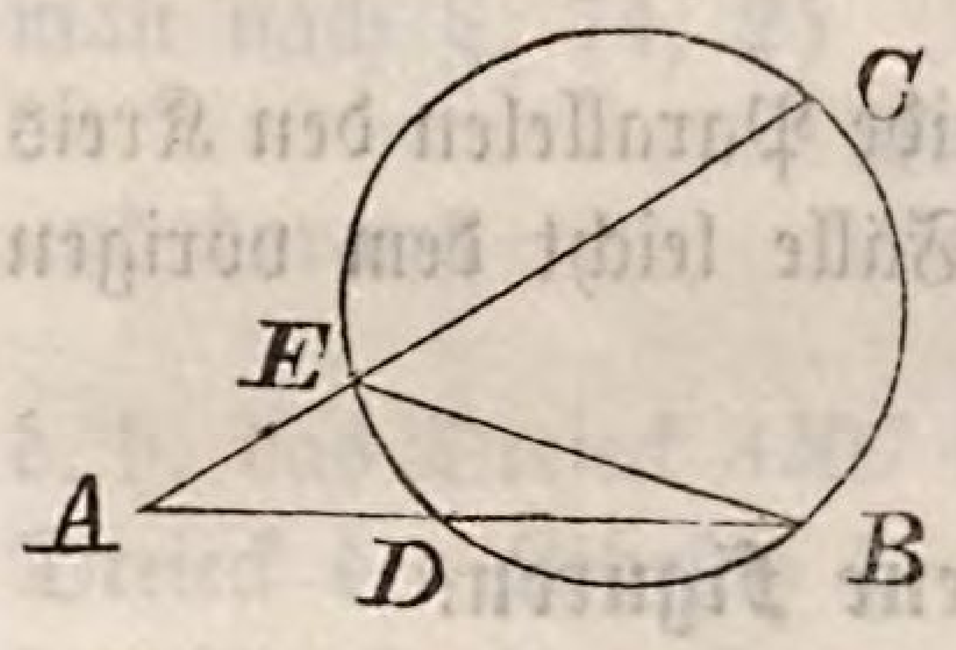
w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz findet eine wichtige Anwendung bei der Messung mit Winkel-Instrumenten, worüber die Lehrbücher der praktischen Geometrie nähere Auskunft geben.

§. 179.

Lehrsatz. Der excentrische Winkel, dessen Scheitelpunkt außerhalb des Kreises liegt, ist der halben Differenz zweier Centriwinkel gleich, welche den beiden zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltenen Bögen zugehören.

Fig. 110.



Voraussetzung:
A liegt außerhalb des ○.
Folgerung:

$$\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) - \mathfrak{C}\,(DE)}{2}.$$

Beweis. Man ziehe BE. Alsdann ist nach §. 47

$$\angle BAC + \angle DBE = \angle BEC$$

und daraus

$$\angle BAC = \angle BEC - \angle DBE.$$

Ferner hat man aus §. 175

$$\angle BEC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC)$$
$$\angle DBE = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

und wenn man diese beiden Werthe in die vorige Gleichung substituirt, so kommt

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC) - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

d. i. $$\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) - \mathfrak{C}\,(DE)}{2}$$

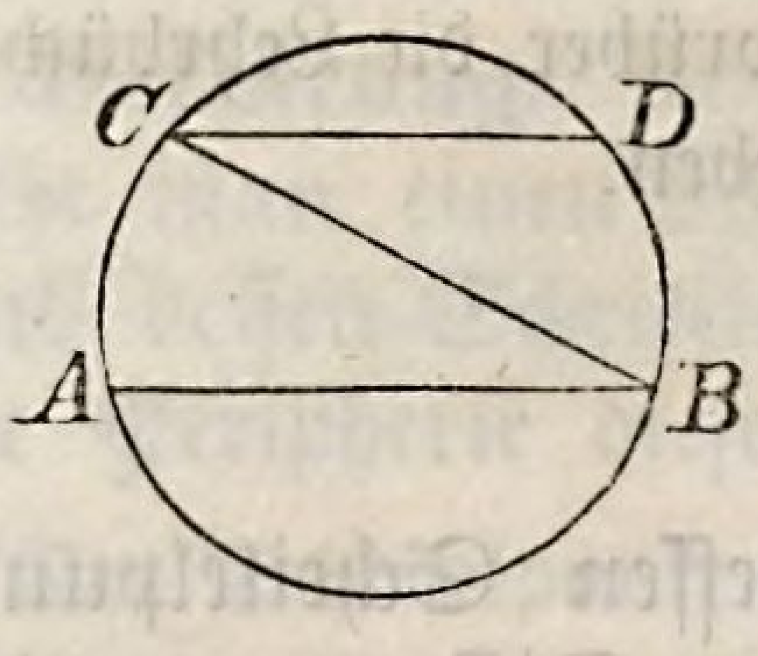
w. z. b. w.

Wenn ein Schenkel, oder beide Schenkel des gegebenen Winkels den Kreis berühren, so kann der Beweis für diese Fälle leicht dem vorigen nachgebildet werden.

§. 180.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen einen Kreis treffen, so sind die zwischen ihnen enthaltenen Bögen gleich groß.

Fig. 111.



Voraussetzung:

$AB \parallel CD.$

Folgerung:

Bogen $AC =$ Bogen $BD.$

Beweis. Man ziehe BC. Alsdann ist nach §. 40

$$\angle ABC = \angle BCD$$

und daraus folgt nach §. 176

$$\text{Bogen } AC = \text{Bogen } BD$$

w. z. b. w.

Wenn eine der beiden Parallelen, oder beide Parallelen den Kreis berühren, so kann der Beweis für diese Fälle leicht dem vorigen nachgebildet werden.

Eingeschriebene und umschriebene Figuren.

§. 181.

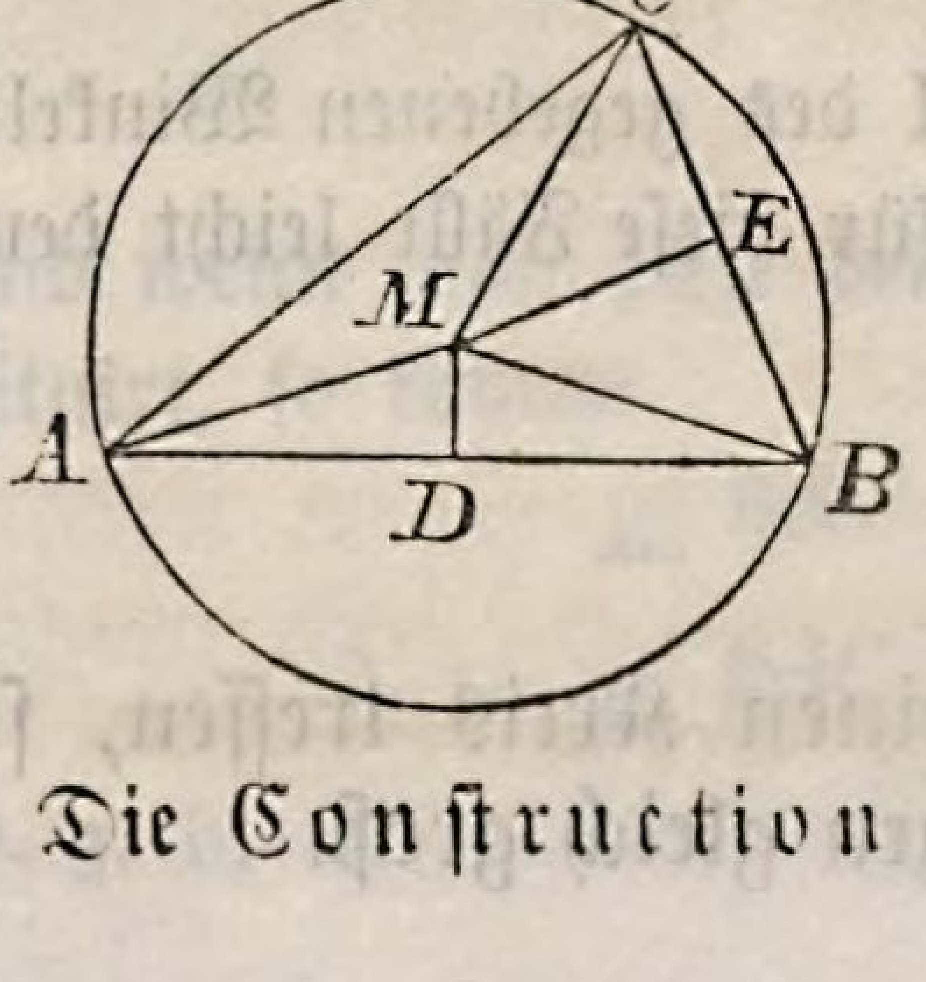
Erklärung. Eine eingeschriebene Figur ist eine Figur, deren Seiten Sehnen eines Kreises sind. Dieser Kreis wird der der Figur umschriebene Kreis genannt.

Eine umschriebene Figur ist eine Figur, deren Seiten Tangenten eines Kreises sind. Dieser Kreis wird der der Figur eingeschriebene Kreis genannt.

§. 182.

Aufgabe. Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis zu umschreiben.

Fig. 112.



Gegeben:

$\triangle ABC.$

Gesucht:

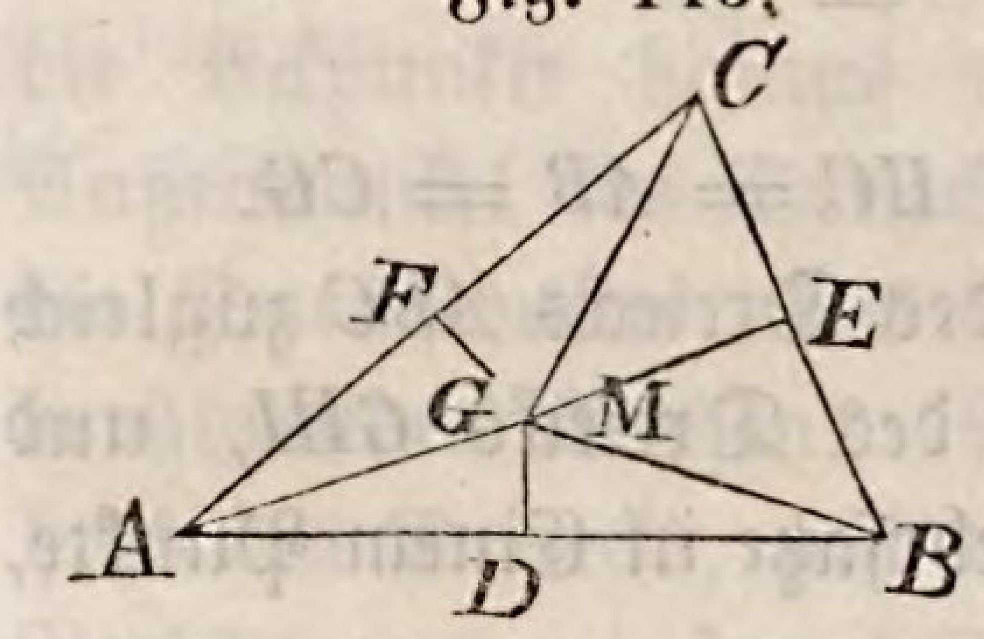
Umschriebener ○.

Die Construction ist dieselbe wie im §. 159.

§. 183.

Lehrsatz. Die Perpendikel auf den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 113.



Voraussetzung:

$AD = DB$, $DM \perp AB$
$BE = EC$, $EM \perp BC$
$AF = FC$, $FG \perp AC$.

Folgerung:

DM, EM, FG treffen Einen Punkt.

Beweis. Man verbinde M mit den drei Eckpunkten A, B, C des Dreiecks durch die geraden Linien MA, MB, MC. Alsdann hat man nach §. 74, 2)

$$MA = MB, \quad MB = MC,$$

und daraus

$$MA = MC$$

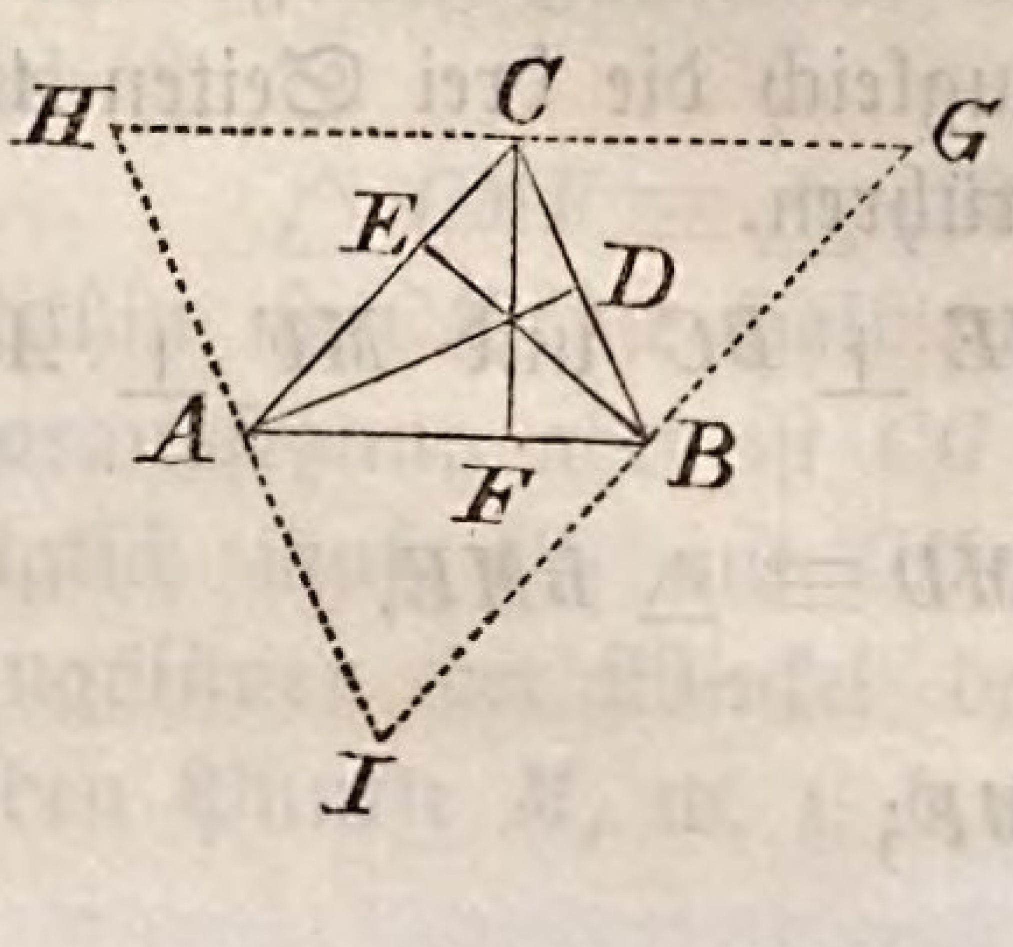
d. h. das Dreieck AMC ist gleichschenkelig. Wendet man auf dieses Dreieck den Lehrsatz §. 73 an, so folgt, daß das Perpendikel FG den Punkt M treffen muß; folglich durchschneiden sich die drei in D, E, F auf den Seiten des Dreiecks errichteten Perpendikel in demselben Punkte M, w. z. b. w.

Anmerkung. Der Durchschnittspunkt M, d. i. nach der vorigen Aufgabe der Mittelpunkt des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, liegt für ein spitzwinkeliges Dreieck innerhalb des Dreiecks; für ein rechtwinkeliges Dreieck in der Mitte der Hypotenuse; und für ein stumpfwinkeliges Dreieck außerhalb des Dreiecks.

§. 184.

Lehrsatz. Die Perpendikel aus den drei Eckpunkten eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 114.



Voraussetzung:

$AD \perp BC$
$BE \perp AC$
$CF \perp AB$.

Folgerung:

AD, BE, CF treffen Einen Punkt.

Beweis. Man ziehe durch die drei Eckpunkte des Dreiecks Parallelen mit den gegenüberliegenden Seiten, insbesondere $HG \parallel AB$, $IH \parallel BC$, $IG \parallel AC$. Alsdann ist nach §. 40

$$AD \perp HI, \quad BE \perp IG, \quad CF \perp HG,$$

und nach §. 97

$$HA = CB = AI, \quad IB = AC = BG, \quad HC = AB = CG.$$

Folglich sind die drei Linien AD, BE, CF des Dreiecks ABC zugleich Perpendikel auf den Mitten der Seiten des Dreiecks GHI, und durchschneiden sich also nach dem vorigen Lehrsatze in Einem Punkte, w. z. b. w.

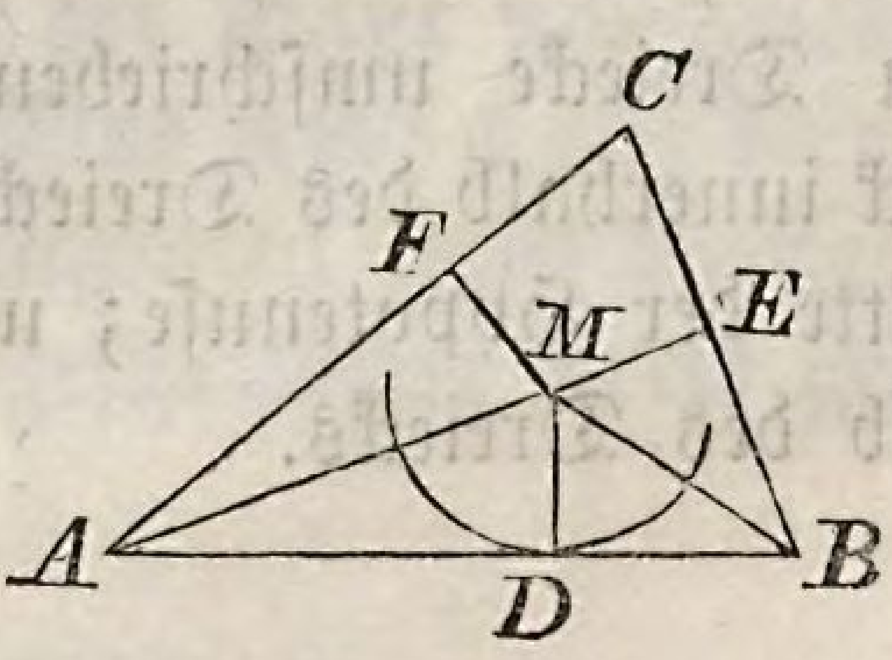
Diesen Beweis hat Gauß gegeben.

Anmerkung. Der Durchschnittspunkt der drei Perpendikel dieses Lehrsatzes fällt für ein spitzwinkeliges Dreieck innerhalb des Dreiecks; für ein rechtwinkeliges Dreieck in den Scheitelpunkt des rechten Winkels; und für ein stumpfwinkeliges Dreieck außerhalb des Dreiecks.

§. 185.

Aufgabe. Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis einzuschreiben.

Fig. 115.



Gegeben: $\triangle ABC$.

Gesucht: Eingeschriebener ○.

Construction. Man halbire die beiden Winkel CAB und CBA durch die Linien AM und BM, und aus dem Durchschnittspunkte M dieser Linien fälle man auf AB das Perpendikel MD. Wenn man sodann aus M als Mittelpunkt mit MD als Halbmesser einen Kreis construirt, so wird dieser Kreis zugleich die drei Seiten AB, BC und AC des gegebenen Dreiecks berühren.

Zum Beweise ziehe man noch $ME \perp BC$ und $MF \perp AC$. Alsdann folgt nach §. 58

$$\triangle AMD \equiv \triangle AMF, \quad \triangle BMD \equiv \triangle BME,$$

und daraus

$$MD = ME = MF;$$

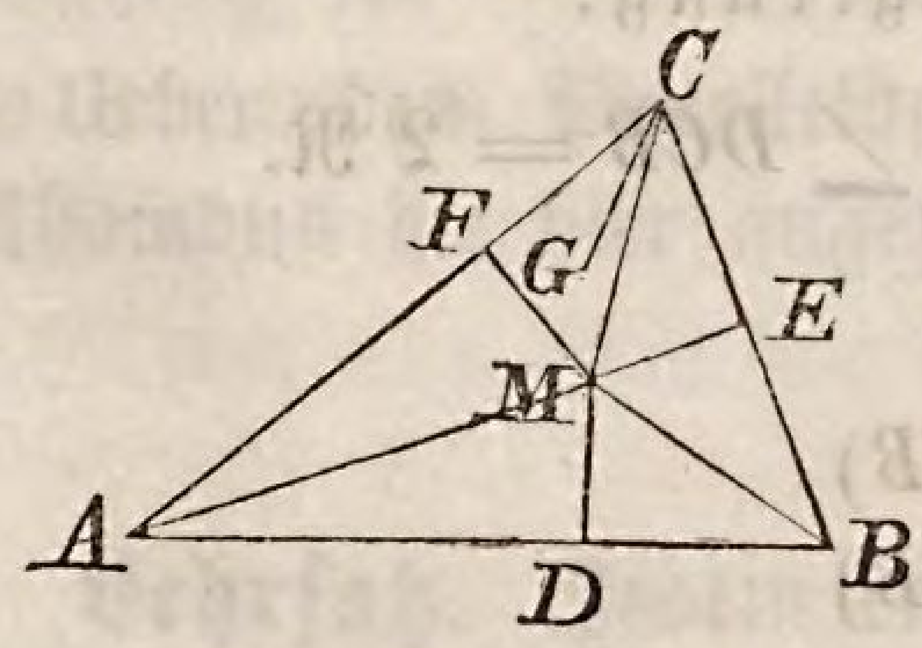
folglich liegen nach §. 29 die Punkte D, E, F in einer Kreis-Peripherie, deren Mittelpunkt M ist, und in diesen Punkten wird nach §. 143 derselbe Kreis von den drei Seiten des Dreiecks berührt.

Anmerkung. Wenn man die drei Seiten des Dreiecks über die Eckpunkte hinaus verlängert und die dadurch entstehenden Außenwinkel des Dreiecks im A und B gleichfalls halbirt, so geben die Durchschnitte aller Halbirungslinien die Mittelpunkte von vier berührenden Kreisen. Von diesen vier Kreisen liegen drei außerhalb des Dreiecks, und berühren je eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten. Die Zeichnung fordert Sorgfalt, wenn die Berührungen genau zutreffen sollen.

§. 186.

Lehrsatz. Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 116.



Voraussetzung:

$$\angle CAM = \angle MAB$$
$$\angle CBM = \angle MBA$$
$$\angle ACG = \angle GCB.$$

Folgerung:

AM, BM, CG treffen Einen Punkt.

Beweis. Man ziehe aus M auf die drei Seiten des Dreiecks die Perpendikel MD, ME, MF. Alsdann hat man nach §. 58

$$\triangle AMD \equiv \triangle AMF, \quad \text{woraus } MD = MF;$$
$$\triangle BMD \equiv \triangle BME, \quad \text{woraus } MD = ME;$$

folglich auch

$$MF = ME.$$

Wenn man nun ferner die Verbindungslinie MC zieht, so folgt nach §. 76

$$\triangle CMF \equiv \triangle CME, \quad \text{woraus } \angle FCM = ECM.$$

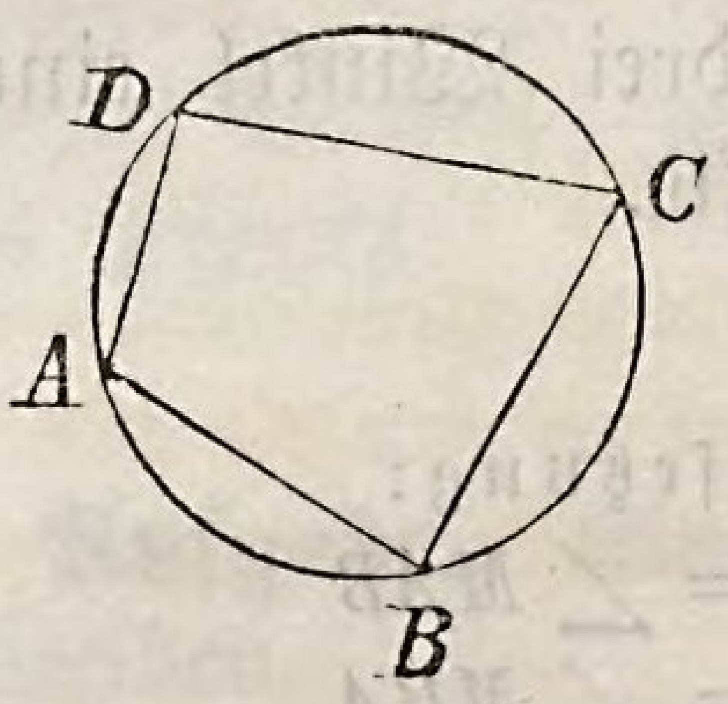
Mithin ist CM die Halbirungslinie des Winkels ACB. Nach der Voraussetzung aber ist CG die Halbirungslinie desselben Winkels; folglich muß CG mit CM zusammenfallen, d. h. die drei Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks durchschneiden sich in demselben Punkte M, w. z. b. w.

Anmerkung. Der Lehrsatz bleibt auch dann noch wahr, wenn die drei Winkel, welche halbirt werden, ein Dreiecks-Winkel und die den beiden anderen Dreiecks-Winkeln anliegenden Außenwinkel des Dreiecks sind. In diesem Falle liegt der Durchschnittspunkt der drei Halbirungslinien außerhalb des Dreiecks, in dem obigen Falle dagegen stets innerhalb des Dreiecks. S. d. Anmerkung des vorigen §.

§. 187.

Lehrsatz. In einem eingeschriebenen Vierecke ist die Summe der einander gegenüberliegenden Winkel gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 117.



Voraussetzung:
ABCD ist ein eingeschriebenes Viereck.

Folgerung:

$$\angle DAB + \angle DCB = 2\ \mathfrak{R}.$$

Beweis. Nach §. 175 ist

$$\angle DAB = \tfrac{1}{2}\ \mathfrak{C}\ (DCB)$$
$$\angle DCB = \tfrac{1}{2}\ \mathfrak{C}\ (DAB)$$

folglich

$$\angle DAB + \angle DCB = \tfrac{1}{2}\ \mathfrak{C}\ (DCB) + \tfrac{1}{2}\ \mathfrak{C}\ (DAB).$$

Nun ist die Summe $\mathfrak{C}\ (DCB) + \mathfrak{C}\ (DAB)$ gleich einem Centriwinkel, welchem die ganze Kreis-Peripherie zugehört, oder gleich 4 $\mathfrak{R}$; also

$$\angle DAB + \angle DCB = 2\ \mathfrak{R}$$

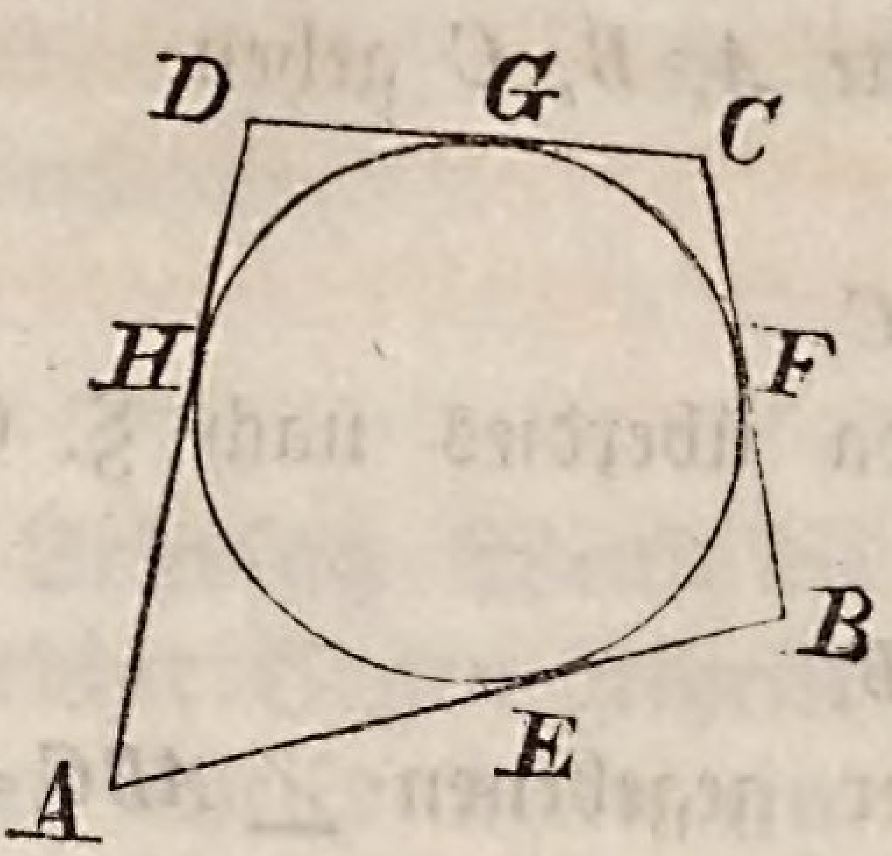
w. z. b. w.

Unter den Parallelogrammen haben das Quadrat und das Rechteck, und unter den Trapezen hat das gleichschenkelige Trapez die hier aufgeführte Eigenschaft.

§. 188.

Lehrsatz. In einem umschriebenen Vierecke sind die Summen der einander gegenüberliegenden Seiten gleich groß.

Fig. 118.



Voraussetzung:
ABCD ist ein umschriebenes Viereck.

Folgerung:
$$AD + BC = AB + DC.$$

Beweis. Es seien *E, F, G, H* die Berührungspunkte der vier Seiten des Vierecks mit dem Kreise. Nach §. 148 hat man

$$AH = AE$$
$$DH = DG$$
$$BF = BE$$
$$CF = CG$$

und aus der Addition dieser Gleichungen folgt

$$AD + BC = AB + DC$$

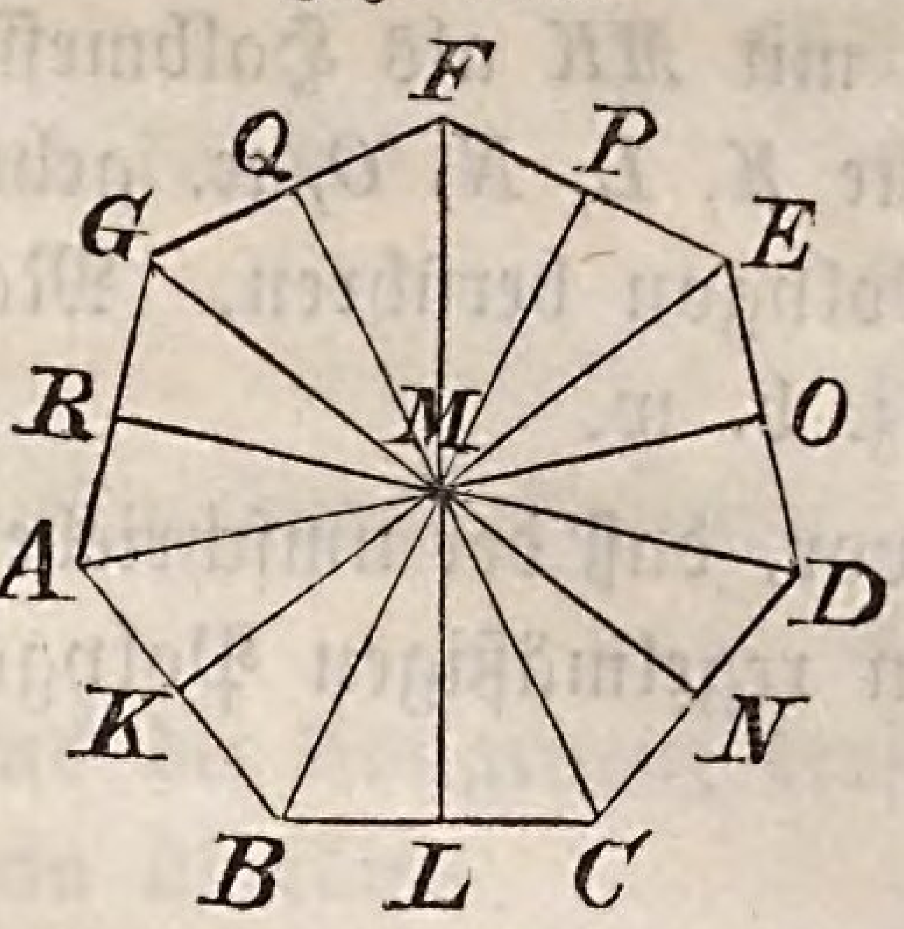
w. z. b. w.

Ueber den Parallelogrammen haben das Quadrat und der Rhombus die hier angezeigte Eigenschaft.

§. 189.

Lehrsatz. Jedem regelmäßigen Polygon läßt sich ein Kreis umschreiben und einschreiben.

Fig. 119.



Voraussetzung:
$$AB = BC = CD = DE \text{ ꝛc.}$$
$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE \text{ ꝛc.}$$

Folgerung:
1) Umschriebener ○.
2) Eingeschriebener ○.

Beweis. 1) Man halbire die beiden Seiten *AB* und *BC* des Polygon in *K* und *L*, und errichte in diesen Punkten auf *AB* und *BC* die Perpendikel *KM* und *LM*, welche sich in *M* durchschneiden. Zieht man nun *MA, MB, MC*, so ist nach §. 74, 2)

$$MA = MB = MC,$$

folglich wird ein aus M als Mittelpunkt mit MA als Halbmesser construirter Kreis zugleich durch die Punkte A, B, C gehen.

Ferner ziehe man MD. Nach §. 83 ist

$$\triangle MBA \equiv \triangle MBC,$$

und daraus $\angle MBA = \angle MBC$; und da überdies nach §. 61 $\angle MBC = \angle MCB$ ist, so folgt

$$\angle MBA = \angle MCB.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der gegebenen $\angle ABC = \angle BCD$, so bleibt

$$\angle MBC = \angle MCD$$

und daraus hat man nach §. 60

$$\triangle MBC \equiv \triangle MCD$$

folglich

$$MC = MD,$$

d. h. der aus M als Mittelpunkt mit MA als Halbmesser construirte Kreis wird auch durch den Punkt D gehen.

So kann man fortfahren zu beweisen, indem man ME ꝛc. zieht, daß derselbe Kreis durch alle folgenden Eckpunkte E ꝛc. des Polygon gehen wird. Man hat also einen umschriebenen Kreis, w. z. b. w.

1) Man fälle noch aus dem Punkte M auf die Seiten CD, DE, ꝛc. die Perpendikel MN, MO, ꝛc. Alsdann hat man aus dem Vorigen nach §. 58

$$\triangle MBK \equiv \triangle MBL, \quad \triangle MCL \equiv \triangle MCN, \quad \triangle MDN \equiv \triangle MDO, \text{ꝛc.}$$

und hieraus

$$MK = ML = MN = MO \text{ ꝛc.}$$

Folglich wird ein aus M als Mittelpunkt mit MK als Halbmesser construirter Kreis zugleich durch die Punkte K, L, N, O, ꝛc. gehen und in diesen Punkten die Seiten des Polygon berühren. Man hat also einen eingeschriebenen Kreis, w. z. b. w.

Aus diesem Beweise geht außerdem hervor, daß der umschriebene und der eingeschriebene Kreis eines jeden regelmäßigen Polygon concentrische Kreise sind.

§. 190.

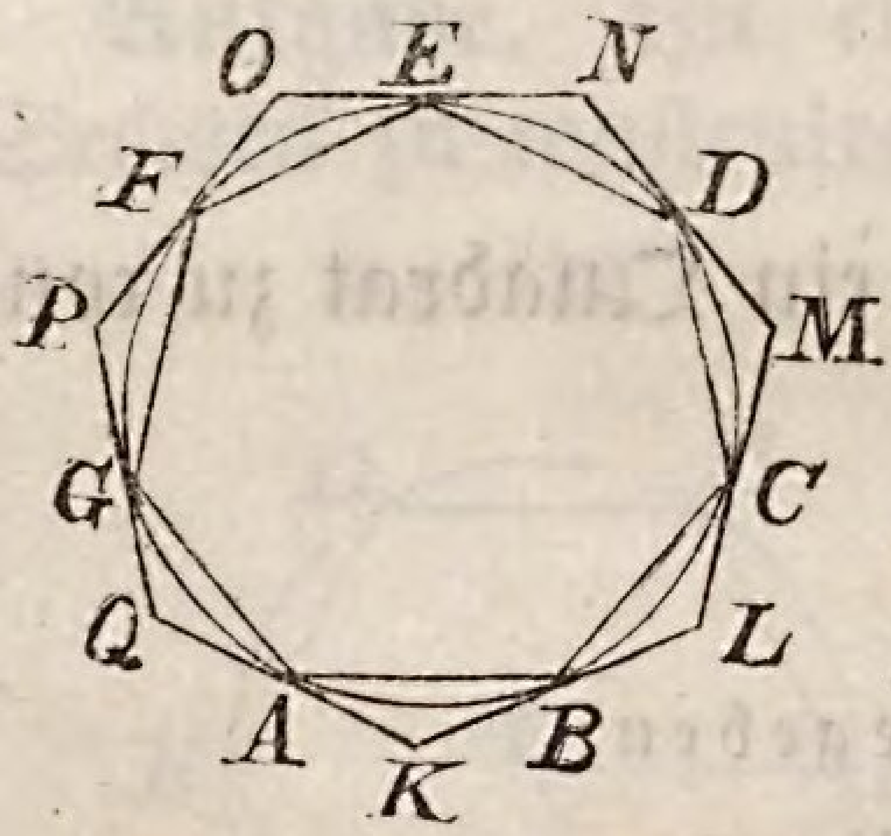
Erklärung. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Polygon wird der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygon genannt.

Wie man den Mittelpunkt eines gegebenen regelmäßigen Polygon finden könne, ergiebt sich aus der im vorigen Beweise geführten Construction.

§. 191.

Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises in eine Anzahl gleicher Bögen getheilt worden ist, so geben die Sehnen zwischen den Theilpunkten ein eingeschriebenes regelmäßiges Polygon, und die Tangenten in den Theilpunkten, bis zu ihren Durchschnitten verlängert, ein umschriebenes regelmäßiges Polygon.

Fig. 120.



Voraussetzung:

Bogen AB = Bogen BC = Bogen CD 2c.

Folgerung:

1) $ABCD$ .... eingeschr. regelm. Polygon,

2) $KLMN$.... umschr. regelm. Polygon.

Beweis. 1) Man hat nach §. 173

$$AB = BC = CD \text{ 2c.}$$

und nach §. 176

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE \text{ 2c.}$$

Folglich ist $ABCD$ .... ein regelmäßiges Polygon, w. z. b. w.

2) Ferner hat man nach §. 56

$$\triangle AKB \equiv \triangle BLC \equiv \triangle CMD \text{ 2c.}$$

und daraus

$$KB = LC = MD \text{ 2c.}$$
$$BL = CM = DN \text{ 2c.}$$

mithin durch Addition

$$KL = LM = MN \text{ 2c.}$$

Aus der Congruenz derselben Dreiecke (oder auch aus §. 179) hat man überdies

$$\angle AKB = \angle BLC = \angle CMD \text{ 2c.}$$

Folglich ist $KLMN$ .... ein regelmäßiges Polygon, w. z. b. w.

Anmerkung. Aus diesem Lehrsatze geht hervor, daß die Aufgabe, einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Polygon einzuschreiben oder zu umschreiben, zusammenfällt mit der andern Auf-

gabe, die Kreis-Peripherie in eine gewisse Anzahl gleiche Theile zu theilen. Diese Aufgabe ist aber einer allgemeinen Auflösung nicht fähig. Gauß hat im Jahre 1796 (damals 19 Jahr alt) aus Sätzen der höheren Arithmetik zuerst nachgewiesen, auf welche Fälle die Elementar-Geometrie, welche nur mit gerader Linie und Kreis construirt, beschränkt sei; es sind dies nämlich diejenigen Theilungen der Kreis-Peripherie, deren Theilungszahl eine Primzahl von der Form

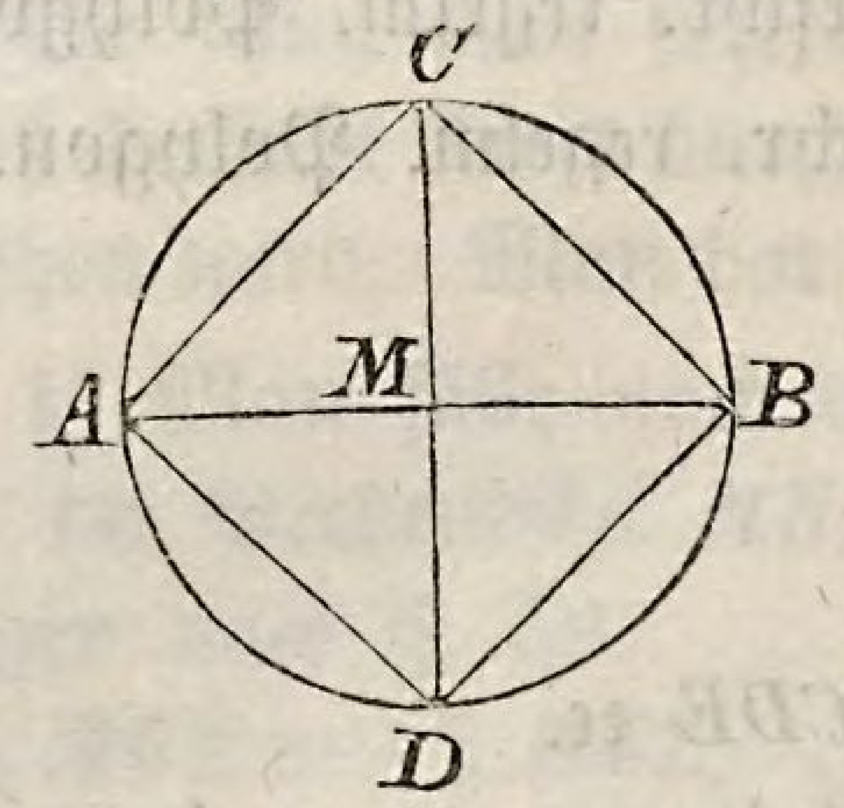
$$2^{2^n} + 1$$

ist, also die Theilungen in 3, 5, 17, 257, ... gleiche Theile; wozu noch diejenigen Theilungen gezählt werden müssen, welche durch bloße Halbirung von Kreisbögen ausgeführt werden können.

§. 192.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu construiren.

Fig. 121.



Gegeben:

Ein ○.

Gesucht:

Eingeschriebenes □.

Construction. Man ziehe zwei Durchmesser *AB* und *CD*, welche auf einander rechtwinkelig stehen, und verbinde ihre Endpunkte durch die Sehnen *AC*, *CB*, *BD* und *AD*. Alsdann ist *ABCD* das gesuchte eingeschriebene Quadrat.

Zum Beweise hat man aus §. 170 die Gleichheit der Bögen *AC*, *CB*, *BD* und *AD*, und hieraus folgt nach §. 191, daß *ABCD* ein regelmäßiges Viereck d. h. ein Quadrat ist.

§. 193.

Zusatz. Jedem Kreise kann durch geometrische Construction ein regelmäßiges Viereck, Achteck, Sechzehneck, 2c. sowohl eingeschrieben als umschrieben werden.

Denn das eingeschriebene regelmäßige Achteck wird aus dem Viereck erhalten, indem man auf die Seiten des letzteren aus dem

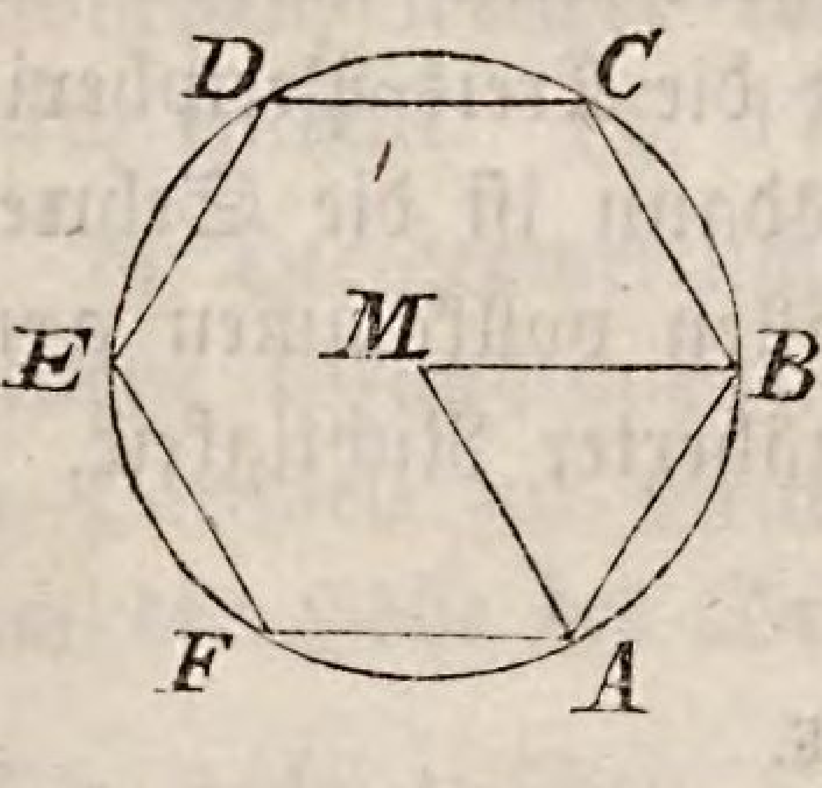
Mittelpunkte Perpendikel fällt, diese bis zur Kreis-Peripherie verlängert und die entstandenen Schnittpunkte mit den Eckpunkten des Vierecks verbindet. Ebenso entsteht das eingeschriebene regelmäßige Sechzehneck aus dem Achteck u. s. w.

Die umschriebenen regelmäßigen Polygone entstehen nach §. 191 aus den gleichnamigen eingeschriebenen Polygonen, indem man in den Eckpunkten der letzteren Tangenten an den Kreis legt und diese bis zu ihren Durchschnitten verlängert.

§. 194.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu construiren.

Fig. 122.



Gegeben:
Ein ○.
Gesucht:
Eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck.

Construction. Man trage den Halbmesser des gegebenen Kreises, *MA*, in der Peripherie des Kreises als Sehne ab so oft es angeht; alsdann liefert die Verbindung *ABCDEF* dieser Sehnen das gesuchte eingeschriebene regelmäßige Sechseck.

Zum Beweise verbinde man die Endpunkte einer dieser Sehnen, *AB*, mit dem Mittelpunkte *M* des Kreises durch die geraden Linien *MA* und *MB*. Alsdann ist nach §. 62 $\angle AMB = 60^0$, folglich nach §. 170 der Bogen $AB = \frac{1}{6}$ der Kreis-Peripherie; und da dasselbe von den Bögen *BC*, *CD*, ꝛc. bewiesen werden kann, so folgt aus §. 191, daß *ABCDEF* ein regelmäßiges Sechseck ist.

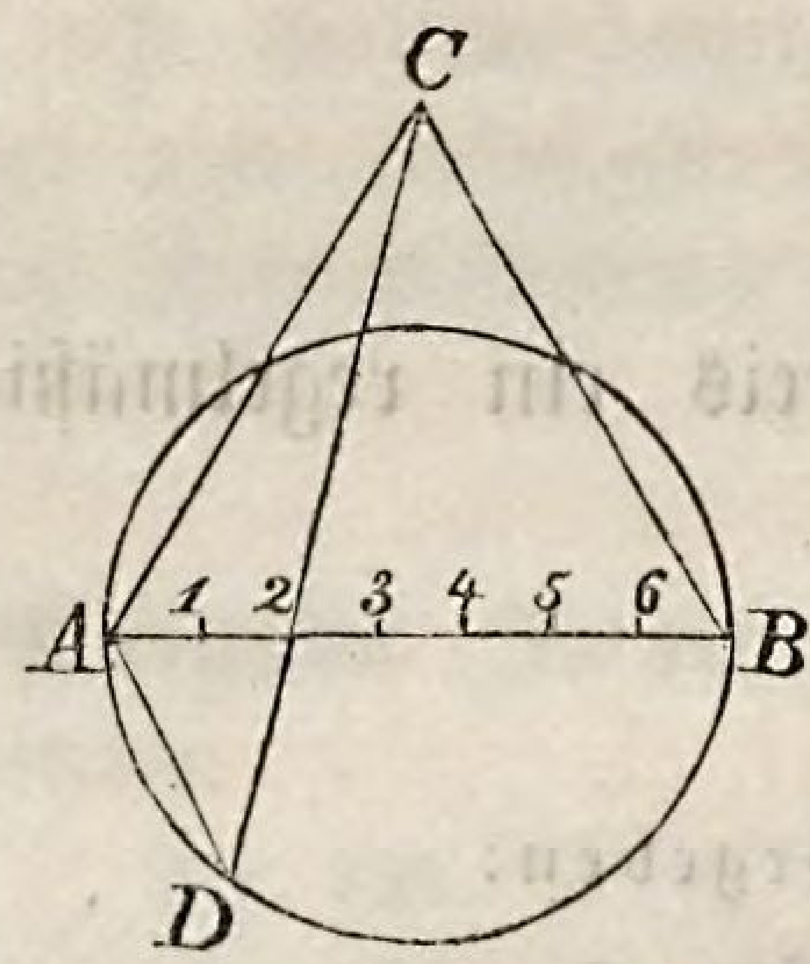
§. 195.

Zusatz. Jedem Kreise kann durch geometrische Construction ein regelmäßiges Dreieck, Sechseck, Zwölfeck, ꝛc. sowohl eingeschrieben als umschrieben werden.

Das eingeschriebene regelmäßige Dreieck (gleichseitige Dreieck) entsteht aus dem Sechseck, indem man in diesem drei Diagonalen zieht. Die übrigen regelmäßigen Polygone ergeben sich hier auf dieselbe Weise wie im §. 193.

Anmerkung. Zum Schluß mag hier noch eine einfache Methode erwähnt werden, durch welche man früher die allgemeine Construction eines eingeschriebenen Polygon von beliebiger Seitenzahl hat zu lösen gesucht. Man theile den Durchmesser AB, Fig. 123, des gegebenen Kreises in so viel gleiche Theile wie das Polygon Seiten haben soll, construire über AB ein gleichseitiges Dreieck ABC, und ziehe aus der Spitze C dieses Dreiecks durch den Theilpunkt 2 des Durchmessers eine gerade Linie, welche verlängert die Kreis-Peripherie in D schneidet. Alsdann ist die Sehne AD die gesuchte Polygon-Seite, in einigen Fällen vollkommen genau, in den meisten Fällen aber nur mit angenäherter Richtigkeit.

Fig. 123.



Geometrische Örter.

§. 196.

Erklärung. Unter dem geometrischen Orte eines Punktes versteht man eine Linie, deren sämmtliche Punkte einer gewissen Forderung Genüge leisten, welche jener Punkt erfüllen soll.

So kann man sehr leicht aus früheren Sätzen folgende geometrischen Örter aufstellen und nachweisen.

1) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat, ist ein Kreis, den man aus dem gegebenen Punkte als Mittelpunkt mit dem gegebenen Abstande als Halbmesser construirt.

2) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat, ist ein Perpendikel auf der Mitte der Verbindungslinie dieser beiden Punkte.

3) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einer gegebenen geraden Linie einen gegebenen Abstand hat, ist eine Parallele zu dieser geraden Linie, die in dem gegebenen Abstande neben ihr fortläuft.

4) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei sich schneidenden gegebenen geraden Linien gleiche Abstände hat, ist die Halbirungslinie des Winkels dieser beiden geraden Linien.

5) Der geometrische Ort der Spitze eines rechtwinkeligen Dreiecks, welches die gegebene Hypotenuse zur Grundlinie hat, ist ein über dieser Grundlinie als Durchmesser construirter Halbkreis. (§. 68.)

6) Der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks, welches eine gegebene Grundlinie und einen gegebenen Winkel an der Spitze hat, ist ein über der gegebenen Grundlinie als Sehne construirter Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel in sich enthält. (§. 176.)

7) Der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks, welches eine gegebene Grundlinie und einen gegebenen Flächeninhalt hat, ist eine Parallele zur Grundlinie, deren Abstand von der Grundlinie gleich der Höhe des Dreiecks ist. (§. 116.)

Die geometrischen Örter enthalten, wie man aus diesen Beispielen sieht, nichts als Sätze, welche außerdem schon in der Geometrie vorkommen, nur in einer eigenthümlichen Ausdrucksform. Sie wurden in dieser Form von den Griechen und werden auch noch gegenwärtig vorzugsweise zur Auflösung geometrischer Aufgaben angewandt.

Siebenter Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen unter Linien.

§. 197.

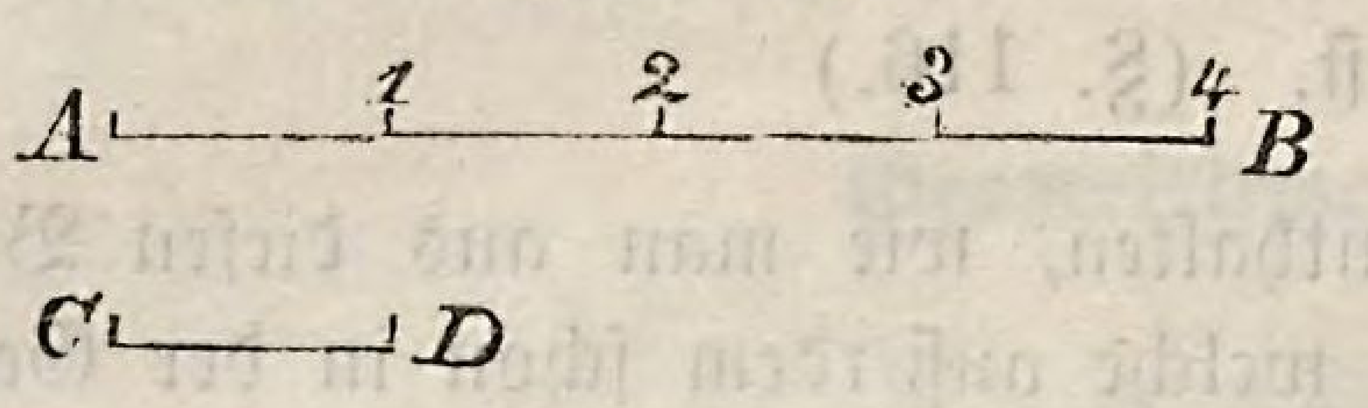
Erklärung. Eine gegebene begränzte Linie messen heißt: Untersuchen, wie eine zweite gegebene Linie, die Einheit, als Theil gesetzt werden muß, um eine der ersten gleiche Länge hervorzubringen.

Das Resultat der Messung wird durch eine Zahl ausgedrückt.

Die Messung wird ausgeführt durch unmittelbare Anlegung der Einheit an die gegebene Linie. Man kann dabei die folgenden drei Fälle unterscheiden.

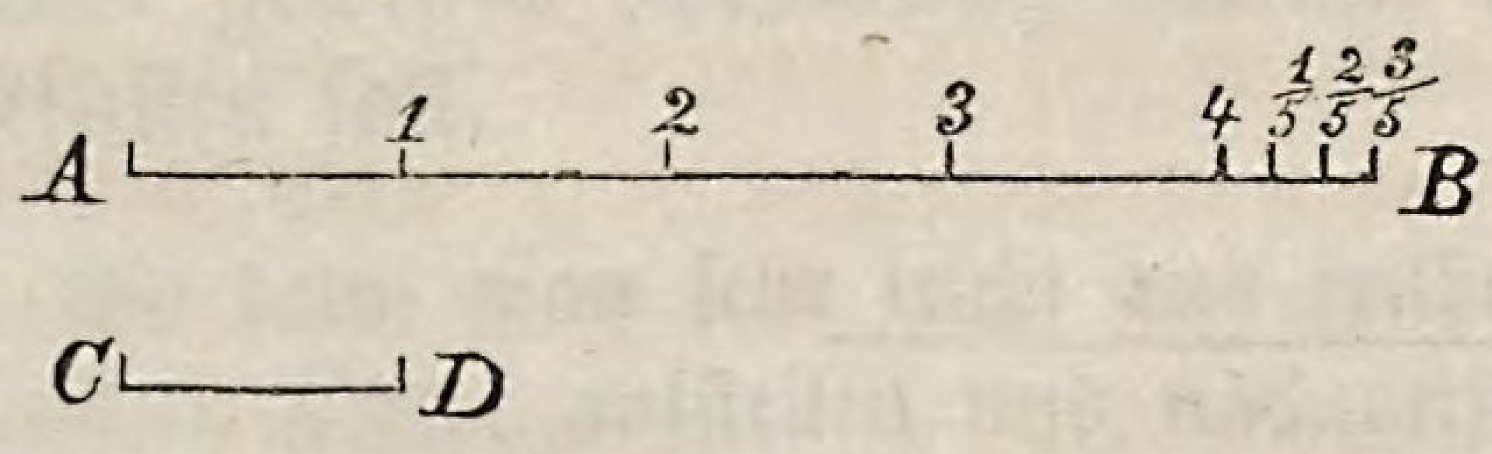
1) Es sei AB, Fig. 124, die zu messende gerade Linie und CD die gegebene Einheit. Wenn die Einheit CD genau ein oder mehrere Mal gesetzt werden muß, um die zu messende gerade Linie AB zu erschöpfen, hier z. B. 4 mal, so ist das Resultat der Messung eine ganze Zahl, wie hier 4.

Fig. 124.



2) Wenn, Fig. 125, ein Setzen der Einheit CD selbst nicht hinreicht, um die zu messende gerade Linie AB zu erschöpfen, aber ein aliquoter Theil der Einheit, z. B. $\frac{1}{5}$ CD, als Theil gesetzt den noch gebliebenen Rest genau erschöpft, so ist das Resultat der Messung eine gemischte Zahl oder ein Bruch, wie hier $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$.

Fig. 125.



3) Wenn aber auch ein aliquoter Theil der Einheit die zu messende Größe nicht erschöpft, in wie viel gleiche Theile man auch die Einheit getheilt haben mag, so ist die Messung nicht genau, sondern nur angenähert ausführbar, und das Resultat der Messung ist eine irrationale Zahl.

Dieser letzte Fall kann bei praktischen Messungen niemals eintreten, da ein etwaiger Rest, sobald derselbe eine gewisse Kleinheit erreicht hat, durch die Sinne nicht mehr unterschieden werden kann. Daß dieser Fall in aller Strenge aber dennoch möglich ist, wird sich unten zeigen.

§. 198.

Erklärung. Eine begränzte Linie wird ein Vielfaches einer andern begränzten Linie genannt, wenn die zweite genau ein oder mehrere Mal gesetzt werden muß, um die erste zu erschöpfen.

Die zweite heißt ein Maß der ersten.

So ist z. B. *AB* in Fig. 124 ein Vielfaches von *CD*, nämlich das Vierfache; und *CD* ein Maß von *AB*. Dagegen ist *AB* in Fig. 125 kein Vielfaches von *CD*, und *CD* kein Maß von *AB*.

§. 199.

Erklärung. Zwei begränzte Linien werden commensurabel genannt, wenn sich ein gemeinschaftliches Maß angeben läßt, durch welches beide genau gemessen werden können.

Sie heißen dagegen incommensurabel, wenn ein solches gemeinschaftliches Maß nicht existirt.

Um das gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Linien, falls es existirt, zu finden, kann man mit geringer Abänderung das Verfahren anwenden, welches in der Arithmetik (Arithm. §. 76, Aufl. 2) zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Divisors zweier Zahlen angegeben worden ist. Man trage die kleinere Linie so oft es angeht auf der größeren ab, den Rest trage man wieder auf der kleineren ab, den alsdann gebliebenen Rest trage man wieder auf dem vorigen Reste ab u. s. w., bis diese Abtragung genau aufgeht. Der letzte Rest, mit welchem die Abtragung aufgeht, ist das größte gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Linien. Wenn aber beständig ein Rest bleibt, so weit man auch das Verfahren fortsetzen mag, so existirt kein gemeinschaftliches Maß der beiden gegebenen Linien.

Wird von zwei commensurabelen Linien die eine durch die andere gemessen, so ist das Resultat der Messung eine rationale Zahl,

d. h. entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch. Wird aber von zwei incommensurabelen Linien die eine durch die andere gemessen, so ist das Resultat der Messung eine irrationale Zahl, d. h. man kann es nur angenähert angeben, obwohl so nahe wie man will.

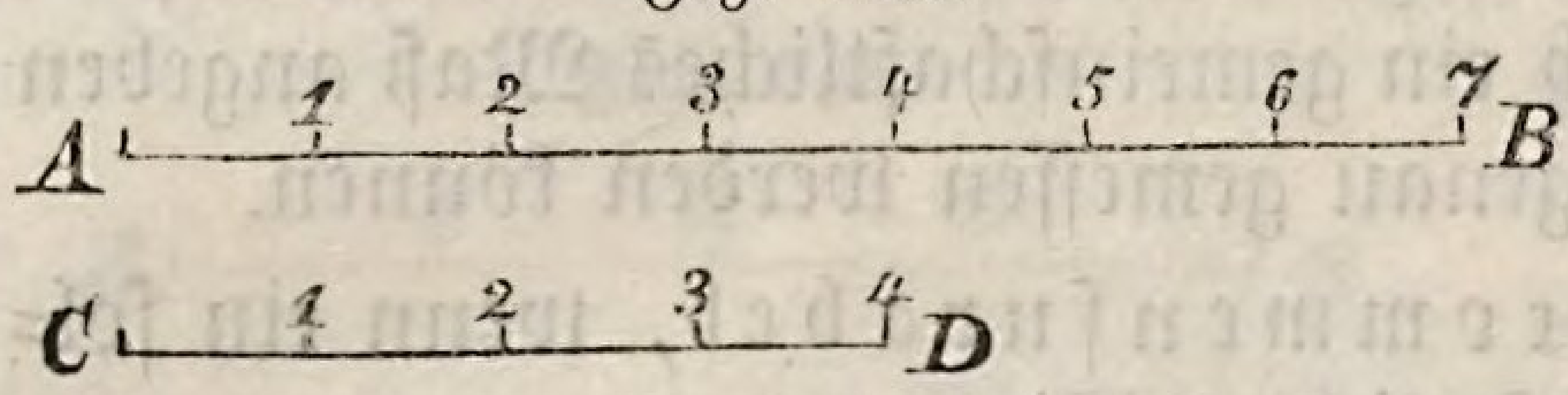
§. 200.

Erklärung. Unter dem Verhältniß zweier Linien versteht man den Quotienten der beiden Zahlen, welche man erhält, wenn beide Linien durch einerlei Maß gemessen werden. Die beiden Linien selbst werden die Glieder des Verhältnisses genannt; und zwar in der Reihefolge, in welcher sie hier betrachtet werden, das Vorderglied und das Hinterglied.

Die Bezeichnung des Verhältnisses geschieht wie die des Quotienten, z. B. $AB : CD$, gesprochen AB zu CD.

Es seien z. B. AB und CD, Fig. 126, zwei begränzte gerade Linien, deren Verhältniß man bestimmen will. Man habe gefunden,

Fig. 126.



daß ein gewisses gemeinschaftliches Maß 7 mal auf AB, und 4 mal auf CD kann abgetragen werden. Sodann ist das gesuchte Verhältniß dieser beiden Linien, oder das Verhältniß $AB : CD$, gleich dem Quotienten $7 : 4$ oder $\frac{7}{4}$. Wenn man aber die beiden gegebenen Linien vertauscht, so findet man das Verhältniß $CD : AB$ gleich dem Quotienten $4 : 7$ oder $\frac{4}{7}$.

Ein Verhältniß ist rational, wenn die beiden Glieder desselben commensurabel sind; es ist dagegen irrational, wenn die beiden Glieder desselben incommensurabel sind. Ein rationales Verhältniß ist das in Fig. 126 gegebene; Beispiele von irrationalen Verhältnissen werden sich weiter unten finden.

Anmerkung. Zu der hier gegebenen Erklärung des Verhältnisses muß nun sogleich noch aus der Arithmetik die Erklärung der Proportion (Arithm. §. 138) und der stetigen Proportion (Arithm. §. 139) gezogen werden, mit der einzigen und sich von selbst ergebenden Unterscheidung, daß, während die Arithmetik nur von Proportionen unter Zahlen handelt, die Geometrie hier es nur mit Proportionen unter Linien zu thun hat.

Überdies kann man aber sogleich hier bemerken, daß die in den §§. 197—200 aufgestellten Begriffe nicht auf Linien allein, sondern auf Größen überhaupt Anwendung finden, insbesondere also auch auf alle Raumgrößen, mit denen die Geometrie sich beschäftigt. Diese Begriffe werden deshalb im Verlaufe der Geometrie, je mit den nöthigen Sonder-Bestimmungen, wiederholt zur Sprache kommen.

Das Strahlensystem mit parallelen Transversalen.

§. 201.

Erklärung. Unter einem Strahlensystem versteht man den Inbegriff aller Strahlen, welche aus Einem Punkte können gezogen werden.

Jede gerade Linie, welche Strahlen eines Strahlensystems schneidet, ohne durch den Strahlenpunkt zu gehen, wird eine Transversale des Strahlensystems genannt.

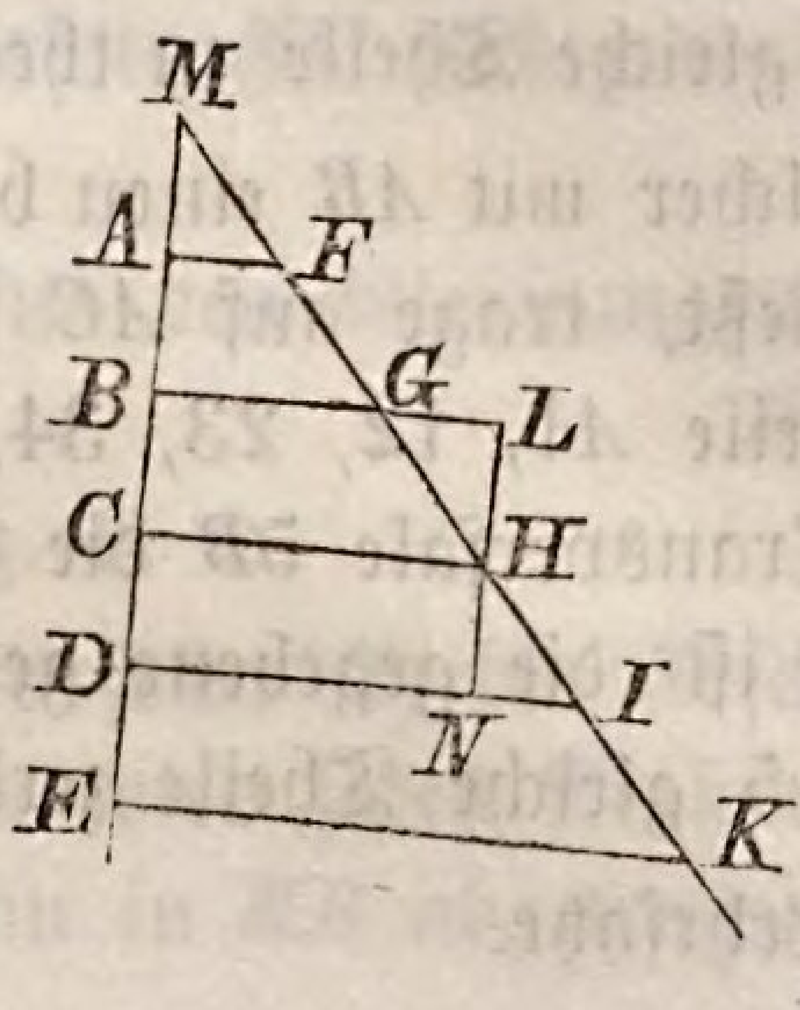
Hier ist die Erklärung §. 14 nachzusehen.

Unter den Abschnitten eines Strahls werden hier demnächst immer diejenigen Entfernungen verstanden werden, welche beliebige Punkte des Strahls von dem Strahlenpunkte besitzen. Dagegen die Entfernungen dieser Punkte unter einander werden die Theile des Strahls genannt werden.

§. 202.

Lehrsatz. Wenn man auf einem Strahl eine beliebige Anzahl gleicher Theile abträgt und durch alle Theilpunkte parallele Transversalen zieht, so wird auch jeder andere Strahl, den diese Transversalen treffen, in Theile zerlegt, welche unter sich gleich sind.

Fig. 127.



Voraussetzung:

$$MA = AB = BC = CD = DE \text{ etc.}$$

$$AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EK \text{ etc.}$$

Folgerung:

$$MF = FG = GH = HI = IK \text{ etc.}$$

Beweis. Um z. B. zu beweisen, daß $GH = HI$ ist, ziehe man durch H die Linie $LN \parallel ME$, welche die Transversale DI in N und die verlängerte Transversale BG in L trifft. Alsdann hat man nach §. 97

$$BC = LH$$
$$CD = HN$$

und da nach der Voraussetzung $BC = CD$ ist, so folgt auch

$$LH = HN.$$

Nimmt man hiezu die gleichen Winkel

$$\angle LHG = \angle NHI \text{ nach §. 25}$$
$$\angle HGL = \angle HIN \text{ nach §. 40}$$

so folgt aus §. 58

$$\triangle LHG \equiv \triangle NHI$$

und daraus

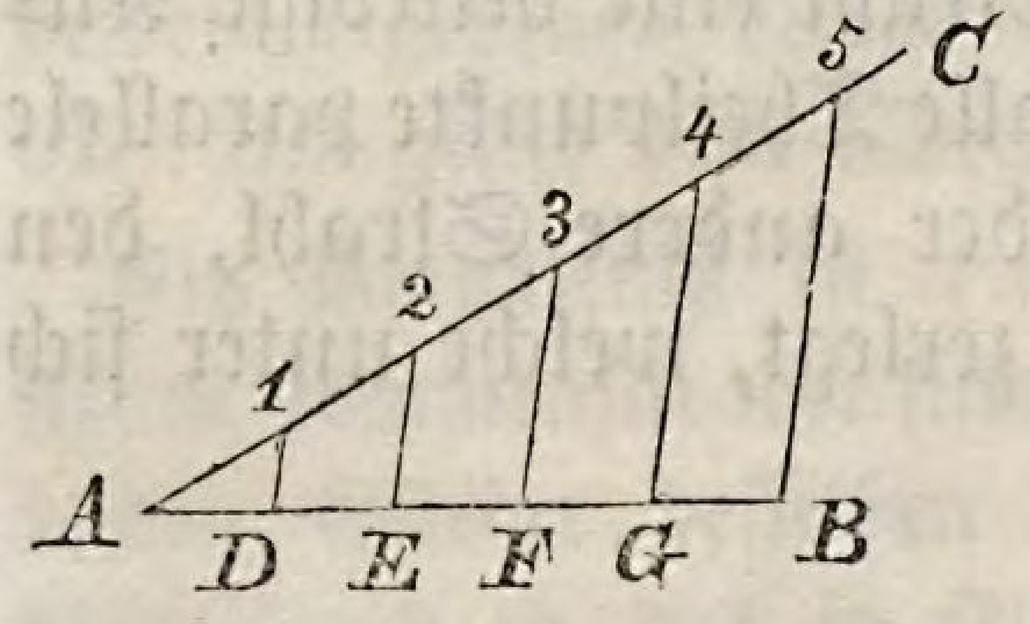
$$GH = HI.$$

Ebenso kann man von jeden zwei Theilen des Strahls MK beweisen, daß sie gleich groß sind. Folglich sind alle diese Theile gleich groß, w. z. b. w.

§. 203.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in eine gegebene Anzahl gleiche Theile zu theilen.

Fig. 128.



Gegeben:

AB.

Gesucht:

$\frac{1}{n} AB$.

Construction. Es sei z. B. AB in 5 gleiche Theile zu theilen.

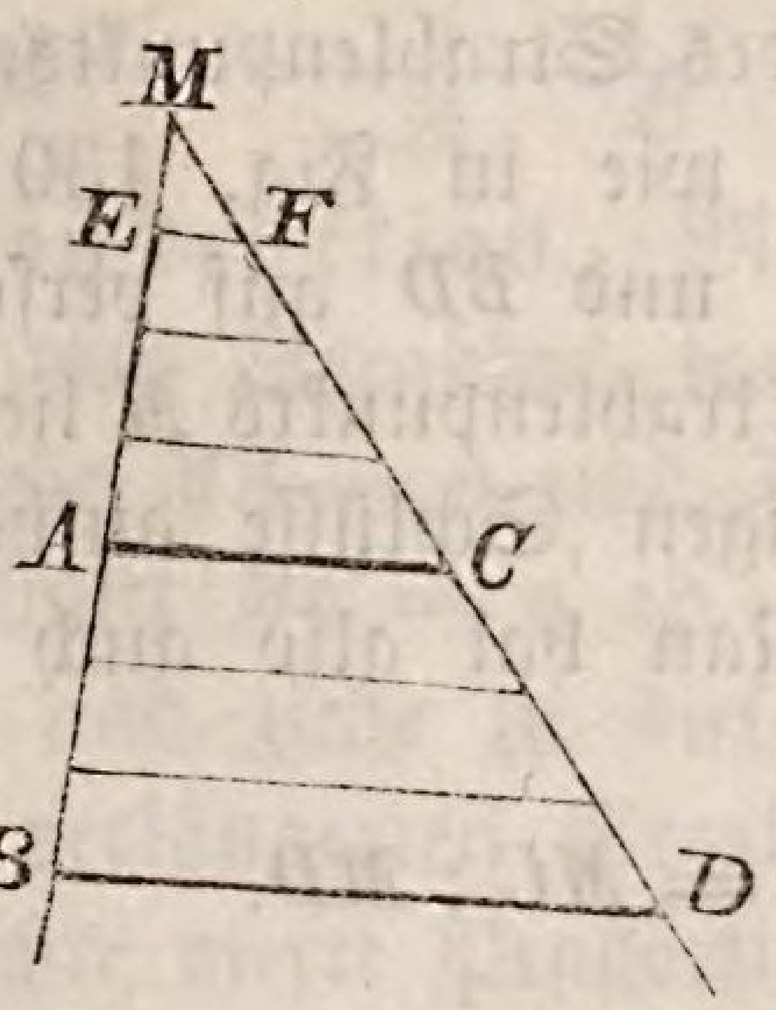
Man ziehe aus A einen Strahl AC, welcher mit AB einen beliebigen spitzen oder stumpfen Winkel einschließt, trage auf AC fünf beliebig große aber unter sich gleiche Theile $A1$, 12, 23, 34, 45 ab, verbinde 5 mit B, und ziehe zu der Transversale $5B$ die Parallelen $1D$, $2E$, $3F$ und $4G$. Alsdann ist die gegebene gerade Linie AB durch die Punkte D, E, F, G in 5 gleiche Theile zerlegt.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Lehrsatze.

§. 204.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniß unter den Abschnitten des einen Strahls gleich dem Verhältnisse unter den Abschnitten des andern Strahls.

Fig. 129.



Voraussetzung:

$AC \parallel BD$.

Folgerung:

$MA : MB = MC : MD$.

Beweis. Um das Verhältniß $MA : MB$ der beiden Abschnitte des einen Strahls darzustellen, muß man nach §. 200 diese beiden Abschnitte durch einerlei Maß messen. Es seien nun 1) die Abschnitte MA und MB commensurabel. Alsdann läßt sich nach §. 199 ein gemeinschaftliches Maß angeben, welches auf MA und MB genau abgetragen werden kann. Ist z. B. ME dieses Maß, und ist dasselbe n mal in MA (in der Figur 4 mal) und r mal in MB (in der Figur 7 mal) enthalten, so hat man nach §. 200

$$MA : MB = n : r. \qquad (1)$$

Zieht man ferner durch alle Theilpunkte des Strahls MB Parallelen zu den Transversalen AC und BD, so werden nach §. 202 auch auf dem Strahl MD eben so viel unter sich gleiche Theile hergestellt wie auf MB. Man kann mithin MF wie ein gemeinschaftliches Maß der beiden Abschnitte MC und MD ansehen, welches n mal in MC und r mal in MD enthalten ist. Also hat man auch

$$MC : MD = n : r. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) endlich folgt

$$MA : MB = MC : MD$$

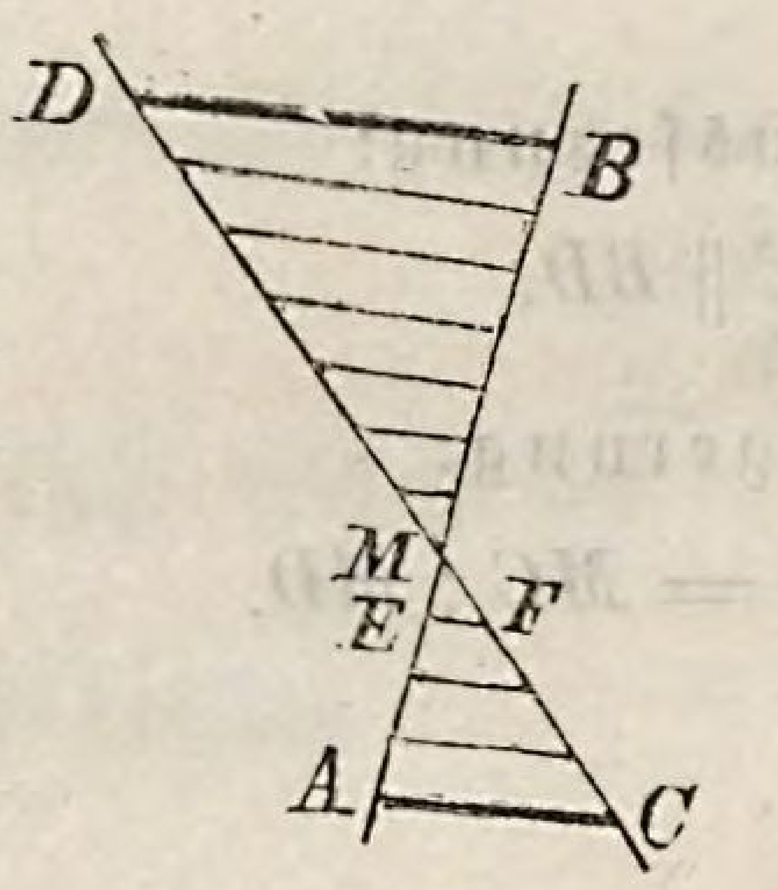
w. z. b. w.

Es seien 2) die Abschnitte MA und MB incommensurabel. Alsdann wird jedes Maß von MA, welches man angeben mag, nicht genau in MB abgetragen werden können, sondern es wird hier ein

Rest bleiben, welcher kleiner als das angenommene Maß ist. Wenn man diesen Rest nicht berücksichtigt, so gelten wieder die vorigen Schlüsse. Da man es aber in seiner Gewalt hat, das willkürliche Maß und folglich auch diesen Rest so klein anzunehmen wie man will, so gilt hier wieder vollkommen genau die vorige Proportion.

Anmerkung. In Fig. 129 liegen die beiden Transversalen auf einerlei Seite des Strahlenpunkts. Es können aber auch wie in Fig. 130 die Transversalen AC und BD auf verschiedenen Seiten des Strahlenpunkts M liegen, ohne daß die vorigen Schlüsse aufhören richtig zu sein. Man hat also auch hier die Proportion

Fig. 130.



$$MA : MB = MC : MD.$$

Dieselbe Bemerkung gilt in den nächstfolgenden §§.

§. 205.

Zusatz. Wenn zwei Strahlen von zwei (oder mehreren) parallelen Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniß unter jeden zwei Theilen des einen Strahls gleich dem Verhältnisse unter den gleichliegenden Theilen des anderen Strahls.

So ist z. B. in Fig. 129 und Fig. 130

$$MA : AB = MC : CD.$$

Ebenso

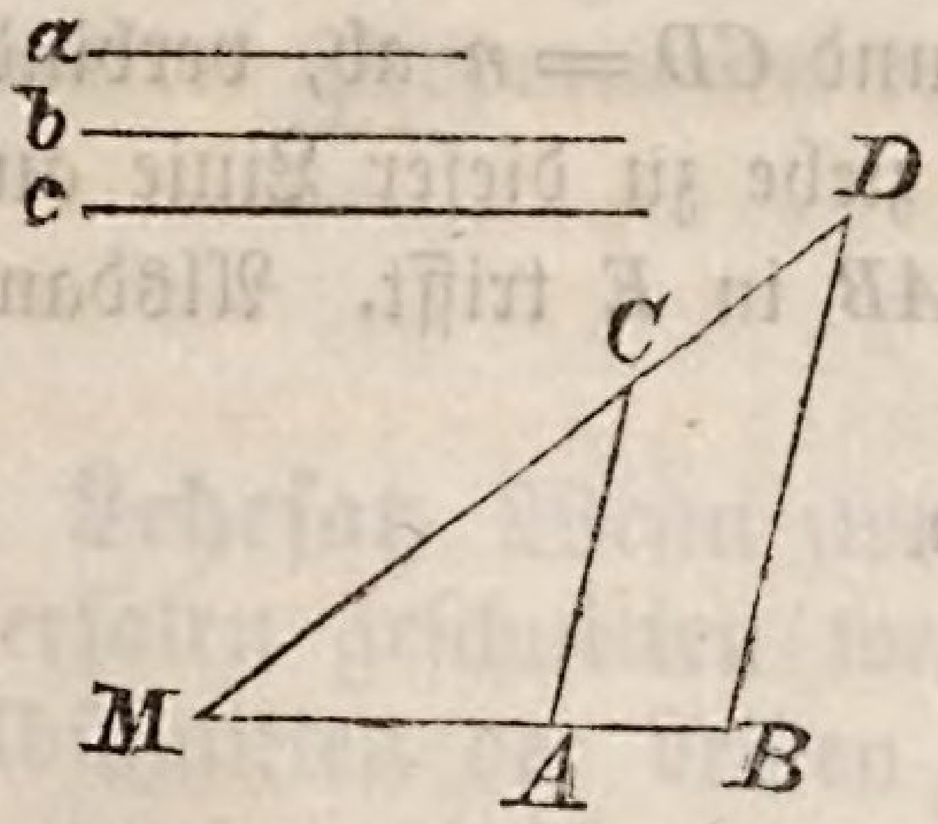
$$MB : AB = MD : CD.$$

Die Beweise für diese Proportionen können dem vorigen leicht nachgebildet werden.

§. 206.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien, deren Reihefolge gegeben ist, die vierte Proportionale zu finden.

Fig. 131.



Gegeben:

Die Linien a, b, c.

Gesucht:

Zu a, b, c die vierte Proportionale.

Construction. Man ziehe von einem beliebigen Punkte M aus zwei Strahlen, trage auf dem einen dieser Strahlen die Abschnitte $MA = a$ und $MB = b$, und auf dem andern Strahl den Abschnitt $MC = c$ ab, verbinde A und C durch die gerade Linie AC, und ziehe zu dieser Linie durch B die Parallele BD, welche den verlängerten Strahl MC in D trifft. Alsdann ist MD die gesuchte vierte Proportionale zu den drei gegebenen Linien a, b, c, oder es ist

$$a : b = c : MD.$$

Der Beweis beruhet in dem Lehrsatze §. 204.

§. 207.

Zusatz. Zu drei gegebenen Linien, deren Reihefolge gegeben ist, ist nur Eine vierte Proportionale möglich.

Oder wenn unter vier Linien die Proportion besteht

$$a : b = c : x,$$

und damit gleichzeitig die Proportion

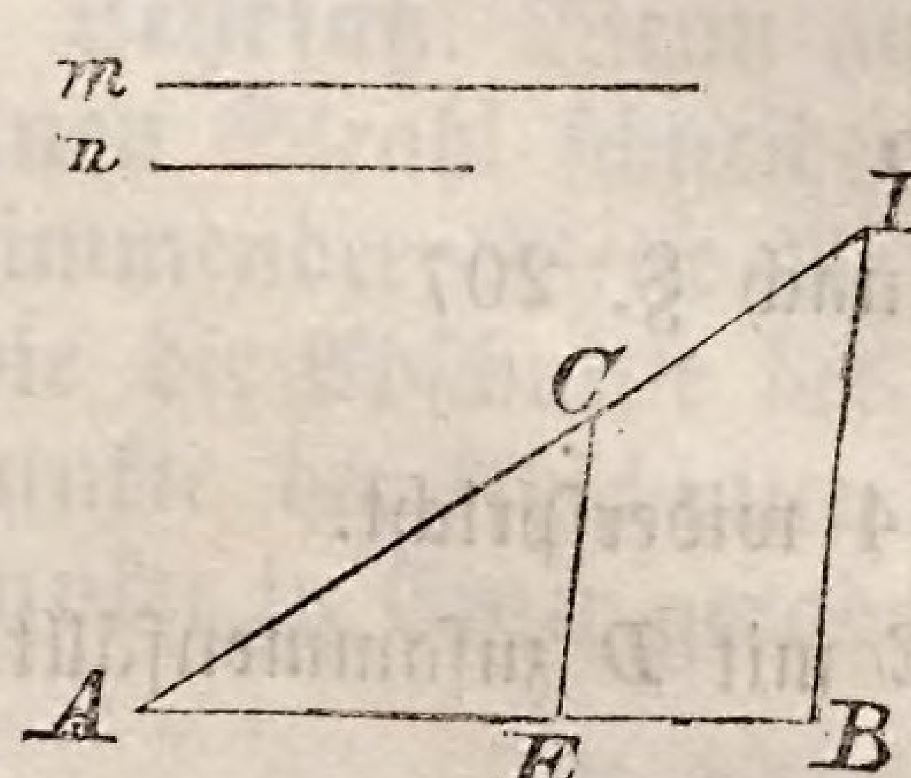
$$a : b = c : y,$$

so ist $x = y$.

§. 208.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Fig. 132.



Gegeben:

Die Linien AB, m, n.

Gesucht:

AB zu theilen in dem Verhältnisse $m : n$.

Construction. Man ziehe aus A einen beliebigen Strahl, trage auf demselben die Theile $AC = m$ und $CD = n$ ab, verbinde D mit B durch die gerade Linie DB, und ziehe zu dieser Linie aus C die Parallele CE, welche die gegebene AB in E trifft. Alsdann ist E der gesuchte Theilpunkt, oder es ist

$$AE : EB = m : n.$$

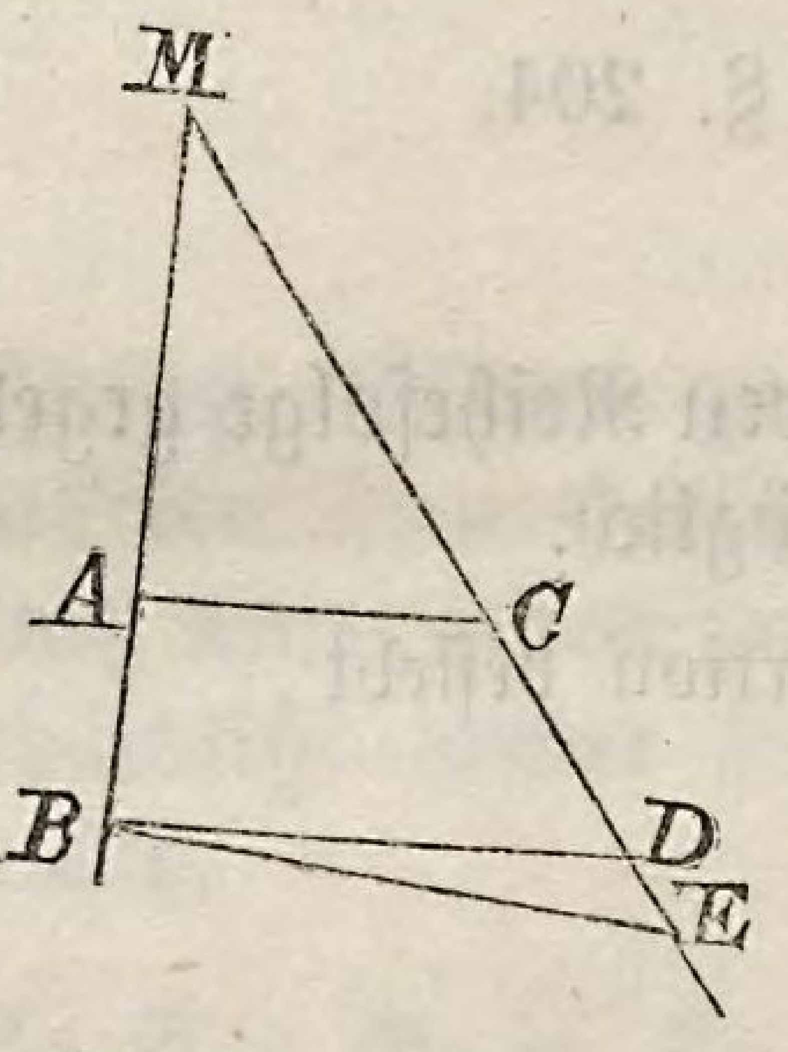
Der Beweis beruhet in §. 205.

§. 209.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei Transversalen so geschnitten werden, daß das Verhältniß unter den Abschnitten des einen Strahls gleich dem Verhältnisse unter den Abschnitten des anderen Strahls ist, so sind die beiden Transversalen parallel.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 204.)

Fig. 131.



Voraussetzung:

$$MA : MB = MC : MD.$$

Folgerung:

$$AC \parallel BD.$$

Beweis. Gesetzt es sei nicht $AC \parallel BD$. Alsdann kann man zu AC durch den Punkt B eine Parallele BE ziehen, welche den Strahl MD in dem Punkte E, verschieden von D, trifft. Nach §. 204 hat man nun

$$MA : MB = MC : ME.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$MA : MB = MC : MD$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt nach §. 207

$$MD = ME$$

welche Gleichung dem Grundsatze II Seite 4 widerspricht.

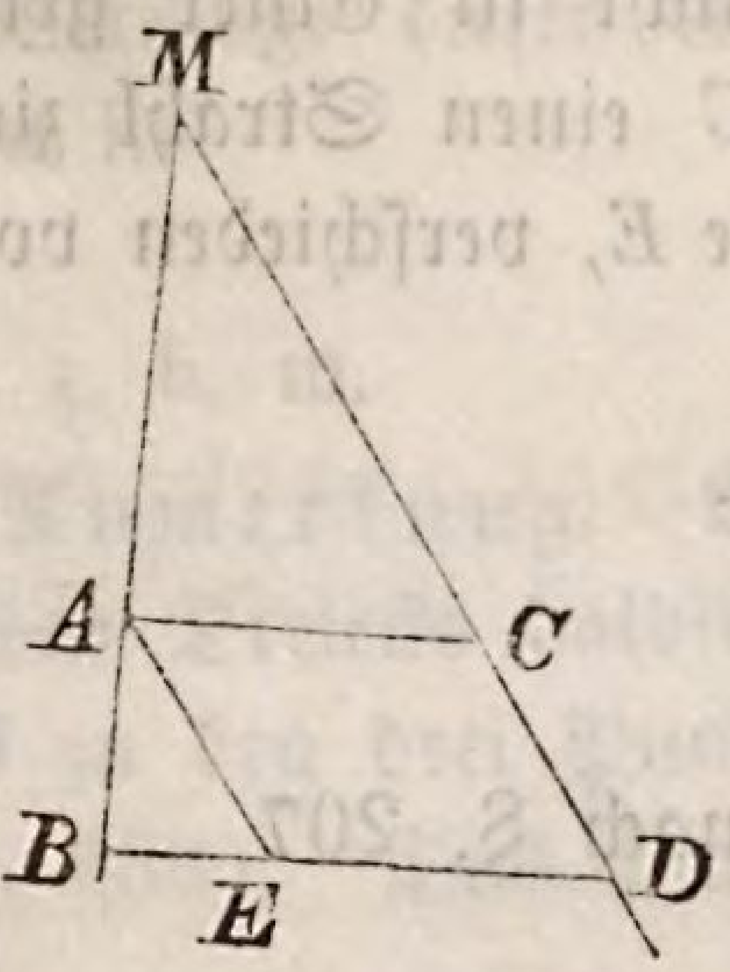
Der Widerspruch hört nur auf, wenn E mit D zusammenfällt. Also ist $AC \parallel BD$, w. z. b. w.

Anmerkung. Als Voraussetzung dieses Lehrsatzes hätte auch eine der Proportionen des §. 205 aufgestellt werden können.

§. 210.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniß unter den Abschnitten der beiden Transversalen gleich dem Verhältnisse unter den Abschnitten eines jeden Strahls.

Fig. 134.



Voraussetzung:

$$AC \parallel BD.$$

Folgerung:

$$MA : MB = AC : BD.$$

Beweis. Man ziehe $AE \parallel MD$. Alsdann hat aus §. 205, indem man B wie Strahlenpunkt und mithin AE und MD wie zwei Transversalen ansieht,

$$MA : MB = ED : BD.$$

Aber in dem Parallelogramm $AEDC$ ist nach §. 97

$$ED = AC.$$

Folglich

$$MA : MB = AC : BD$$

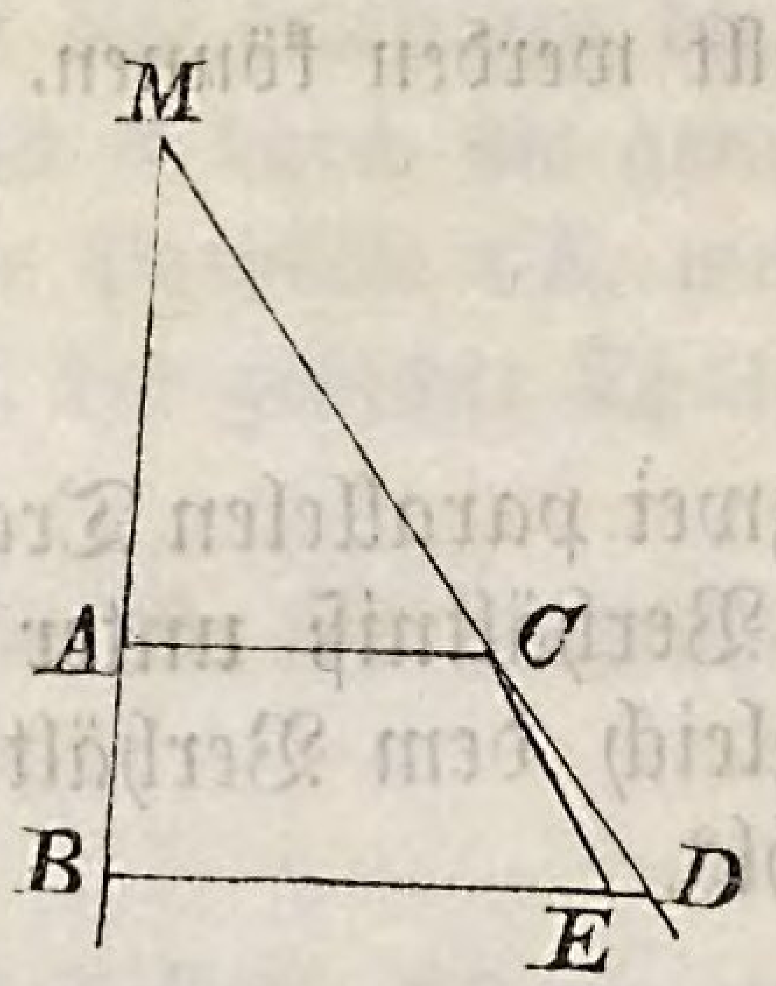
w. z. b. w.

§. 211.

Lehrsatz. Wenn auf zwei parallelen Transversalen, welche einen Strahl schneiden, von diesem Strahl aus in übereinstimmender Weise Abschnitte abgetragen werden, welche sich wie die Abschnitte des Strahls verhalten, so liegen die Endpunkte der Abschnitte der Transversalen mit dem Strahlenpunkte in Einer geraden Linie.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 135.



Voraussetzung:

$MA : MB = AC : BD$

$AC \parallel BD.$

Folgerung:

M, C, D in Einer geraden Linie.

Beweis. Gesetzt es liegen M, C, D nicht in Einer geraden Linie. Alsdann kann man aus M durch C einen Strahl ziehen, welcher die Transversale BD in dem Punkte E, verschieden von D, trifft, und nach §. 210 ist

$$MA : MB = AC : BE.$$

Aber nach der Voraussetzung hat man

$$MA : MB = AC : BD$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt nach §. 207

$$BD = BE$$

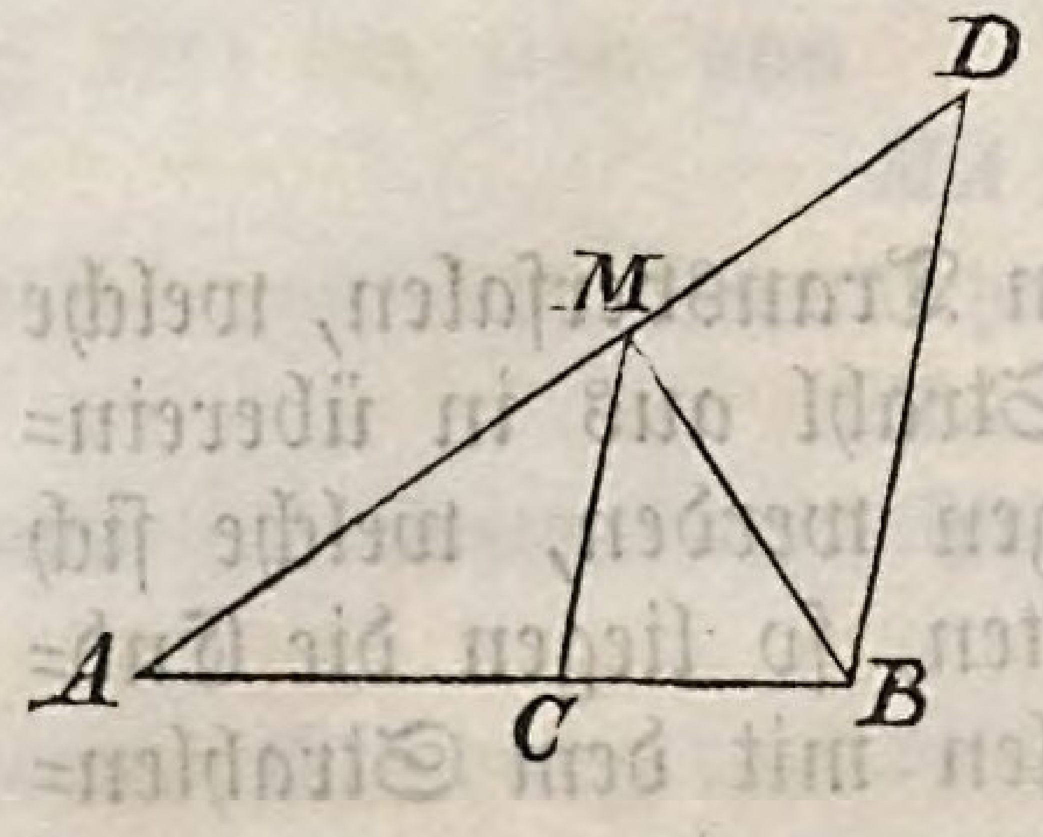
welche Gleichung dem Grundsatze II Seite 4 widerspricht.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn E mit D zusammenfällt. Also liegen M, C, D in Einer geraden Linie, w. z. b. w.

§. 212.

Lehrsatz. Ein Strahl, welcher einen Winkel eines Dreiecks halbirt, theilt die diesem Winkel gegenüberliegende Seite im Verhältniß der ihm anliegenden Seiten.

Fig. 136.



Voraussetzung:

$\angle AMC = \angle CMB.$

Folgerung:

$AC : CB = AM : MB.$

Beweis. Man ziehe durch B die Linie $BD \parallel CM$, und verlängere AM über M hinaus bis D. Alsdann hat man aus §. 205

indem man A wie Strahlenpunkt und CM und BD wie zwei Transversalen ansieht,

$$AC : CB = AM : MD.$$

Aber es ist ferner

$$\angle AMC = \angle MDB \text{ nach §. 41}$$
$$\angle CMB = \angle MBD \text{ nach §. 40}$$

und da nach der Voraussetzung $\angle AMC = \angle CMB$ ist, so folgt

$$\angle MDB = \angle MBD,$$

und hieraus nach §. 64

$$MB = MD.$$

Vermöge dieser Gleichung verwandelt sich die obige Proportion in

$$AC : CB = AM : MB$$

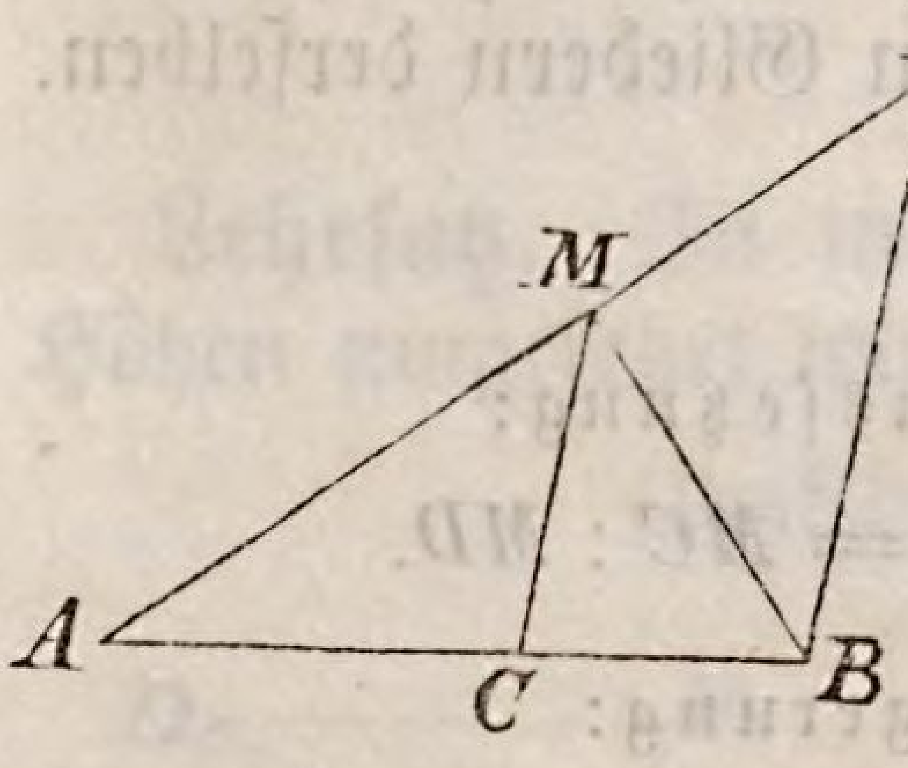
w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn man auch den Außenwinkel BMD desselben Dreiecks halbirt, so erhält man in der Verlängerung von AB zu den drei Punkten A, C, B den vierten harmonischen Punkt (§. 236). Dies kann jedoch hier nicht weiter verfolgt werden.

§. 213.

Lehrsatz. Wenn ein Strahl, welcher aus einem Eckpunkte eines Dreiecks gezogen wird, die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite im Verhältniß der ihm anliegenden Seiten theilt, so wird durch ihn der an diesem Eckpunkte liegende Winkel des Dreiecks halbirt.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:

$$AC : CB = AM : MB.$$

Folgerung:

$$\angle AMC = \angle CMB.$$

Beweis. Man verlängere AM über M hinaus nach D, so daß $MD = MB$ wird, und ziehe BD. Vermöge der Voraussetzung hat man sodann

$$AC : CB = AM : MD$$

und daraus folgt nach §. 209, Anm., indem man A wie Strahlenpunkt ansieht,

$$CM \parallel BD.$$

Demnach ist ferner

$$\angle AMC = \angle MDB \text{ nach §. 41}$$
$$\angle CMB = \angle MBD \text{ nach §. 40}$$

und da nach der Construction $MB = MD$ ist, so hat man nach §. 61 auch

$$\angle MDB = \angle MBD,$$

und mithin endlich

$$\angle AMC = \angle CMB$$

w. z. b. w.

§. 214.

Erklärung. Unter dem Rechteck aus zwei gegebenen Linien versteht man ein Rechteck, welches die eine dieser Linien zur Grundlinie und die andere zur Höhe hat.

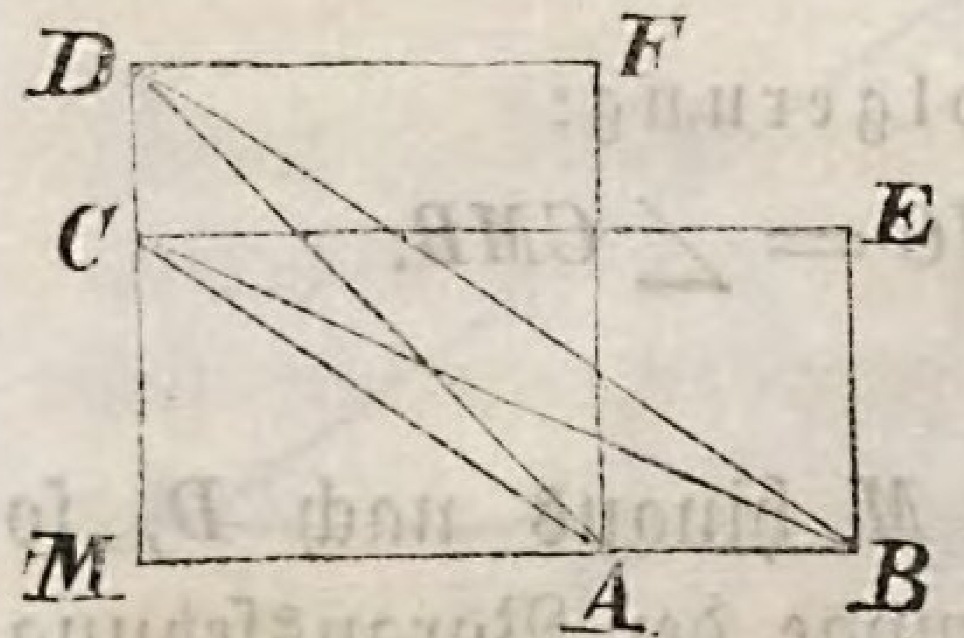
Dieselbe Benennung kann auch auf Parallelogramme und Dreiecke übertragen werden. Es ist dabei, in Betreff des Inhalts, immer gleichgültig, welche der beiden gegebenen Linien man zur Grundlinie oder Höhe machen will.

Über die Bezeichnung des Rechtecks sehe man §. 103.

§. 215.

Lehrsatz. Wenn vier Linien eine Proportion bilden, so ist das Rechteck aus den inneren Gliedern dieser Proportion inhaltsgleich dem Rechteck aus den äußeren Gliedern derselben.

Fig. 137.



Voraussetzung:

$$MA : MB = MC : MD.$$

Folgerung:

$$\square\, MB \,.\, MC = \square\, MA \,.\, MD.$$

Beweis. Man denke sich die vier gegebenen Linien als Abschnitte auf zwei Strahlen abgetragen, welche im Strahlenpunkte M

sich unter einem rechten Winkel schneiden, und zwar so, daß die Glieder *MA* und *MB* des ersten Verhältnisses die Abschnitte des einen Strahls, und die Glieder *MC* und *MD* des zweiten Verhältnisses die Abschnitte des anderen Strahls bilden, und vervollständige die Rechtecke *MBEC* und *MAFD*. Alsdann ist

$$MBEC = \square\, MB\,.\,MC,$$
$$MAFD = \square\, MA\,.\,MD.$$

Zieht man nun die Linien *AC* und *BD*, so hat man aus der Voraussetzung nach §. 209

$$AC \parallel BD.$$

Zieht man ferner die Linien *BC* und *AD*, so ist nach §. 116

$$\triangle\, CAB = \triangle\, CAD$$

und wenn man hiezu die identische Gleichung

$$\triangle\, MAC = \triangle\, MAC$$

addirt, so folgt

$$\triangle\, MBC = \triangle\, MAD.$$

Nun ist $\triangle$ *MBC* die Hälfte des Rechtecks *MBEC*, und $\triangle$ *MAD* die Hälfte des Rechtecks *MAFD*. Folglich ist auch

$$MBEC = MAFD$$

d. i. $\square\, MB\,.\,MC = \square\, MA\,.\,MD$

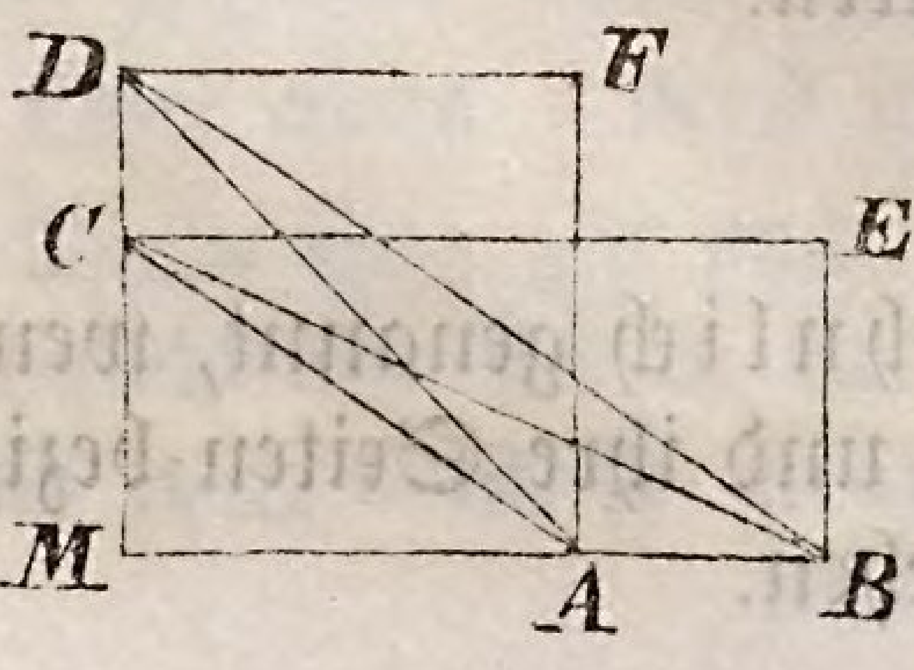
w. z. b. w.

Anmerkung. Man vergleiche mit diesem Satze den Lehrsatz §. 147 der Arithmetik, welcher von geometrischen Proportionen unter Zahlen handelt, während hier von Proportionen unter Linien die Rede ist. Dem Producte von Zahlen entspricht hier ein Rechteck aus Linien.

§. 216.

Lehrsatz. In inhaltsgleichen Rechtecken verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Grundlinien.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:

$$MBEC = MAFD.$$

Folgerung:

$$MA : MB = MC : MD.$$

Beweis. Zieht man in den gegebenen Rechtecken *MBEC* und *MAFD* die Diagonalen *BC* und *AD*, so wird durch dieselben jedes der beiden Rechtecke in zwei inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt; folglich hat man, vermöge der Voraussetzung,

$$\triangle MBC = \triangle MAD.$$

Subtrahirt man hiervon, indem man *AC* zieht, die identische Gleichung

$$\triangle MAC = \triangle MAC$$

so bleibt

$$\triangle CAB = \triangle CAD.$$

Aber nach §. 118 müssen die Dreiecke *CAB* und *CAD*, denen einerlei Grundlinie *CA* angehört, auch gleiche Höhe haben; d. i. wenn man *BD* zieht, so ist

$$AC \parallel BD,$$

woraus nach §. 204 folgt

$$MA : MB = MC : MD$$

w. z. b. w.

Anmerkung. In Folge der hier bewiesenen beiden Lehrsätze gelten für die Proportionen unter Linien alle diejenigen Umwandlungen, welche im §. 150 der Arithmetik für geometrische Proportionen unter Zahlen bewiesen worden sind. Denn man hat nur nöthig, in den dortigen Beweisen für die Producte aus Zahlen Rechtecke aus Linien an die Stelle zu setzen.

Ferner kann man nach diesen beiden Lehrsätzen jeden Satz, welcher von Proportionen unter Linien handelt, in einen Satz über inhaltsgleiche Rechtecke verwandeln, und umgekehrt. So ist z. B. die Aufgabe §. 206 völlig einerlei mit der Aufgabe §. 124, wie verschieden auch die Auflösungen beider an den angeführten Stellen ausgefallen sind. Weitere Beispiele hierüber werden unten vorkommen.

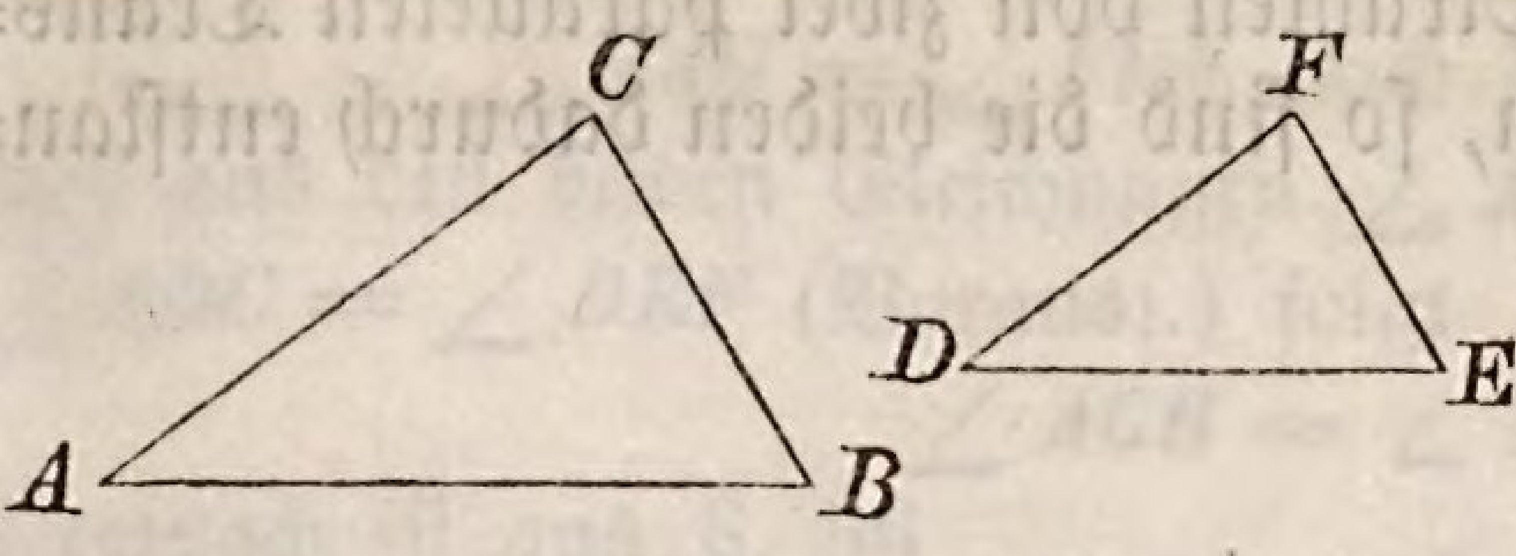
Ähnlichkeit der Figuren.

§. 217.

Erklärung. Zwei Figuren werden ähnlich genannt, wenn ihre Winkel beziehungsweise gleich sind und ihre Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen.

Wenn man z. B. annimmt, daß die beiden Dreiecke ABC und DEF, Fig. 138, ähnlich sein sollen, so sind in dieser Aussage, vermöge der vorstehenden Erklärung, die folgenden sechs Bedingungen enthalten:

Fig. 138.



1) in Betreff der Winkel

$$\angle CAB = \angle FDE$$
$$\angle ABC = \angle DEF$$
$$\angle ACB = \angle DFE;$$

2) in Betreff der Seiten

$$AB : DE = BC : EF$$
$$AB : DE = AC : DF$$
$$BC : EF = AC : DF.$$

Diese 6 Bedingungen lassen sich aber jederzeit auf 4 zurückführen. Denn aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken folgt immer schon die Gleichheit des dritten Winkels, und aus zwei Proportionen unter den drei Seiten zweier Dreiecke folgt immer schon die dritte Proportion.

Die Congruenz geradliniger Figuren kann wie ein besonderer Fall der Ähnlichkeit angesehen werden. Denn auch in congruenten Figuren sind alle Winkel beziehungsweise gleich, und alle Seiten stehen beziehungsweise in gleichen Verhältnissen; nur kommt die besondere Bedingung hinzu, daß alle diese Verhältnisse den Werth Eins haben.

Man gebraucht das Zeichen $\sim$ für ähnlich.

§. 218.

Zusatz. Wenn zwei Figuren einer dritten ähnlich sind, so sind sie auch einander ähnlich.

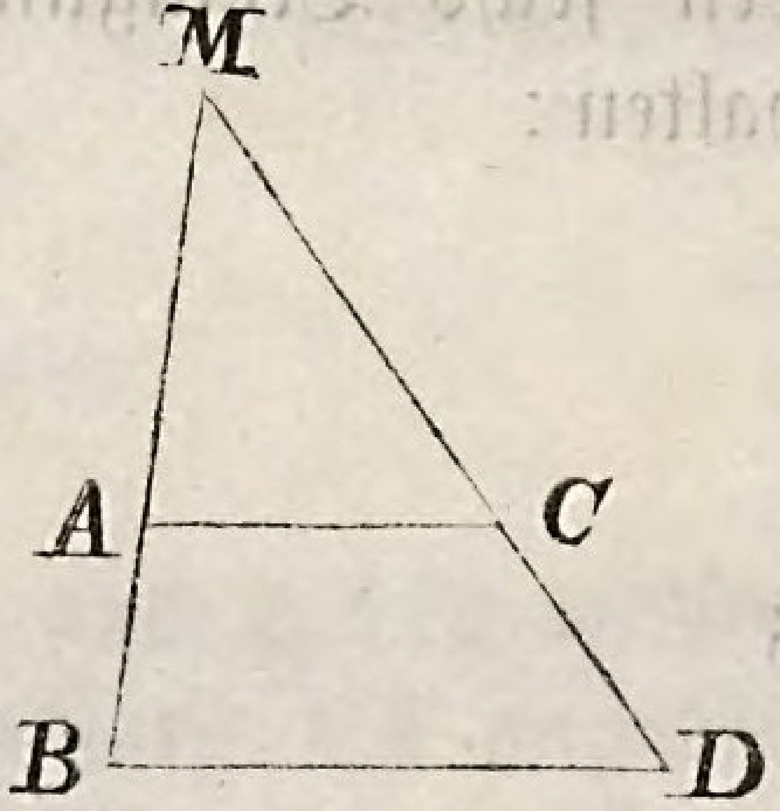
Oder wenn $A \sim B$ und $A \sim C$ ist, so ist auch $B \sim C$.

Dieser Satz gilt auch dann, wenn eine der beiden vorausgesetzten Ähnlichkeiten sich in Congruenz verwandelt. Oder wenn $A \sim B$ und $A \cong C$ ist, so ist auch $B \sim C$.

§. 219.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so sind die beiden dadurch entstandenen Dreiecke ähnlich.

Fig. 139.



Voraussetzung:
$AC \parallel BD$.

Folgerung:
$\triangle MAC \sim \triangle MBD$.

Beweis. Man hat

$\angle AMC = \angle BMD$
$\angle MAC = \angle MBD$ nach §. 41
$\angle MCA = \angle MDB$ " " .

Ferner

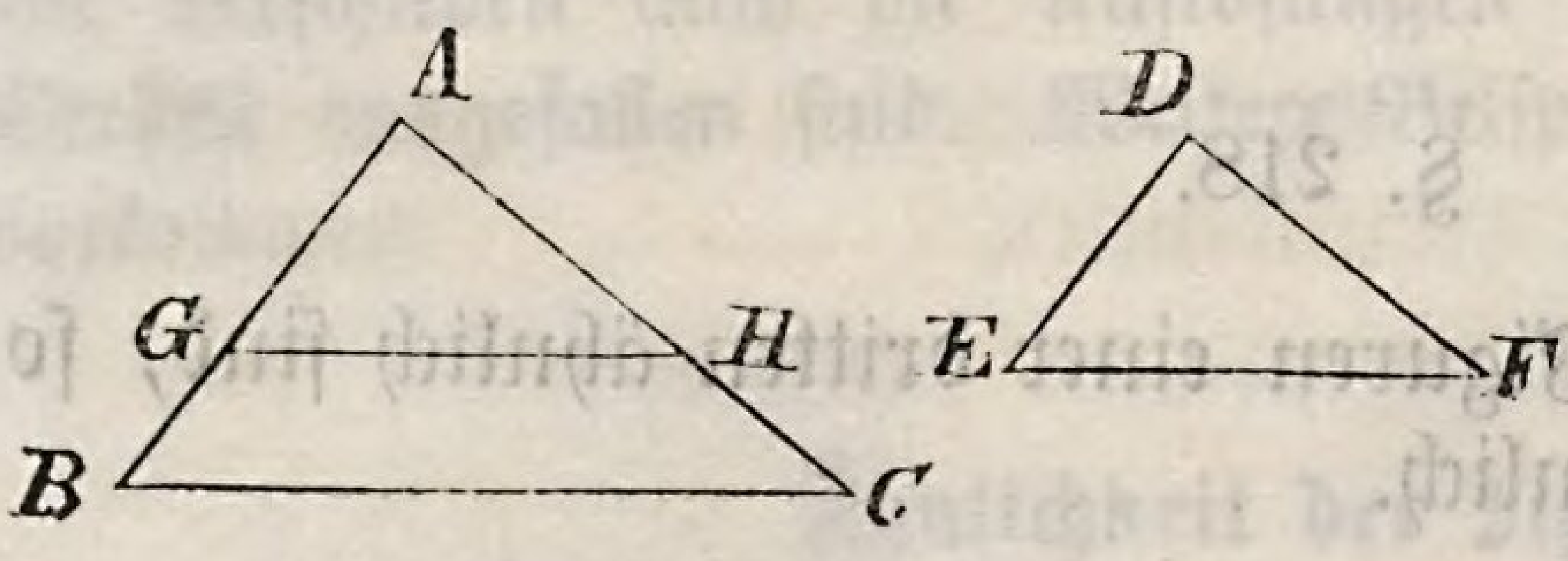
$MA : MB = MC : MD$ nach §. 204
$MA : MB = AC : BD$ nach §. 210
$MC : MD = AC : BD$ " " .

Da hiemit alle Forderungen der Erklärung §. 217 erfüllt sind, so folgt $\triangle MAC \sim \triangle MBD$, w. z. b. w.

§. 220.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Fig. 140.



Voraussetzung:
$\angle CAB = \angle FDE$
$\angle ABC = \angle DEF$
[$\angle ACB = \angle DFE$].

Folgerung:
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab, so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \qquad (1)$$

Ferner ist

$$AG = DE \text{ nach der Construction,}$$

$$\angle HAG = \angle FDE \text{ nach der Voraussetzung,}$$

und aus den beiden Gleichungen $\angle AGH = \angle ABC$ (§. 41) und $\angle ABC = \angle DEF$ (Voraussf.) folgt

$$\angle AGH = \angle DEF.$$

Demnach ist aus §. 56

$$\triangle AGH \equiv \triangle DEF. \qquad (2)$$

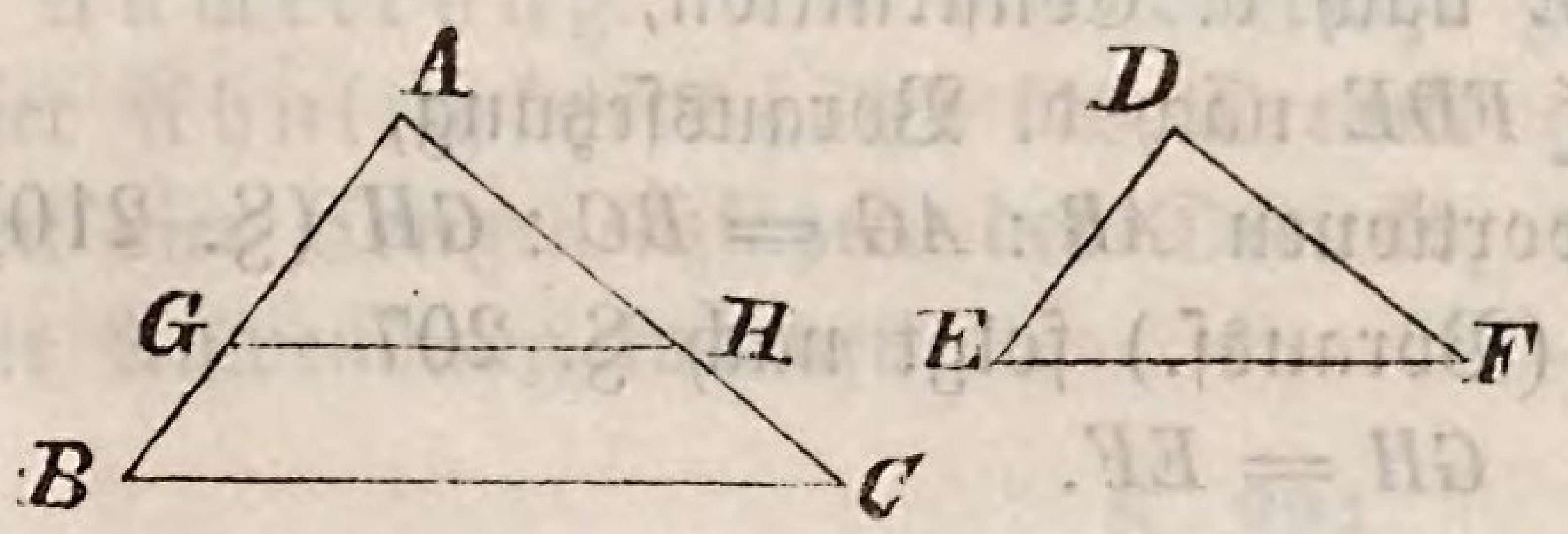
Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

w. z. b. w.

§. 221.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten in gleichen Verhältnissen stehen und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.



Voraussetzung:

$AB : DE = AC : DF$

$\angle CAB = \angle FDE.$

Folgerung:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab, so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \qquad (1)$$

Ferner ist

$$AG = DE \text{ nach der Construction,}$$

$$\angle HAG = \angle FDE \text{ nach der Voraussetzung,}$$

und aus den beiden Proportionen $AB : AG = AC : AH$ (§. 204) und $AB : DE = AC : DF$ (Voraussf.) folgt nach §. 207

$$AH = DF.$$

Demnach ist aus §. 60

$$\triangle AGH \equiv \triangle DEF. \qquad (2)$$

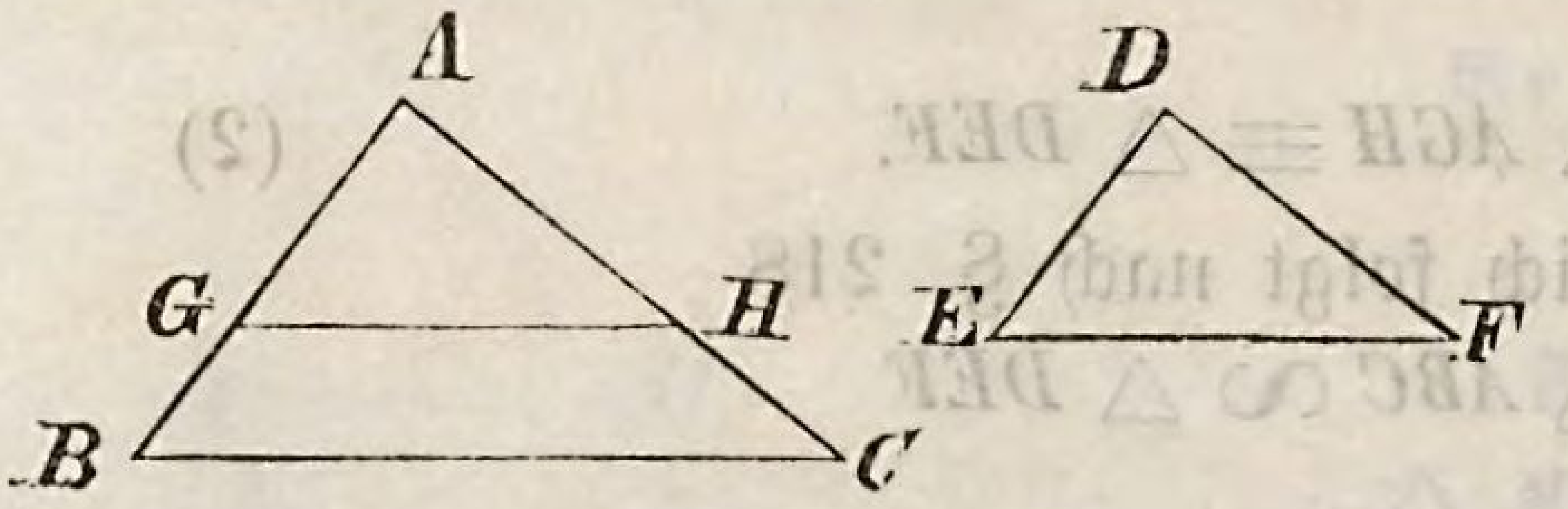
Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

w. z. b. w.

§. 222.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten in gleichen Verhältnissen stehen und die der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.



Voraussetzung:
$AB : DE = BC : EF$
$\angle CAB = \angle FDE.$
$BC > AB$
$EF > DE.$
Folgerung:
$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab, so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \qquad (1)$$

Ferner ist

$AG = DE$ nach d. Construction,
$\angle HAG = \angle FDE$ nach d. Voraussetzung,

und aus den beiden Proportionen $AB : AG = BC : GH$ (§. 210) und $AB : DE = BC : EF$ (Vorausſ.) folgt nach §. 207

$$GH = EF.$$

Demnach ist aus §. 76

$$\triangle AGH \cong \triangle DEF. \qquad (2)$$

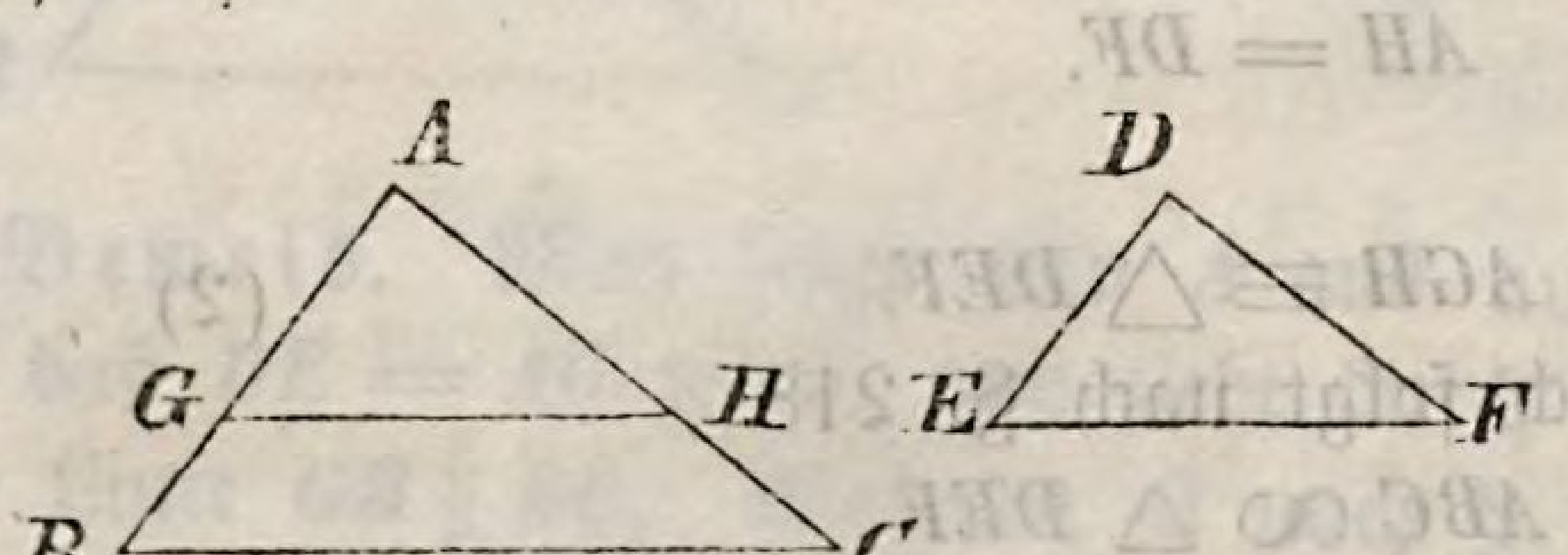
Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

w. z. b. w.

§. 223.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.



Voraussetzung:
$AB : DE = AC : DF$
$AB : DE = BC : EF$
$[AC : DF = BC : EF].$

Folgerung:
$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab, so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \qquad (1)$$

Ferner ist

$AG = DE$ nach d. Construction;

aus den beiden Proportionen $AB : AG = AC : AH$ (§. 204) und $AB : DE = AC : DF$ (Vorauss.) folgt nach §. 207

$$AH = DF,$$

und aus den beiden Proportionen $AB : AG = BC : GH$ (§. 210) und $AB : DE = BC : EF$ (Vorauss.) folgt ebenso

$$GH = EF.$$

Demnach ist aus §. 83

$$\triangle AGH \cong \triangle DEF. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

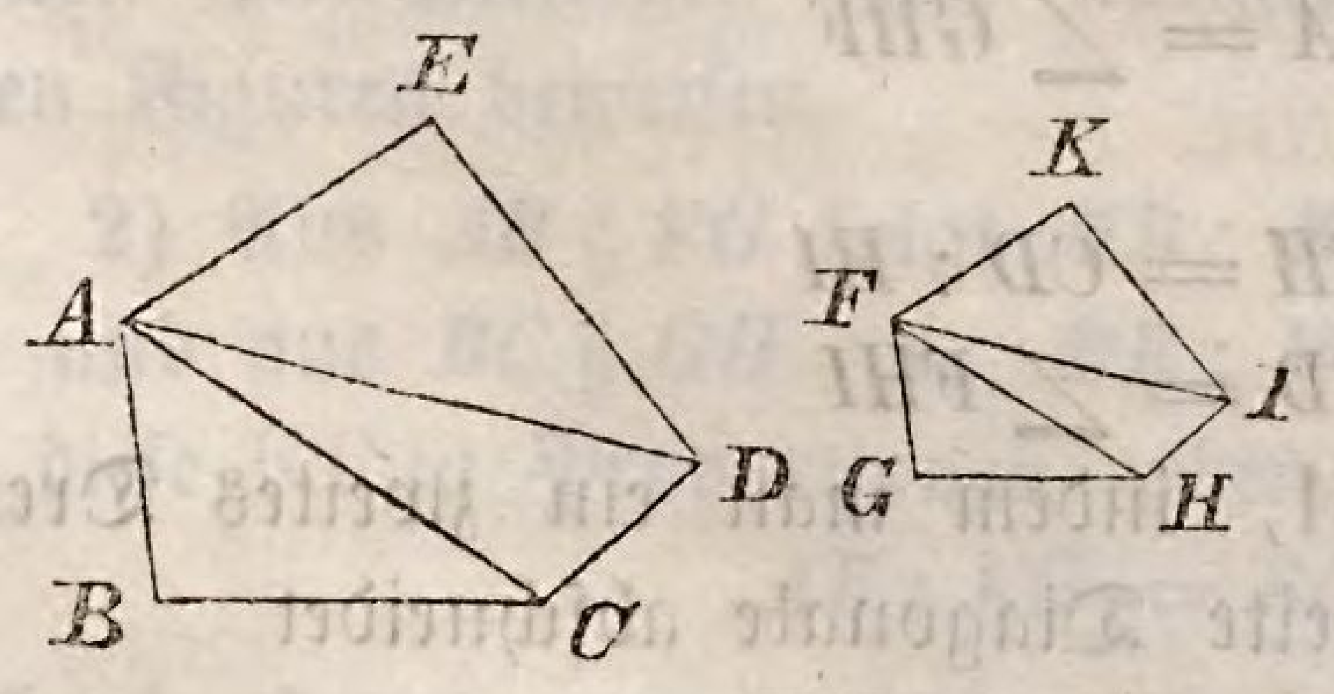
w. z. b. w.

Anmerkung. Die vier Lehrsätze §§. 220—223 werden die vier Ähnlichkeitssätze des Dreiecks genannt. Sie entsprechen den vier Congruenzsätzen des Dreiecks, welche in ihren Beweisen zur Anwendung kommen.

§. 224.

Lehrsatz. Wenn zwei Polygone aus ähnlichen Dreiecken, deren sämmtliche Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen, auf übereinstimmende Weise zusammengesetzt sind, so sind die Polygone ähnlich.

Fig. 141.



Voraussetzung:

$\triangle ABC \sim \triangle FGH$
$\triangle ACD \sim \triangle FHI$
$\triangle ADE \sim \triangle FIK.$

Folgerung:

$ABCDE \sim FGHIK.$

Beweis. In beiden Polygonen sind erstens alle Winkel beziehungsweise gleich, weil sie entweder gleiche Winkel in ähnlichen Dreiecken, oder Summen gleicher Winkel aus ähnlichen Dreiecken sind.

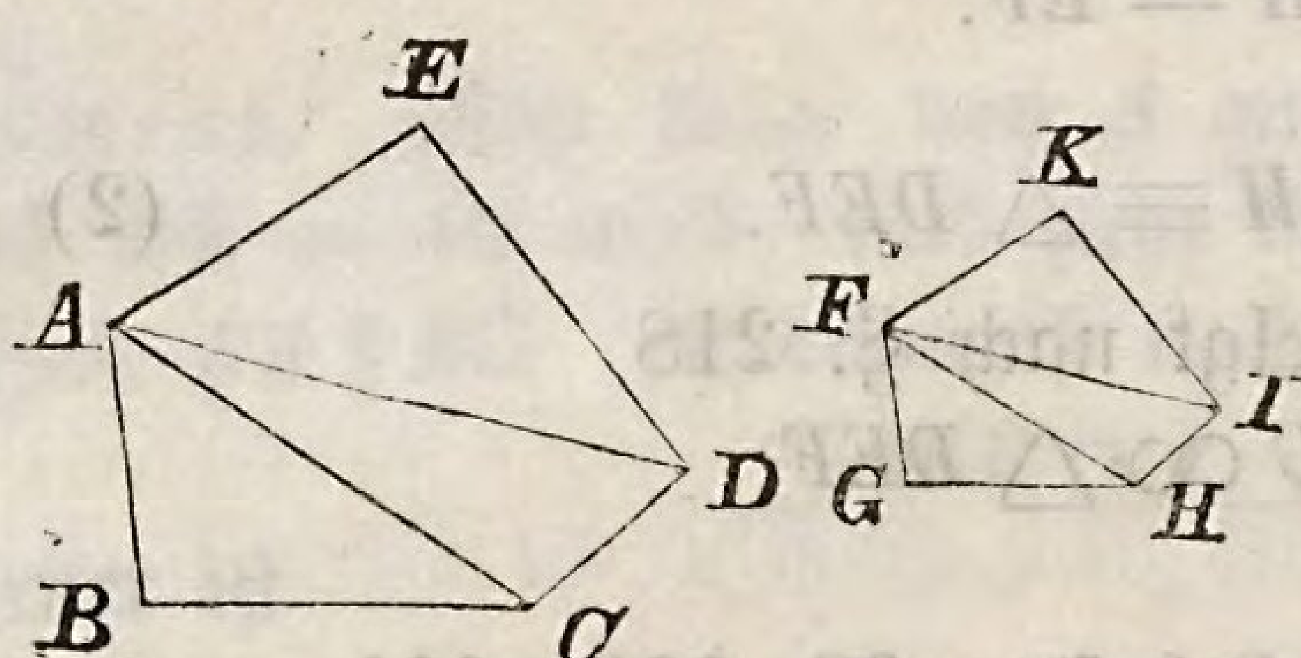
In beiden Polygonen stehen **zweitens** alle Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen, weil sie Seiten ähnlicher Dreiecke sind, welche sämmtlich beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen.

Folglich sind nach §. 217 beide Polygone ähnlich, w. z. b. w.

§. 225.

Lehrsatz. Ähnliche Polygone werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:
$ABCDE \sim FGHIK$.

Folgerung:
$\triangle ABC \sim \triangle FGH$
$\triangle ACD \sim \triangle FHI$
$\triangle ADE \sim \triangle FIK$.

Beweis. Wenn man von den beiden ähnlichen Polygonen $ABCDE$ und $FGHIK$ zuerst ein Dreieck, ABC und FGH, durch eine Diagonale abschneidet, so hat man wegen der Ähnlichkeit der beiden gegebenen Polygone

$$AB : FG = BC : GH$$
$$\angle ABC = \angle FGH$$

und daraus folgt nach §. 221

$$1) \quad \triangle ABC \sim \triangle FGH.$$

Aus dieser Ähnlichkeit der Dreiecke folgt ferner

$$BC : GH = AC : FH$$
$$\angle BCA = \angle GHF$$

und daraus

$$AC : FH = CD : HI$$
$$\angle ACD = \angle FHI$$

folglich hat man nach §. 221, indem man ein zweites Dreieck, ACD und FHI, durch eine zweite Diagonale abschneidet

$$2) \quad \triangle ACD \sim \triangle FHI.$$

Ebenso kann man fortfahren zu beweisen

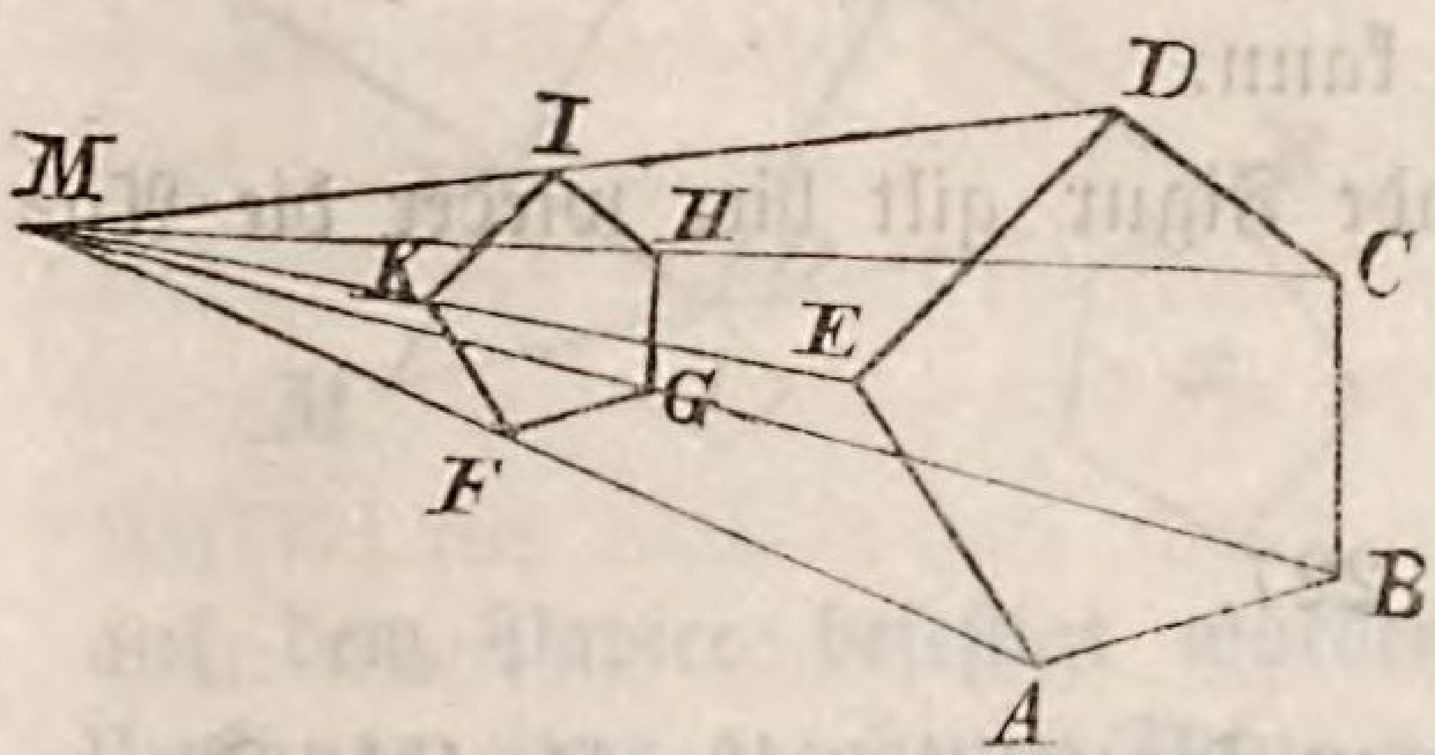
$$3) \quad \triangle ADE \sim \triangle FIK$$

u. s. w., wenn die Reihe der Dreiecke noch größer gewesen wäre.

§. 226.

Lehrsatz. Wenn zwei Figuren so in ein Strahlensystem gelegt werden können, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden, so sind die Figuren ähnlich.

Fig. 142.



Voraussetzung:
$MA : MF = MB : MG = MC : MH$
$= MD : MI = ME : MK.$

Folgerung:
$ABCDE \sim FGHIK.$

Beweis. Aus

$MA : MF = MB : MG$ folgt $AB \parallel FG$ (§. 209)
$MB : MG = MC : MH$ „ $BC \parallel GH$
$MC : MH = MD : MI$ „ $CD \parallel HI$
$MD : MI = ME : MK$ „ $DE \parallel IK$
$MA : MF = ME : MK$ „ $AE \parallel FK$,

d. h. alle gleichliegenden Seiten der beiden gegebenen Figuren sind parallel. Hieraus kann man weiter schließen:

1) Aus $AB \parallel FG$ folgt $\angle MBA = \angle MGF$ (§. 41)
und aus $BC \parallel GH$ „ $\angle MBC = \angle MGH$,

und die Addition beider Gleichungen giebt

$$\angle ABC = \angle FGH.$$

Ebenso kann man, durch Addition oder Subtraction, gleicher Winkel, die Gleichheit aller übrigen gleichliegenden Winkel der beiden Figuren beweisen.

2) Aus $AB \parallel FG$ folgt $MB : MG = AB : FG$ (§. 210)
und aus $BC \parallel GH$ „ $MB : MG = BC : GH$,

und diese beiden Proportionen geben

$$AB : FG = BC : GH.$$

Ebenso kann man beweisen, daß auch alle übrigen Seiten der beiden Figuren beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen.

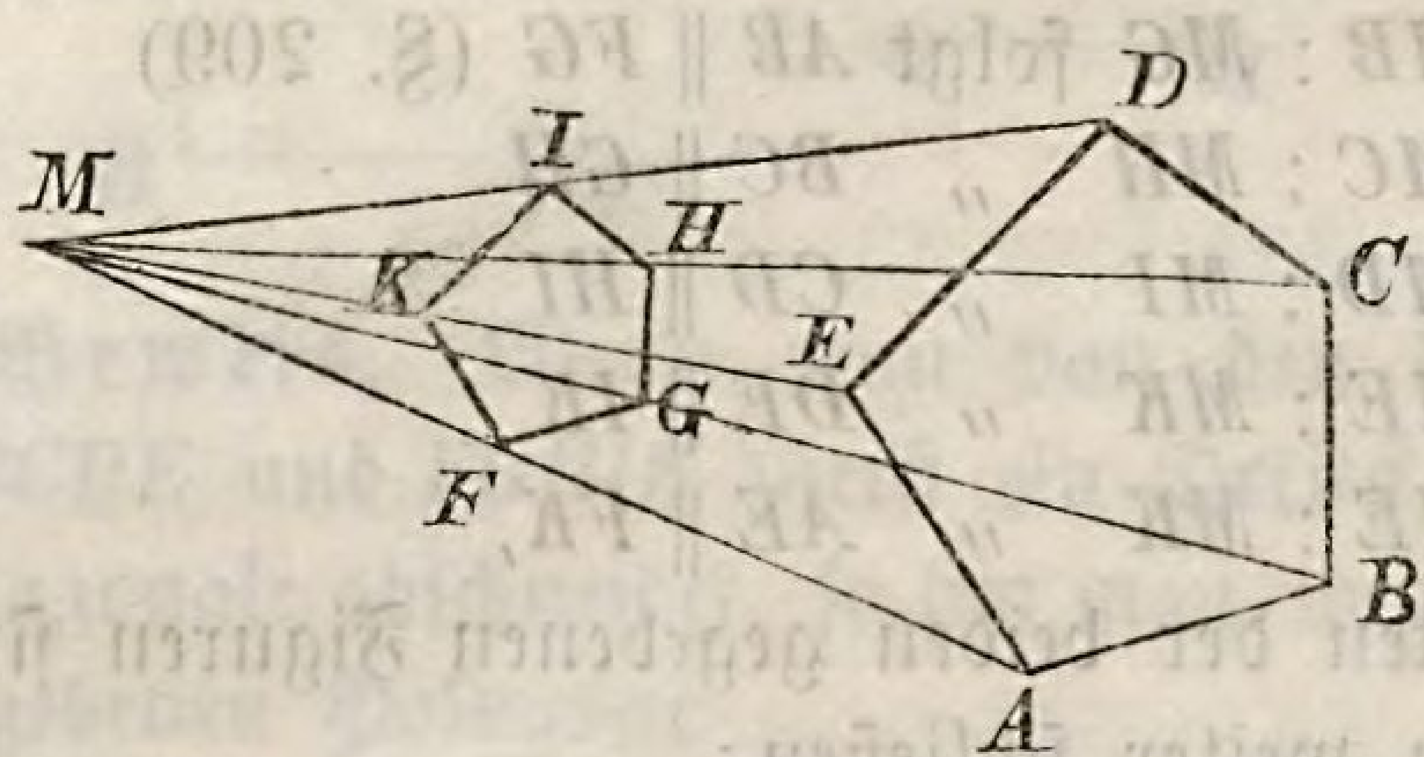
Aus 1) und 2) endlich folgt nach §. 217, daß die beiden gegebenen Figuren ähnlich, sind, w. z. b. w.

Anmerkung. Eine ausführliche Betrachtung der Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren, welche hier nicht gegeben werden kann, macht es nöthig, den vorstehenden Satz als Erklärung der Ähnlichkeit zum Grunde zu legen. Diese Erklärung hat alsdann vor der obigen des §. 217 (welche man dem Euklides verdankt) den Vorzug, daß sie nicht allein auf krummlinige Figuren, sondern auch, in der Stereometrie, auf räumliche Gebilde jeder Art unmittelbar angewandt werden kann.

In Bezug auf die vorstehende Figur gilt hier wieder die Anmerkung zu §. 204.

§. 227.

Aufgabe. Zu einer gegebenen Figur eine ihr ähnliche Figur zu zeichnen.



Gegeben: Figur *ABCDE*.

Gesucht: Eine ihr ähnliche Figur.

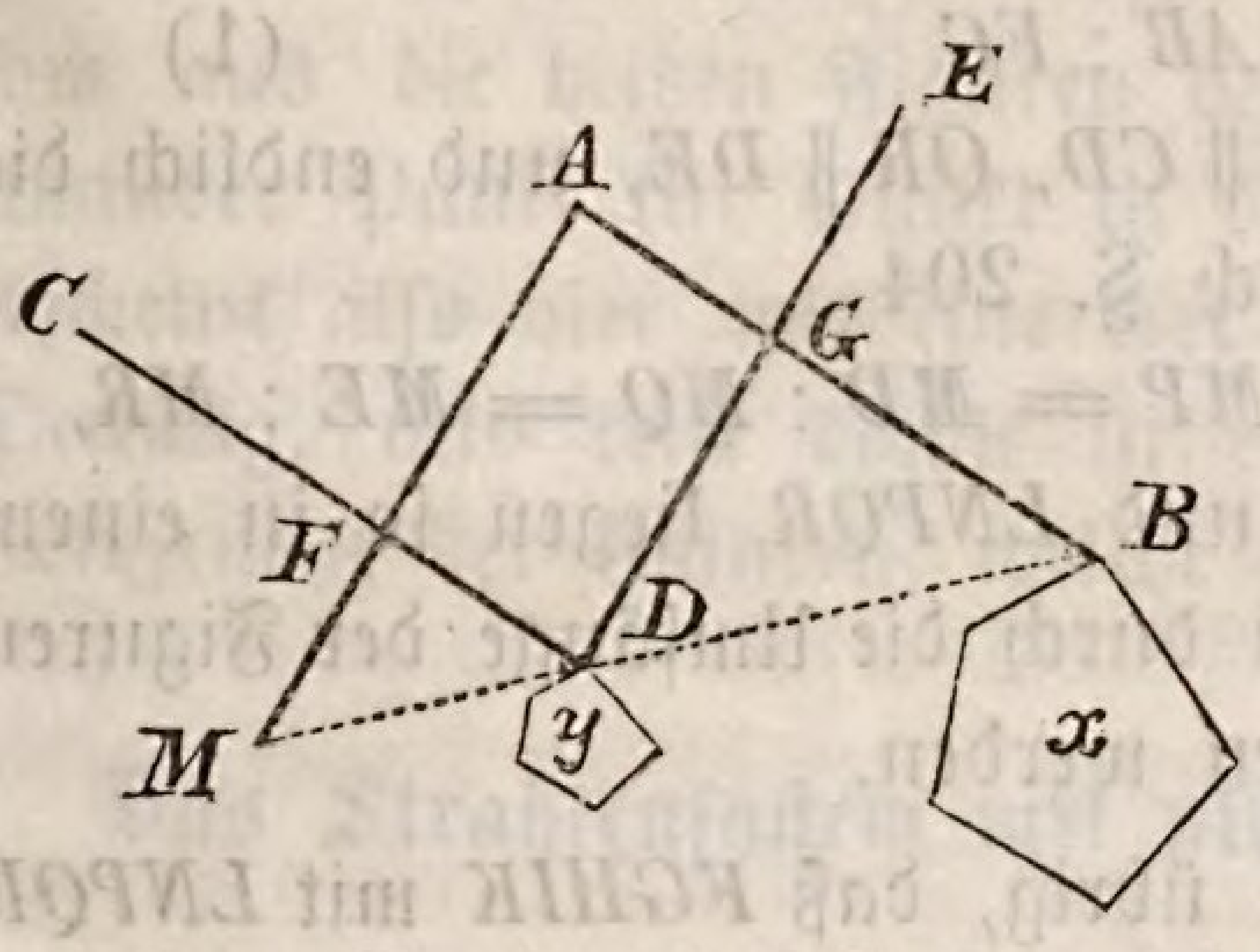
Construction. Man wähle einen beliebigen Punkt *M* und ziehe aus diesem Punkte Strahlen *MA*, *MB*, *MC*, *MD*, *ME*, nach allen Eckpunkten der gegebenen Figur. Auf dem Strahle *MA* nehme man einen Punkt *F* so an, daß das Verhältniß $MA : MF$ gleich demjenigen Verhältnisse wird, welches die Seiten der gegebenen zu den Seiten der gesuchten Figur haben sollen; ziehe darauf $FG \parallel AB$, $GH \parallel BC$, $HI \parallel CD$, $IK \parallel DE$, und endlich die gerade Linie *AK*. Alsdann ist *FGHIK* die gesuchte Figur, welche der gegebenen *ABCDE* ähnlich ist.

Der Beweis beruhet in dem vorigen Lehrsatze.

Die Wahl des Punkts *M* ist vollkommen willkürlich. Man kann ihn sowohl außerhalb der gegebenen Figur (wie oben), als auch innerhalb derselben, oder in einer ihrer Seiten, oder in einem ihrer Eckpunkte annehmen. Auch den Punkt *F* kann man nicht nur in *MA* selbst (wie oben), sondern auch in der Verlängerung von *MA* über *M* hinaus, auf die obige Weise festlegen.

Anmerkung. Auf dieser Aufgabe beruhet der sogenannte Storchschnabel oder Pantograph, ein Instrument, welches dazu dient eine gegebene Figur in einem gegebenen Verhältnisse zu verjüngen. Derselbe besteht, Fig. 143, aus vier gleichlangen Linealen *MA*, *AB*, *CD*, *DE*, welche in *A*, *F*, *D*, *G* so mit einander verbunden sind, daß *AFDG* ein verschiebbares Parallelogramm bildet. Die Punkte *M*, *D*, *B* liegen alsdann in Einer geraden Linie. Wenn nun der Punkt *M* auf dem Papier befestigt worden ist und der Punkt *B* auf dem Umfange einer gegebenen Figur *x* herumgeführt wird, so beschreibt der Punkt *D* eine der gegebenen ähnliche Figur *y*. Das Verhältniß der Seiten dieser beiden Figuren ist gleich dem Verhältniß *MA* : *MF*, d. h. die gegebene Figur wird in dem Verhältnisse *MA* : *MF* verjüngt.

Fig. 143.



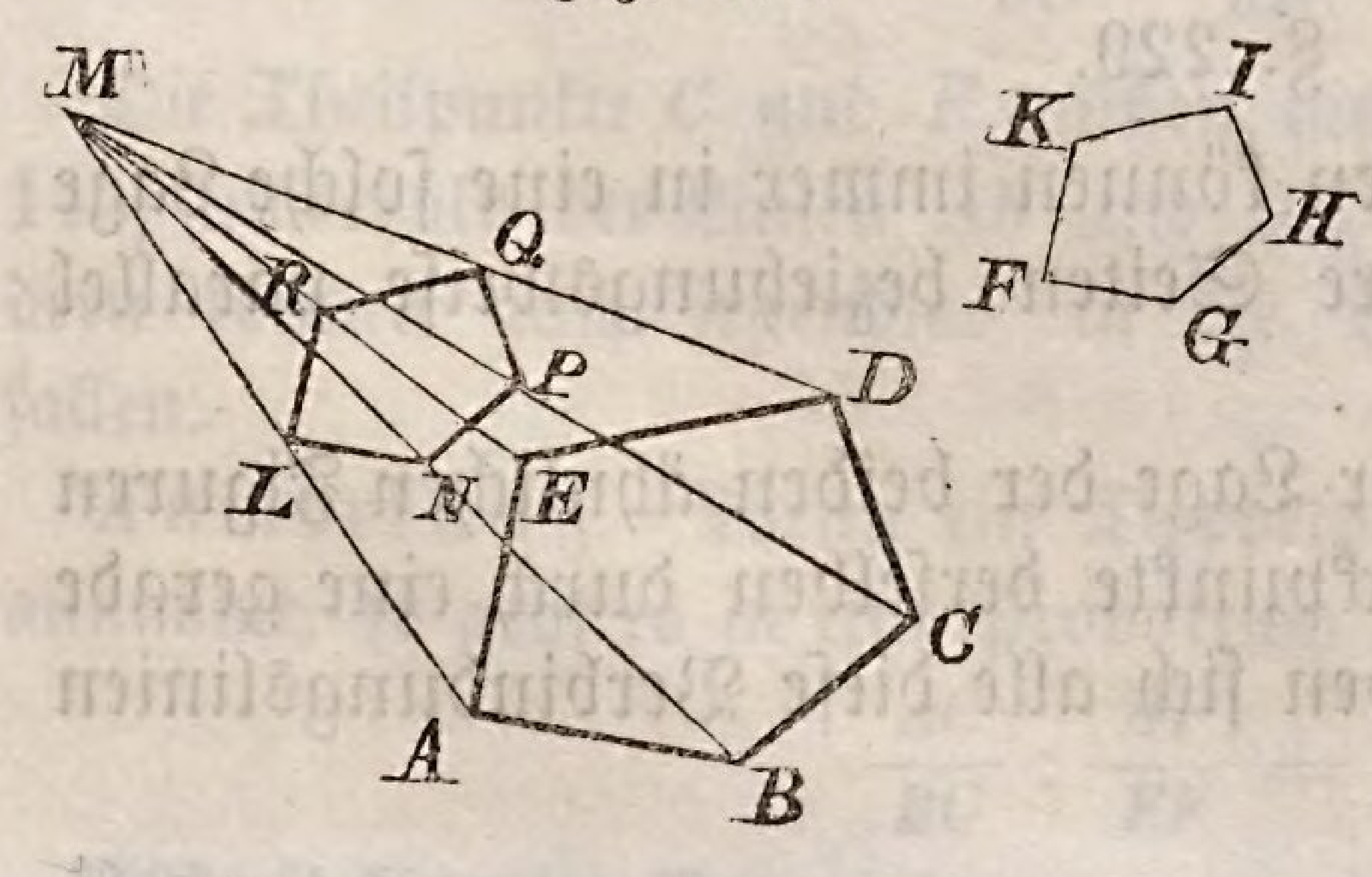
Auf derselben Aufgabe beruhet, bei dem topographischen Aufnehmen vermittelst des Meßtisches, das sogenannte Aufnehmen aus Einem Punkte, worüber die praktische Geometrie weitere Auskunft giebt.

§. 228.

Lehrsatz. Ähnliche Figuren können immer so in ein Strahlensystem gelegt werden, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 226.)

Fig. 144.



Voraussetzung:
ABCDE ∾ *FGHIK*.

Folgerung:
s. d. Voraussetz. in §. 226.

Beweis. Man wähle einen beliebigen Punkt M und ziehe aus diesem Punkte Strahlen MA, MB, MC, MD, ME nach allen Eckpunkten der gegebenen Figur $ABCDE$. Auf dem Strahle MA nehme man einen Punkt L so an, daß

$$MA : ML = AB : FG \qquad (1)$$

wird, ziehe $LN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $PQ \parallel CD$, $QR \parallel DE$, und endlich die gerade Linie LR. Alsdann ist nach §. 204

$$MA : ML = MB : MN = MC : MP = MD : MQ = ME : MR,$$

d. h. die beiden Figuren $ABCDE$ und $LNPQR$ liegen so in einem Strahlensystem, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden.

Es bleibt nun noch zu beweisen übrig, daß $FGHIK$ mit $LNPQR$ zur Deckung gebracht werden kann. Zu dem Ende hat man nach §. 210

$$MA : ML = AB : LN \qquad (2)$$

und aus (1) und (2) folgt nach §. 207

$$FG = LN.$$

Ferner hat man aus §. 226

$$ABCDE \sim LNPQR,$$

und wenn man hiezu die Voraussetzung nimmt, so folgt nach §. 218

$$FGHIK \sim LNPQR.$$

Die beiden Figuren $FGHIK$ und $LNPQR$ sind mithin ähnlich, und zugleich hat das Verhältniß von einem Paar gleichliegender Seiten, $FG : LN$, den Werth Eins; oder es ist (s. §. 217)

$$FGHIK \cong LNPQR.$$

Man kann also $FGHIK$ an die Stelle von $LNPQR$ legen, d. h. man kann $FGHIK$ und $ABCDE$ so in ein Strahlensystem legen, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden, w. z. b. w.

§. 229.

Zusatz. Ähnliche Figuren können immer in eine solche Lage gebracht werden, daß ihre Seiten beziehungsweise parallel liegen.

Und wenn man in dieser Lage der beiden ähnlichen Figuren jede zwei gleichliegenden Eckpunkte derselben durch eine gerade Linie verbindet, so schneiden sich alle diese Verbindungslinien in Einem Punkte.

Der zuletzt genannte Punkt, welcher dem Strahlenpunkte M in den Figg. 142 und 143 entspricht, wird auch der Ähnlichkeitspunkt der beiden Figuren, in der vorausgesetzten Lage derselben, genannt. Wenn man in diesen Punkt das Auge bringt und von ihm aus die beiden Figuren betrachtet, so scheinen diese Figuren einander Punkt für Punkt zu decken; die Ähnlichkeit der Figuren erscheint also hier wie eine Art von optischer oder perspectivischer Deckung, und tritt damit in ein coordinirtes Verhältniß zu der Congruenz der Figuren, welche eine wirkliche Deckung fordert.

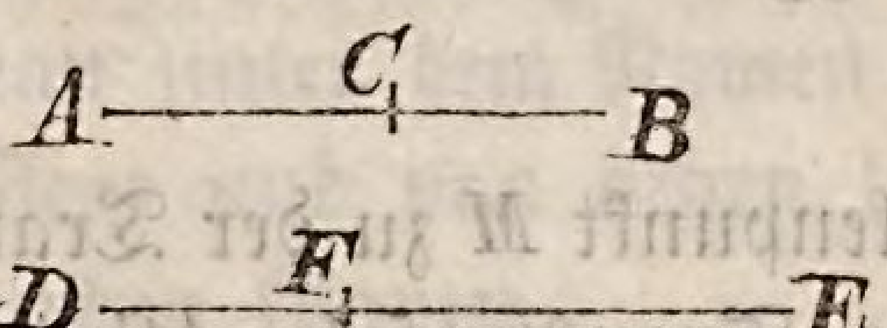
Das Strahlensystem mit nicht parallelen Transversalen.

§. 230.

Erklärung. Unter einem Doppelverhältniß von Linien versteht man das geometrische Verhältniß zweier Verhältnisse unter Linien.

Der Gebrauch des Doppelverhältnisses ist folgender. Es sei AB, Fig. 145, eine gerade Linie, welche durch den Punkt C in die beiden Theile AC und BC zerlegt wird, und ebenso sei DE eine gerade Linie, welche durch den Punkt F in die beiden Theile DF und EF zerfällt. Alsdann sind $AC : BC$ und $DF : EF$ die Verhältnisse unter den Theilen dieser Linien, und wenn man das geometrische Verhältniß dieser beiden Verhältnisse bildet, so hat man das Doppelverhältniß

Fig. 145.



$$(AC : BC) : (DF : EF)$$

oder wie man hier bequemer schreibt

$$\frac{AC}{BC} : \frac{DF}{EF}.$$

Die Theilpunkte C und F müssen nicht nothwendig, wie in Fig. 145, innerhalb der Linien AB und DE angenommen werden, sondern können auch irgendwo in die Verlängerung dieser Linien fallen.

Anmerkung. Wenn ein Doppelverhältniß den Werth Eins annimmt, so geht es in eine Proportion über. Z. B. wenn man hat

$$\frac{AC}{BC} : \frac{DF}{EF} = 1$$

und folgt sogleich

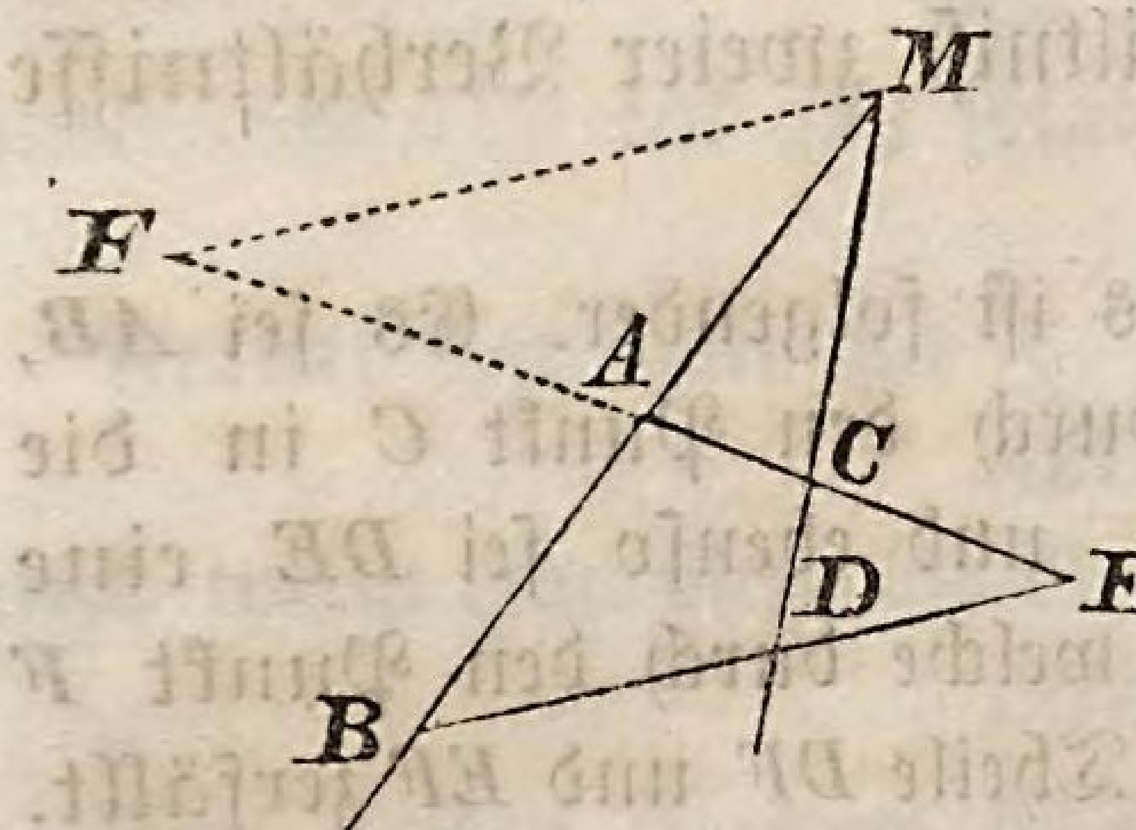
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

d. i. $AC : BC = DF : EF$.

§. 231.

Lehrsatz des Menelaus. Wenn zwei Strahlen von zwei nicht parallelen Transversalen geschnitten werden, so daß die Abschnitte, welche die eine dieser Transversalen auf den Strahlen hervorbringt, durch die andere Transversale in je zwei Theile zerfallen, so ist das Doppelverhältniß unter diesen Theilen gleich dem umgekehrten Verhältniß unter den Theilen der ersten Transversale.

Fig. 146.



Voraussetzung:

AC theilt die Abschnitte MB und MD.

Folgerung:

$$\frac{MA}{AB} : \frac{MC}{CD} = DE : BE.$$

Beweis. Man ziehe durch den Strahlenpunkt M zu der Transversale BD die Parallele MF, welche die Transversale AC in F trifft. Alsdann ist nach §. 210, indem man A wie Strahlenpunkt ansieht

$$MA : AB = FM : BE$$

und ebenso, indem man C wie Strahlenpunkt ansieht

$$MC : CD = FM : DE;$$

folglich

$$\frac{MA}{AB} : \frac{MC}{CD} = \frac{FM}{BE} : \frac{FM}{DE}.$$

Aber aus der Arithmetik §. 149 folgt

$$\frac{FM}{BE} : \frac{FM}{DE} = DE : BE$$

mithin ist

$$\frac{MA}{AB} : \frac{MC}{CD} = DE : BE$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Man hätte im Lehrsatze, nach Vertauschung der Transversalen AC und BD, auch schreiben können

$$\frac{MB}{BA} : \frac{MD}{DC} = CE : AE.$$

In diesem Falle theilt BD die Abschnitte MA und MC in den Punkten B und D, welche in den Verlängerungen dieser Abschnitte liegen (s. d. vorigen §).

In derselben Figur kann man übrigens auch jeden der fünf anderen Schnittpunkte A, B, C, D, E wie Strahlenpunkt ansehen, ohne daß der Lehrsatz aufhört richtig zu sein. So findet man z. B. wenn B Strahlpunkt ist

$$\frac{BA}{AM} : \frac{BE}{ED} = DC : MC$$

$$\text{und } \frac{BM}{MA} : \frac{BD}{DE} = EC : AC.$$

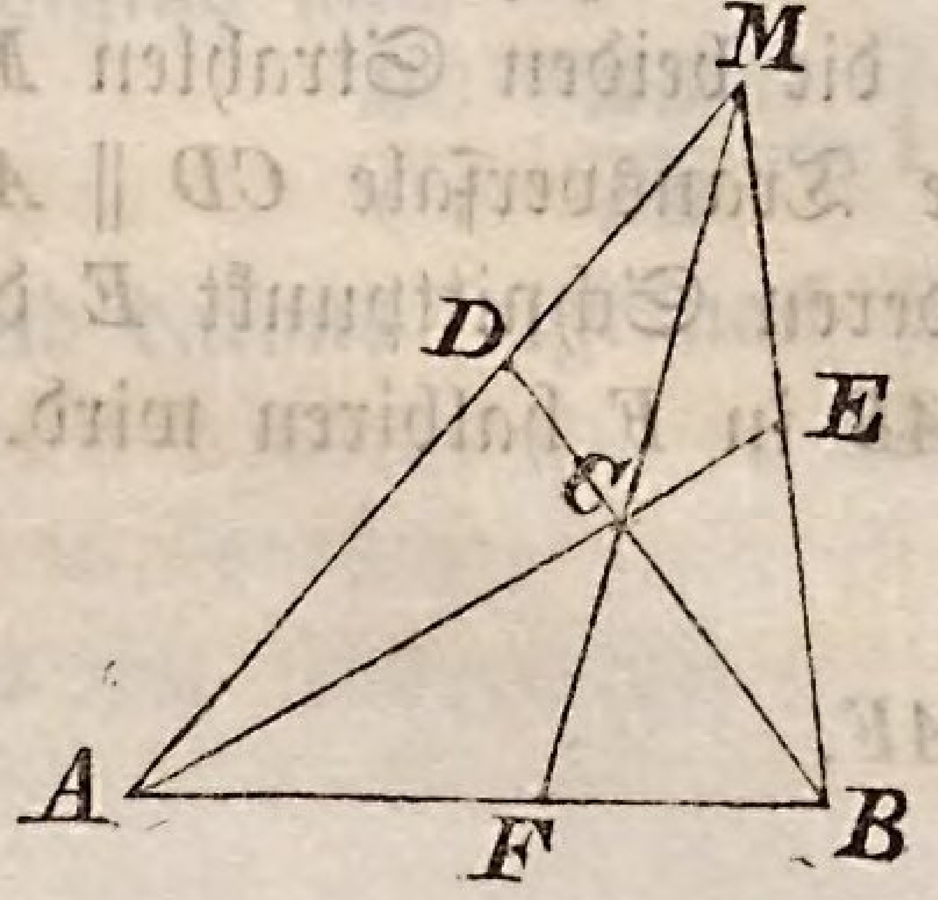
Auf diese Weise kann der vorstehende Lehrsatz in derselben Figur durch zwölf verschiedene Proportionen ausgedrückt werden.

Der hier bewiesene Lehrsatz kommt in den Elementen des Euklides nicht vor. Er findet sich zuerst in der Sphärik des Menelaus, welcher zu Alexandria um das Jahr 80 nach C. G. schrieb, und bildet den Ausgangspunkt für eine Reihe von Untersuchungen, die man unter dem Namen der „neueren Geometrie" zusammenzufassen pflegt und von denen hier nur die ersten Anfangsgründe gegeben werden können.

§. 232.

Lehrsatz. Wenn drei Strahlen die Eckpunkte eines Dreiecks treffen, so werden sie durch die diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten oder die Verlängerungen derselben so geschnitten, daß das Doppelverhältniß unter den Theilen je zweier Strahlen gleich dem umgekehrten Verhältniß unter den Theilen der verbindenden Dreiecksseite ist.

Fig. 147.



Voraussetzung:
$\triangle ABC$ getroffen von den Strahlen MA, MB, MC.

Folgerung:

$$\frac{MD}{DA} : \frac{ME}{EB} = BF : AF.$$

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatze hat man

$$\frac{MD}{DA} : \frac{MC}{CF} = FB : AB$$

$$\frac{MC}{CF} : \frac{ME}{EB} = BA : FA$$

und aus beiden Proportionen folgt

$$\frac{MD}{DA} : \frac{ME}{EB} = BF : AF$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Im Lehrsatze hätte man auch schreiben können

$$\frac{MD}{DA} : \frac{MF}{FC} = CE : AE$$

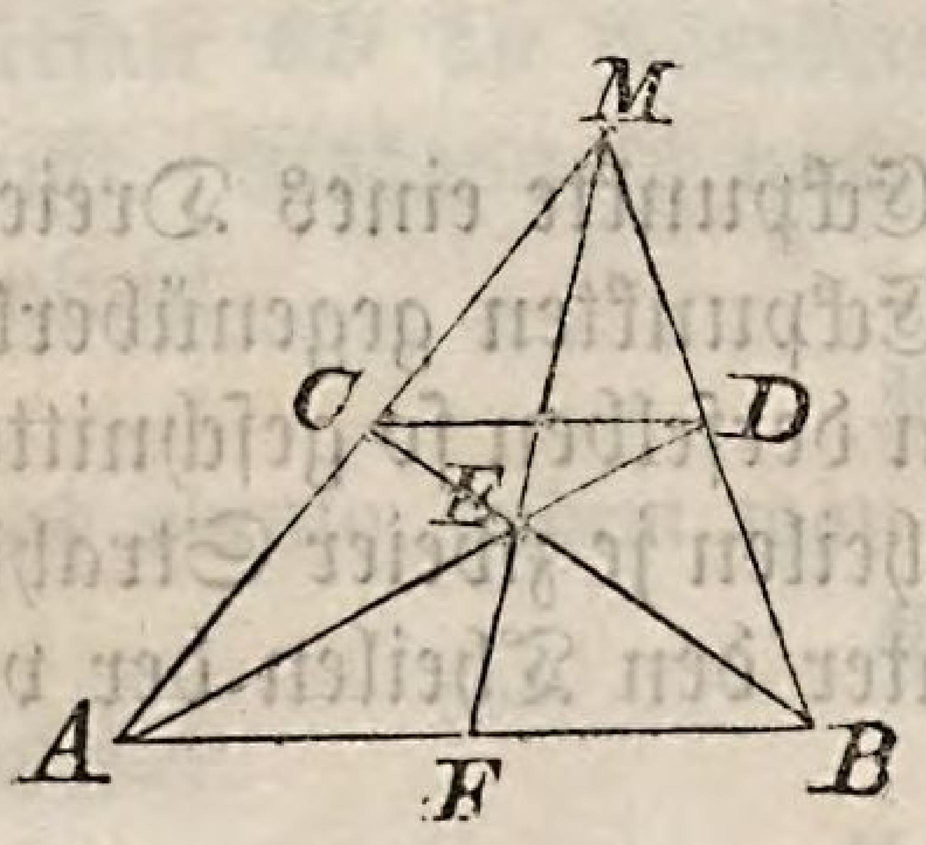
$$\text{und } \frac{ME}{EB} : \frac{MF}{FC} = CD : BD.$$

Ferner kann man auch jeden der drei Punkte *A*, *B*, *C* wie Strahlenpunkt ansehen, so daß mithin in derselben Figur der vorstehende Lehrsatz durch zwölf verschiedene Proportionen ausgedrückt werden kann.

§. 233.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie ohne Gebrauch des Zirkels in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 148.



Gegeben: Linie *AB*.

Gesucht: $\frac{1}{2}$ *AB*.

Construction. Man wähle außerhalb der gegebenen geraden Linie *AB* einen Punkt *M*, ziehe aus *M* die beiden Strahlen *MA* und *MB*, lege durch diese Strahlen die Transversale *CD* || *AB*, ziehe *AD* und *BC*, und endlich durch deren Schnittpunkt *E* den Strahl *ME*, welcher die gegebene Linie *AB* in *F* halbiren wird.

Beweis. Nach §. 232 ist

$$\frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = BF : AF.$$

Ferner ist nach §. 205 aus der Construction

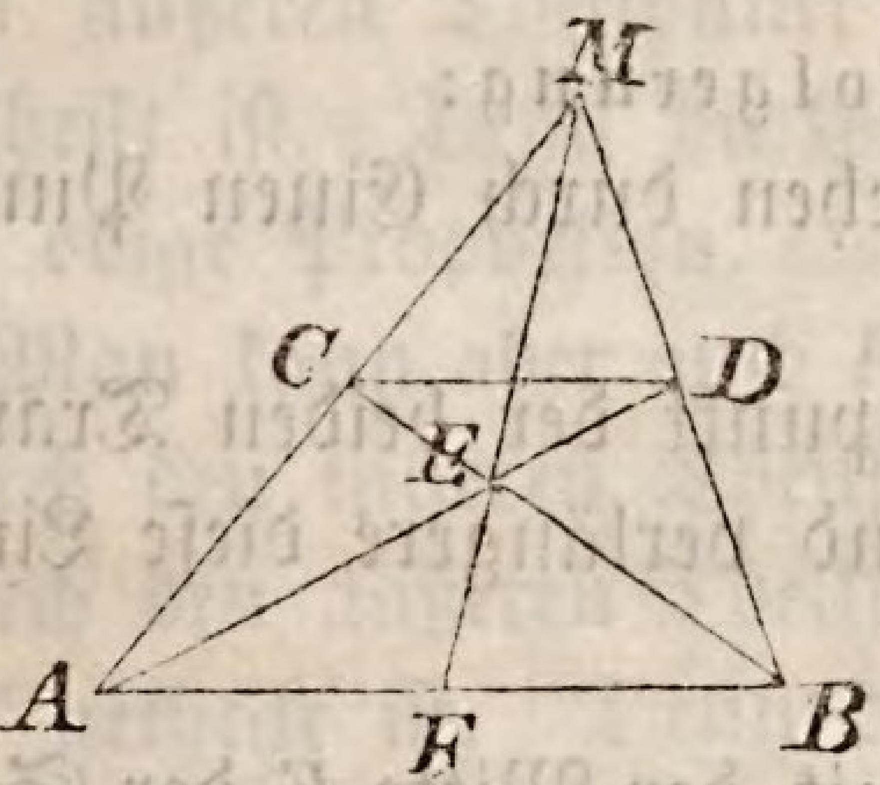
$$MC : CA = MD : DB, \text{ d. i. } \frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = 1.$$

Folglich auch

$$BF : AF = 1, \quad \text{d. i. } BF = AF, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 234.

Aufgabe. Zu einer gegebenen geraden Linie durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu legen.



Gegeben:

Linie AB und Punkt C.

Gesucht:

Parallele zu AB durch C.

Construction. Man trage auf der gegebenen geraden Linie AB einen willkürlichen Theil AF zweimal ab, $AF = FB$, verbinde A mit C durch die gerade Linie AC, wähle in der Verlängerung dieser Linie einen Punkt M, aus welchem man die Strahlen MF und MB zieht, verbinde B mit C, lege durch den Schnittpunkt E die Transversale AE, welche MB in D schneidet, und endlich durch C und D die Transversale CD, welche die gesuchte Parallele sein wird.

Beweis. Nach §. 232 ist

$$\frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = BF : AF.$$

Ferner ist nach der Construction

$$BF = AF, \quad \text{d. i. } BF : AF = 1.$$

Folglich auch

$$\frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = 1, \quad \text{d. i. } MC : CA = MD : DB,$$

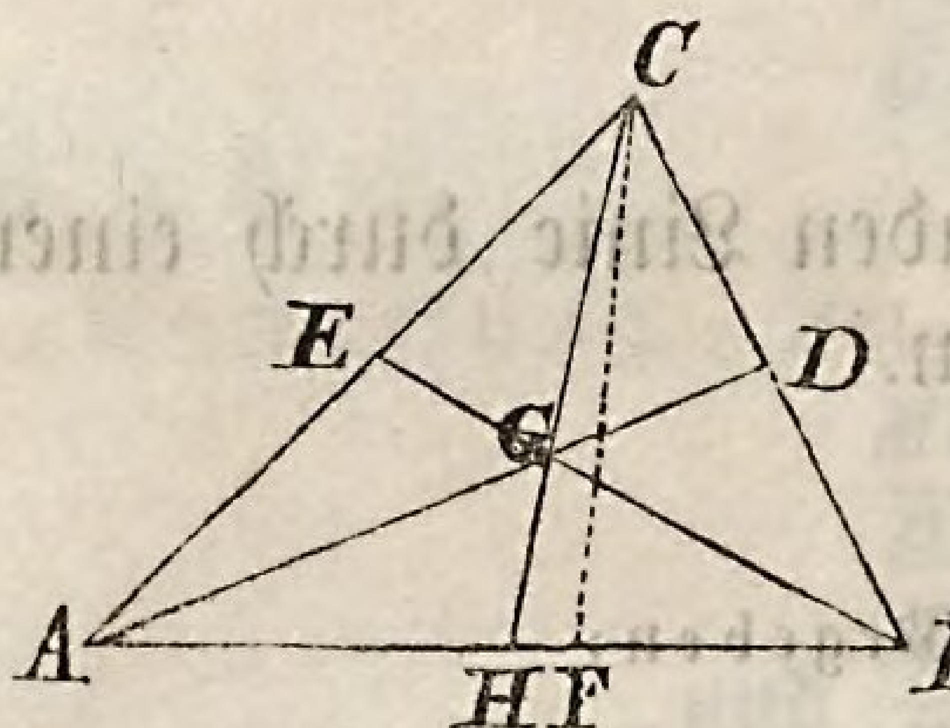
und daraus folgt nach §. 209

$$CD \parallel AB, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 235.

Lehrsatz. Die Transversalen aus den drei Eckpunkten eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 149.



Voraussetzung:

$AF = FB$

$BD = DC$

$AE = EC.$

Folgerung:

AD, BE, CF gehen durch Einen Punkt.

Beweis. Es sei G der Durchschnittspunkt der beiden Transversalen AD und BE. Man ziehe CG und verlängere diese Linie, bis sie die Seite AB in H trifft.

Gesetzt nun, der Punkt H falle nicht mit der Mitte F der Seite AB zusammen. Alsdann hat man §. 232, indem man C wie Strahlenpunkt ansieht

$$\frac{CE}{EA} : \frac{CD}{DB} = BH : AH.$$

Aber vermöge der Voraussetzung ist $\frac{CE}{EA} = 1$ und $\frac{CD}{DB} = 1$, folglich auch

$$BH : AH = 1, \text{ d. i. } BH = AH,$$

und dieses widerspricht der Voraussetzung $AF = FB$.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn H mit F zusammenfällt. Also gehen die drei Transversalen AD, BE und CF durch denselben Punkt G, w. z. b. w.

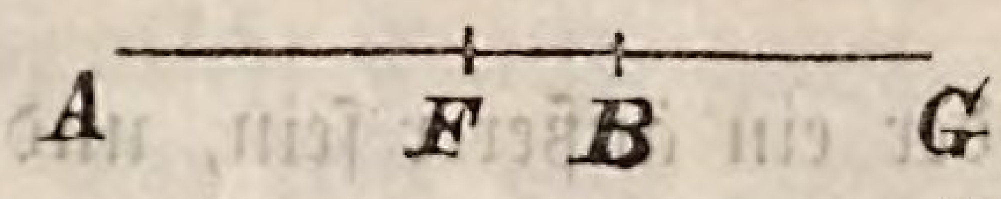
Anmerkung. Die vier Punkte des Dreiecks, welche in den §§. 183, 184, 186 und 235 nachgewiesen worden sind, werden die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks genannt.

§. 236.

Erklärung. Vier Punkte einer geraden Linie werden harmonische Punkte genannt, wenn sie diese gerade Linie so zerlegen, daß der erste Theil zum zweiten sich verhält wie die ganze Linie zum dritten Theile.

Der erste und dritte Punkt, so wie der zweite und vierte Punkt werden einander zugeordnete Punkte genannt.

Fig. 150.



So sind in Fig. 150 die Punkte A, F, B, G vier harmonische Punkte, wenn die Proportion stattfindet

$$AF : FB = AG : GB.$$

Die Punkte A und B, so wie F und G, sind einander zugeordnete Punkte.

Man kann AB wie eine gegebene Linie ansehen, welche durch den inneren Theilpunkt F in dem Verhältnisse $AF : FB$, und durch den äußeren Theilpunkt G in dem gleichen Verhältnisse $AG : GB$ getheilt ist. Denn die Gleichsetzung dieser Verhältnisse giebt wieder die obige Proportion.

Man kann aber auch FG wie eine gegebene Linie ansehen, welche durch den inneren Theilpunkt B in dem Verhältnisse $GB : BF$, und durch den äußeren Theilpunkt A in dem gleichen Verhältnisse $GA : AF$ getheilt ist. Denn die Gleichsetzung dieser Verhältnisse giebt

$$GB : BF = GA : AF$$

und hieraus entspringt durch Vertauschung der äußeren Glieder unter einander (Arithmetik §. 150) wieder die obige Proportion.

Nach §. 215 läßt sich von vier harmonischen Punkten überdies noch aussagen, daß sie eine gerade Linie so zerlegen, daß das Rechteck aus den äußeren Theilen gleich dem Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittleren Theile wird. Denn die Proportion

$$AF : FB = AG : GB$$

giebt

$$\square\, AF \,.\, GB = \square\, AG \,.\, FB.$$

Der mittlere Theil ist immer kleiner als jeder der beiden äußeren Theile.

Anmerkung. Der Zusammenhang der harmonischen Punkte mit der harmonischen Proportion (Arithm. §. 155) ist folgender. Die Proportion

$$AF : FB = AG : GB$$

kann man nach Fig. 150 auch schreiben

$$(AG - FG) : (FG - BG) = AG : BG;$$

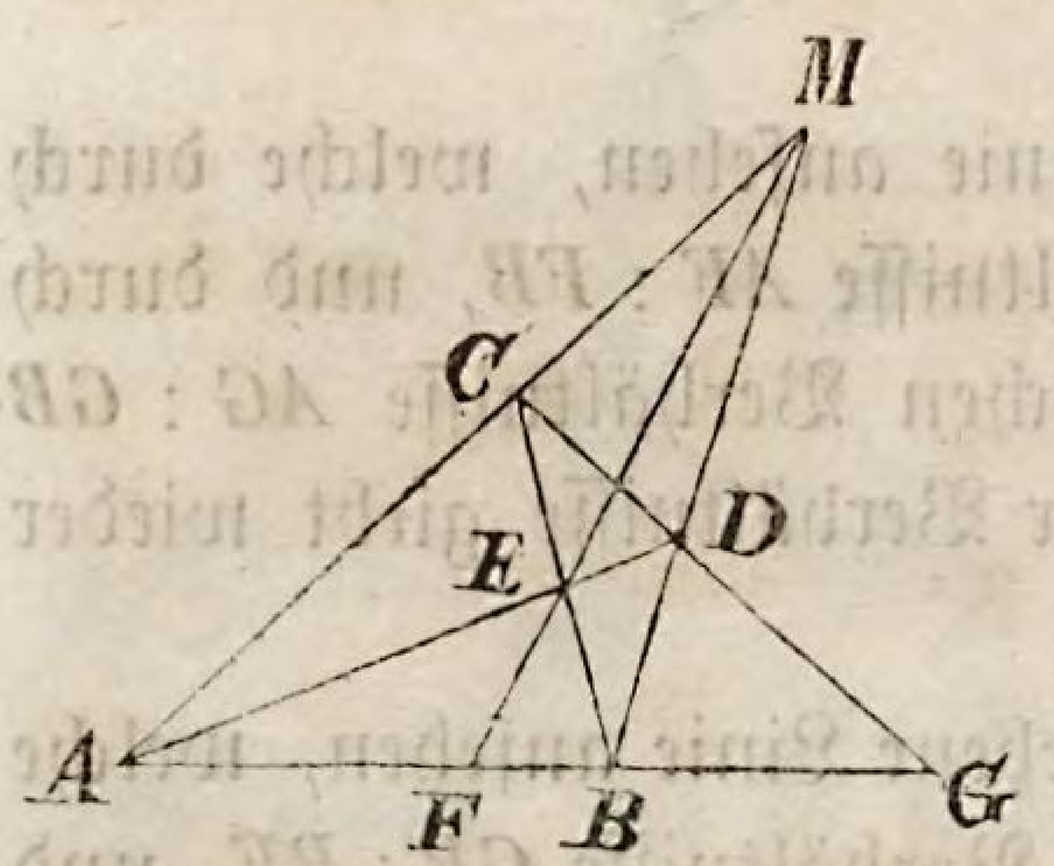
und wenn man die Linien AG, FG, BG durch einerlei Einheit gemessen und in Zahlen ausgedrückt annimmt, so erkennt man hier unmittelbar eine stetige harmonische Proportion zwischen den drei Gliedern AG, FG und BG.

§. 237.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu suchen.

Der gesuchte Punkt kann ein innerer oder ein äußerer sein, und daher sind zwei Fälle zu betrachten.

Fig. 151.



1) Gegeben A, B, G.
Gesucht F.

2) Gegeben A, F, B.
Gesucht G.

Construction. 1) Aus dem willkürlich gewählten Punkte M ziehe man die beiden Strahlen MA und MB, schneide dieselben aus G durch die Transversale CD, ziehe AD und BC, und durch den Durchschnittspunkt E dieser beiden Linien den Strahl ME, welcher den gesuchten Punkt F ergiebt.

2) Aus dem willkürlich gewählten Punkt M ziehe man die drei Strahlen MA, MF und MB, schneide die beiden ersten aus B durch die Transversale EC und die beiden letzten aus A durch die Transversale ED, und ziehe CD, welche Linie verlängert den gesuchten Punkt G ergiebt.

Beweis. Nach §. 232 ist

$$\frac{MD}{DB} : \frac{MC}{CA} = AF : BF$$

und nach §. 231

$$\frac{MD}{DB} : \frac{MC}{CA} = AG : BG$$

folglich

$$AF : FB = AG : GB$$

w. z. b. w.

Determination. Der gegebene Punkt F in 2) darf nicht in der Mitte von AB liegen. Denn wenn dieser Fall eintritt, so entsteht die Fig. 148, §. 234, und ein Punkt G kommt nicht zu Stande.

§. 238.

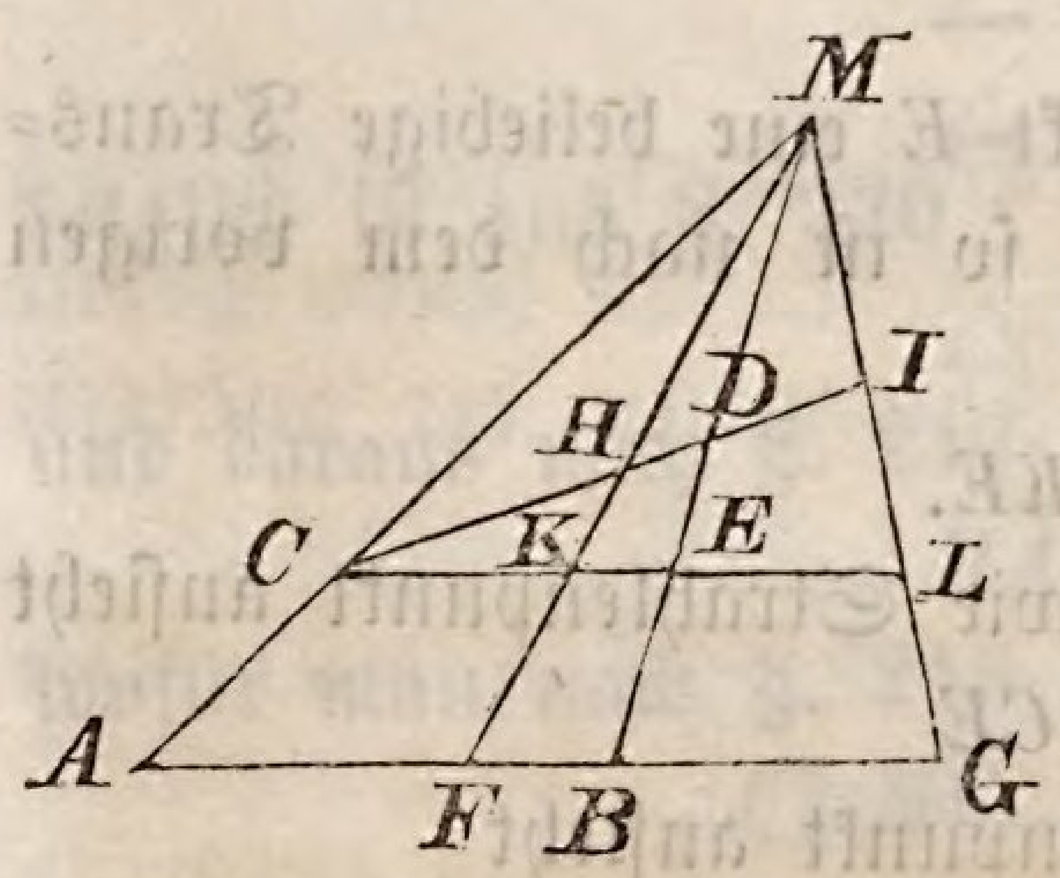
Erklärung. Vier Strahlen eines Strahlensystems werden harmonische Strahlen genannt, wenn sie durch vier harmonische Punkte gehen.

Der erste und dritte Strahl, so wie der zweite und vierte Strahl werden einander zugeordnete Strahlen genannt.

§. 239.

Lehrsatz. Jede Transversale, welche durch vier harmonische Strahlen geht, wird durch dieselben in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Fig. 152.



Voraussetzung:
$AF : FB = AG : GB.$

Folgerung:
$CH : HD = CI : ID.$

Beweis. Zieht man durch C eine Transversale $CL \parallel AG$, so kann aus §. 210 leicht bewiesen werden, daß die Abschnitte der Transversale CL unter sich dieselbe Proportion bilden wie die gleichliegenden Abschnitte von AG. Man hat also, in Folge der Voraussetzung,

$$CK : KE = CL : LE, \text{ d. i. } \frac{CK}{KE} = \frac{CL}{LE}.$$

Ferner ist aus §. 231, indem man C wie Strahlenpunkt ansieht

$$\frac{CH}{HD} : \frac{CK}{KE} = EM : DM$$

und ebenso

$$\frac{CI}{ID} : \frac{CL}{LE} = EM : DM;$$

und da in diesen beiden Proportionen das zweite, dritte und vierte Glied beziehungsweise gleich sind, so müssen auch die Anfangsglieder gleich sein; oder es ist

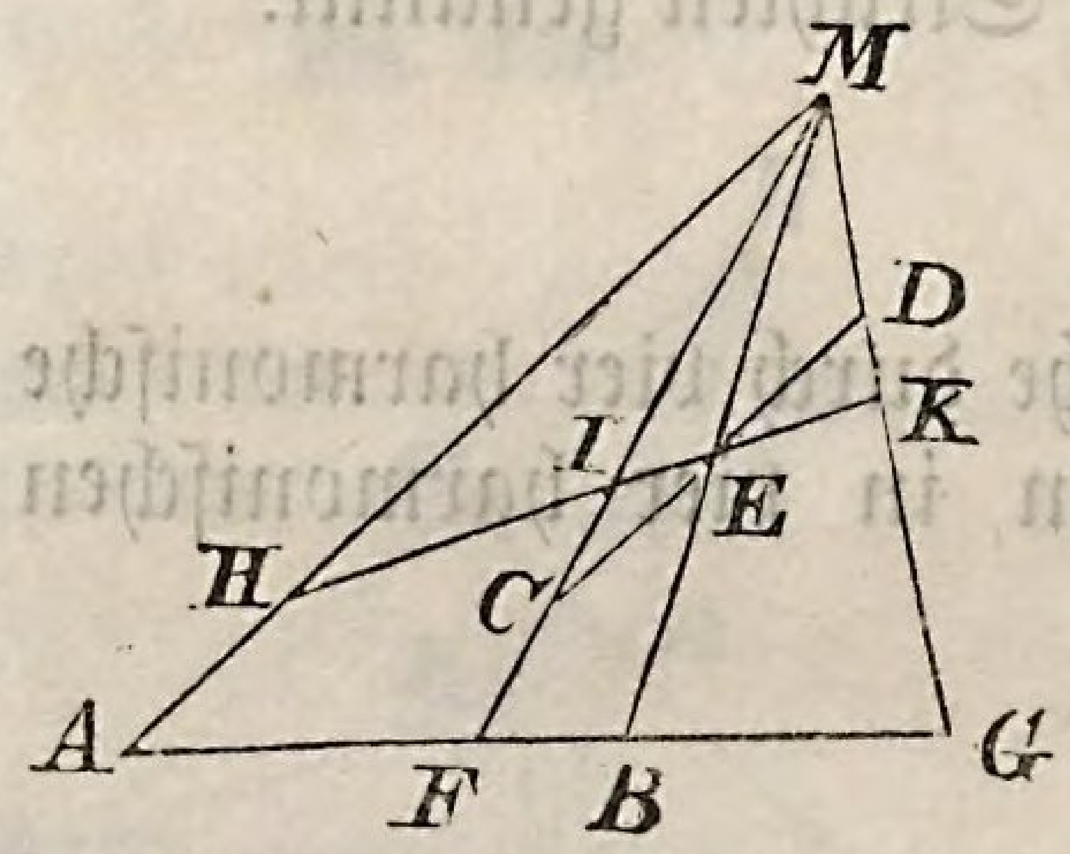
$$\frac{CH}{HD} = \frac{CI}{ID}, \text{ d. i. } CH : HD = CI : ID,$$

w. z. b. w.

§. 240.

Lehrsatz. Jede Transversale, welche einem von vier harmonischen Strahlen parallel ist, wird durch den ihm zugeordneten Strahl in zwei gleiche Theile getheilt.

Fig. 153.



Voraussetzung:

$AF : FB = AG : GB$

$CD \parallel AM.$

Folgerung:

$CE = ED.$

Beweis. Legt man durch den Punkt E eine beliebige Transversale HK durch die vier Strahlen, so ist nach dem vorigen Lehrsatze

$$HI : IE = HK : KE.$$

Ferner ist nach §. 210, indem man I wie Strahlenpunkt ansieht

$$HI : IE = HM : CE$$

und ebenso, indem man K wie Strahlenpunkt ansieht

$$HK : KE = HM : ED.$$

Hieraus schließt man, mit Rücksicht auf die obige Proportion, daß

$$HM : CE = HM : ED,$$

folglich ist

$$CE = ED$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz kann auch umgekehrt werden, und liefert in dieser Gestalt eine zweite Auflösung der Aufgabe §. 237, welche indessen hier übergangen wird.

Der Kreis in einem Strahlensystem.

§. 241.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen einen Kreis schneiden, so bilden die vier Abschnitte der Strahlen eine Proportion, deren innere Glieder die Abschnitte des einen Strahls und deren äußere Glieder die Abschnitte des anderen Strahls sind.

Oder: Das Rechteck aus den Abschnitten des einen Strahls ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten des anderen Strahls.

Fig. 154.

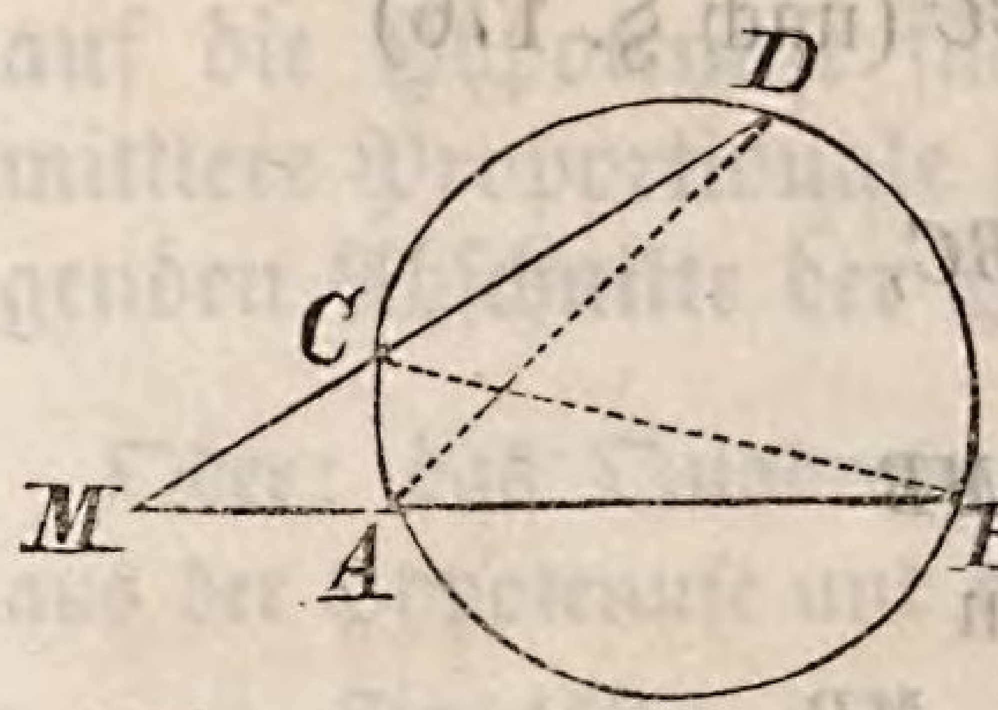
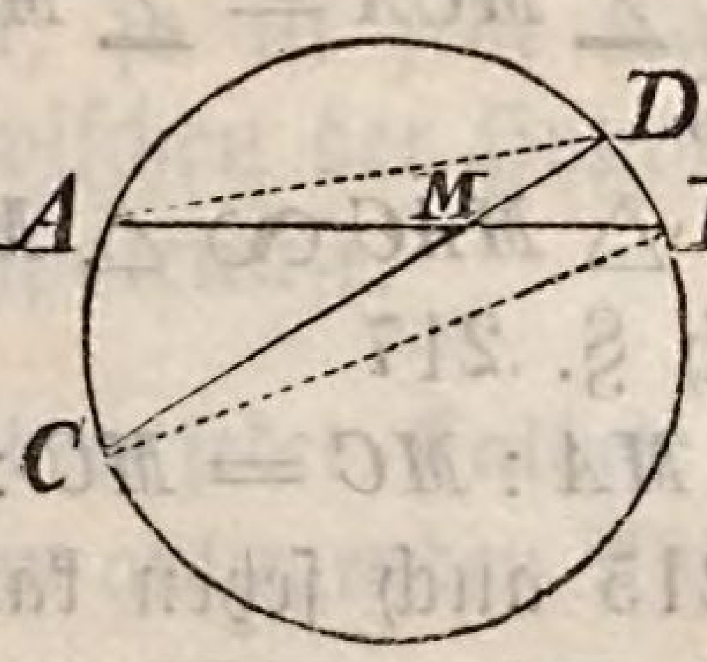


Fig. 155.



Voraussetzung: AB, CD sind Secanten.

Folgerung: $MA : MC = MD : MB$

oder $\square\; MC \,.\, MD = \square\; MA \,.\, MB$.

Beweis. Man ziehe die Sehnen AD und BC. Dadurch entstehen zwei Dreiecke MAD und MBC, in denen man hat

$$\angle AMD = \angle BMC$$
$$\angle MDA = \angle MBC \text{ (nach §. 176)}$$

folglich ist aus §. 220

$$\triangle MAD \sim \triangle MBC,$$

und daraus nach §. 217

$$MA : MC = MD : MB$$

wofür man nach §. 215 auch setzen kann

$$\square\; MC \,.\, MD = \square\; MA \,.\, MB$$

w. z. b. w.

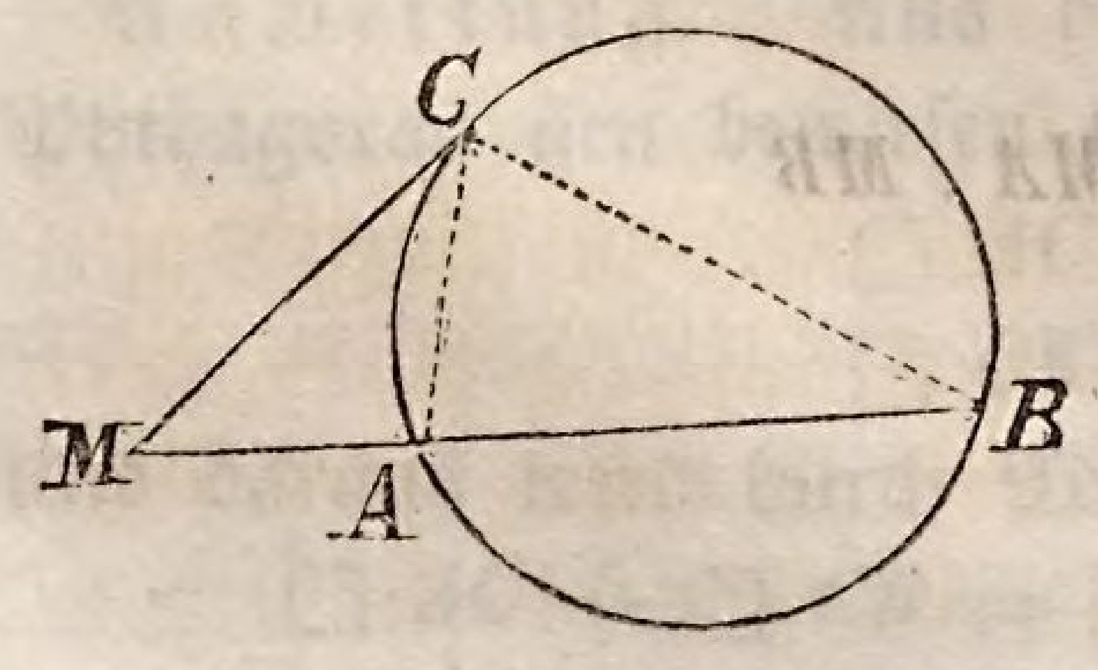
Der Beweis bleibt derselbe, der Strahlenpunkt M mag außerhalb (Fig. 154) oder innerhalb (Fig. 155) des Kreises liegen.

§. 242.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen einen Kreis treffen, von denen der eine Tangente des Kreises ist, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Secante.

Oder: das Quadrat über der Tangente ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Secante.

Fig. 156.



Voraussetzung: MC ist Tangente.

Folgerung: $MA : MC = MC : MB$

oder $\square\; MC = \square\; MA \,.\, MB$.

Beweis. Man ziehe die Sehnen AC und BC. Dadurch entstehen zwei Dreiecke MAC und MBC, in denen man hat

$$\angle AMC = \angle BMC$$

$$\angle MCA = \angle MBC \text{ (nach §. 176)}$$

folglich ist aus §. 220

$$\triangle MAC \sim \triangle MBC,$$

und daraus folgt nach §. 217

$$MA : MC = MC : MB$$

wofür man nach §. 215 auch setzen kann

$$\square\, MC = \square\, MA \,.\, MB$$

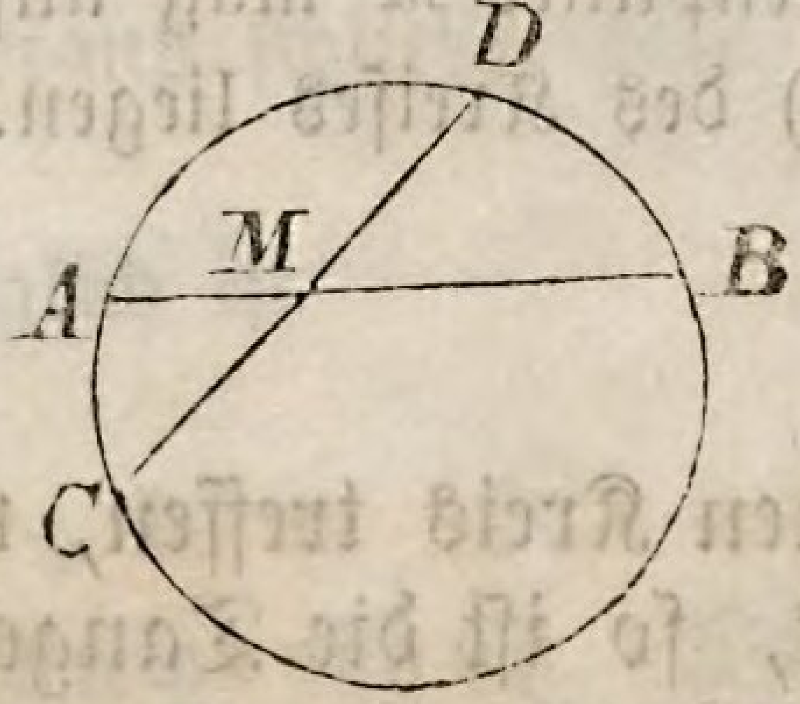
w. z. b. w.

§. 243.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen einen Kreis treffen, von denen der eine Hälfte einer Sehne ist, so ist die halbe Sehne mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der anderen Sehne.

Oder: das Quadrat über der halben Sehne ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sehne.

Fig. 157.



Voraussetzung:

$$MC = \tfrac{1}{2}\, CD.$$

Folgerung:

$$MA : MC = MC : MB$$

oder $\square\, MC = \square\, MA \,.\, MB.$

Beweis. Nach §. 241 hat man

$$MA : MC = MD : MB$$

Aber nach der Voraussetzung ist $MC = MD$; folglich auch

$$MA : MC = MC : MB$$

oder nach §. 215

$$\square\, MC = \square\, MA \,.\, MB$$

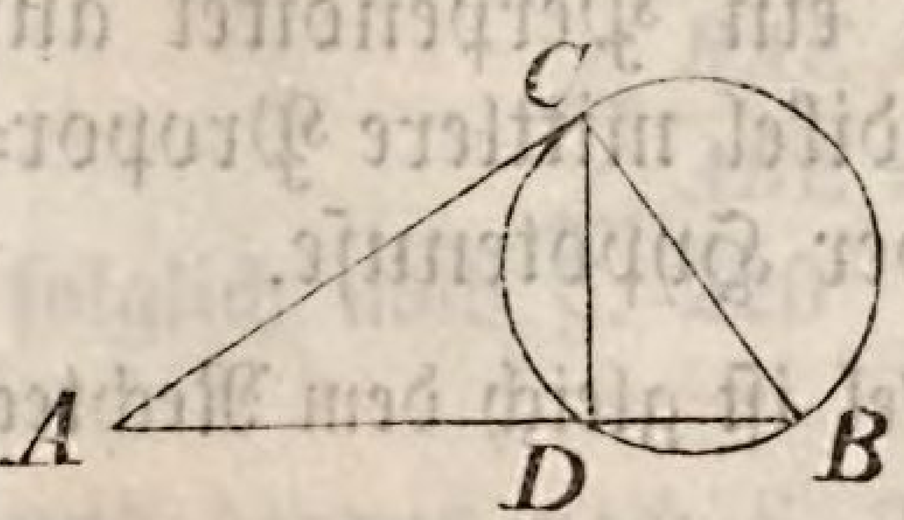
w. z. b. w.

§. 244.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus dem Scheitelpunkte des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse fällt, so ist jede Kathete dieses Dreiecks mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der Hypotenuse.

Oder: das Quadrat über jeder Kathete ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der Hypotenuse.

Fig. 158.



Voraussetzung:
$\angle ACB = R$
$CD \perp AB$.

Folgerung:
$AB : AC = AC : AD$
oder $\square\, AC = \boxed{}\, AB \,.\, AD$.

Beweis. Man construire einen dem rechtwinkeligen Dreiecke CDB umschriebenen Kreis, dessen Mittelpunkt nach §. 183 in die Mitte von BC fallen wird. Alsdann ist AC Tangente dieses Kreises (§. 143) und AB Secante desselben (§. 144); folglich hat man nach §. 242

$$AB : AC = AC : AD$$

oder

$$\square\, AC = \boxed{}\, AB \,.\, AD$$

w. z. b. w.

Hätte man ebenso dem rechtwinkeligen Dreiecke ADC einen Kreis umschrieben, so würde man auf demselben Wege gefunden haben

$$AB : CB = CB : DB$$

oder

$$\square\, CB = \boxed{}\, AB \,.\, DB$$

womit derselbe Lehrsatz noch einmal ausgesprochen ist.

Anmerkung. Aus diesem Lehrsatze kann der Lehrsatz des Pythagoras neu bewiesen werden. Man hat nämlich

$$\square\, AC = \boxed{}\, AB \,.\, AD$$
$$\square\, CB = \boxed{}\, AB \,.\, DB$$

und daraus wird durch Addition

$$\square\, AC + \square\, CB = \boxed{}\, AB \,.\, AD + \boxed{}\, AB \,.\, DB.$$

Nun können aber die Rechtecke $\square AB \cdot AD$ und $\square AB \cdot DB$ leicht addirt werden, indem man sie mit einer gleichen Seite sich an einander gelegt denkt. Alsdann erhält man

$$\square AB \cdot AD + \square AB \cdot DB = \square AB,$$

folglich ist

$$\square AC + \square CB = \square AB$$

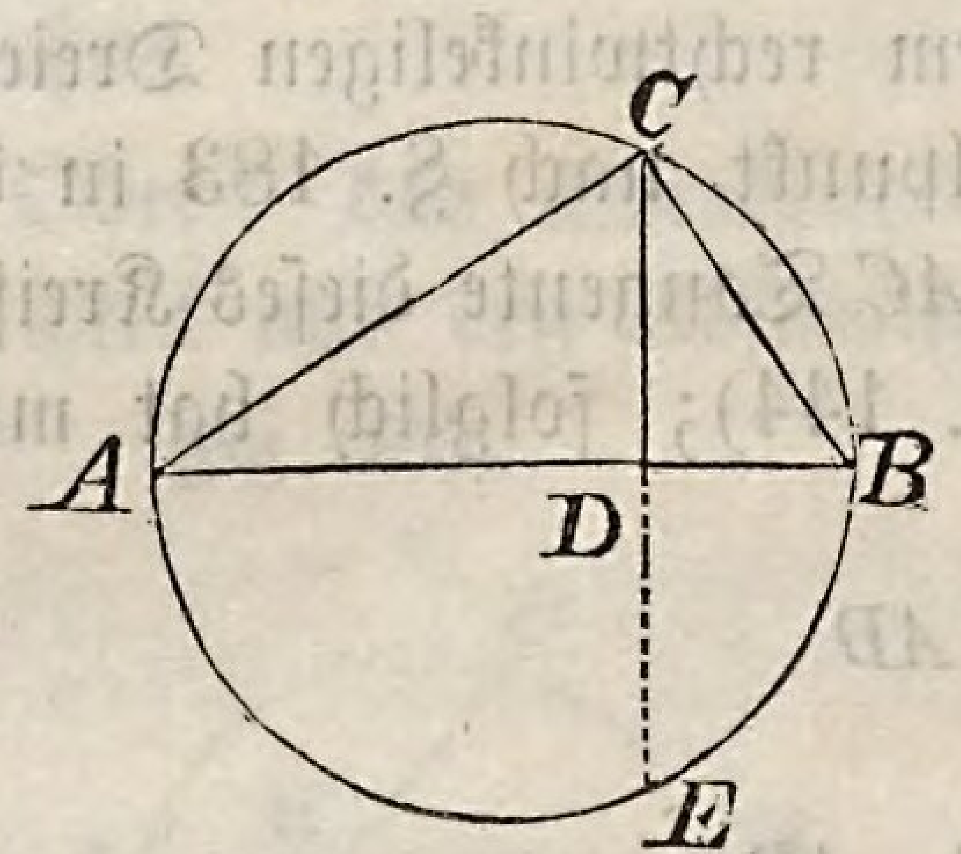
w. z. b. w.

§. 245.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus dem Scheitelpunkte des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse fällt, so ist dieses Perpendikel mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Oder: Das Quadrat über dem Perpendikel ist gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Fig. 159.



Voraussetzung:

$\angle ACB = R$

$CD \perp AB.$

Folgerung:

$AD : CD = CD : BD$

oder $\square CD = \square AD \cdot BD.$

Beweis. Man construire einen dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC umschriebenen Kreis, dessen Mittelpunkt nach §. 183 in die Mitte von AB fallen wird. Alsdann ist CD Hälfte einer Sehne CE (§. 151), folglich hat man nach §. 243

$$AD : CD = CD : BD$$

oder

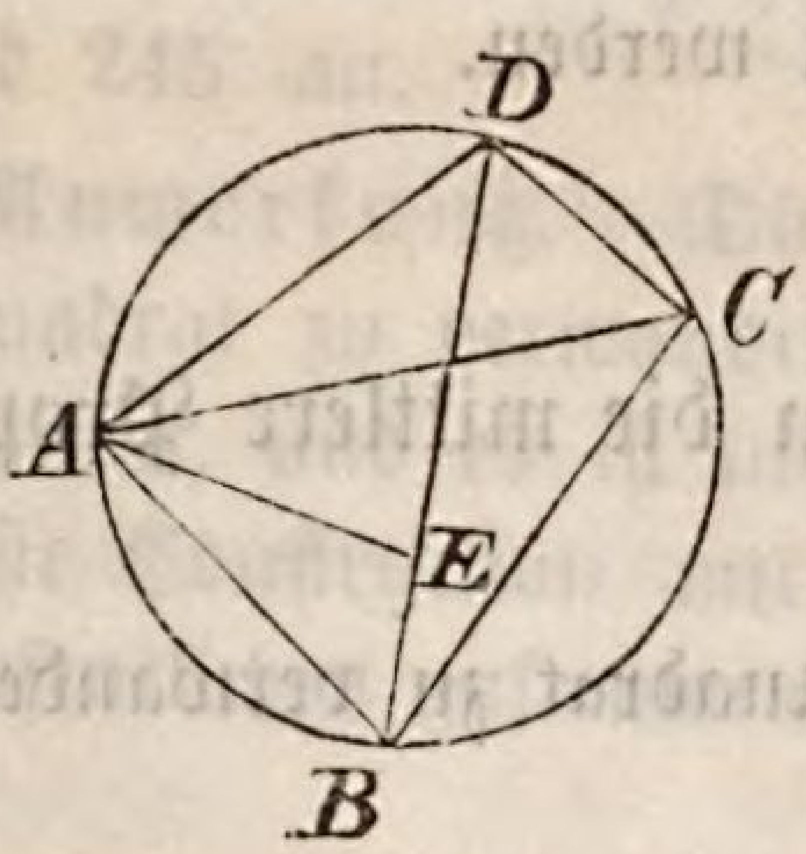
$$\square CD = \square AD \cdot BD$$

w. z. b. w.

§. 246.

Lehrsatz des Ptolemäus. In jedem eingeschriebenen Vierecke ist das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den einander gegenüberliegenden Seiten.

Fig. 160.



Voraussetzung:
ABCD ein eingeschriebenes Viereck.

Folgerung:
$\square AC.BD = \square AB.CD + \square AD.BC.$

Beweis. Man ziehe aus einem Eckpunkte *A* die Linie *AE* so daß $\angle BAE = \angle DAC$ wird. Alsdann hat man

$\angle BAE = \angle DAC$ nach d. Construction

$\angle ABE = \angle ACD$ nach §. 176

folglich nach §. 220

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD$$

und daraus nach §. 217

$$AB : AC = BE : CD$$

d. i. nach §. 215

$$\square AC.BE = \square AB.CD. \qquad (1)$$

Ebenso hat man

$\angle DAE = \angle BAC$ nach d. Construction

$\angle ADE = \angle ACB$ nach §. 176

und daraus wie vorhin

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB$$

$$AD : AC = DE : BC$$

$$\square AC.DE = \square AD.BC. \qquad (2)$$

Wenn man nun die Gleichungen (1) und (2) addirt und dabei beachtet, daß $\square AC.BE$ und $\square AC.DE$ zur Summe geben $\square AC.BD$, so folgt

$$\square AC.BD = \square AB.CD + \square AD.BC$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Diesen Lehrsatz hat zuerst der Astronom Ptolemäus zu Alexandria um 150 nach C. G. in seinem Almagest (in der Trigonometrie wird davon weiter die Rede sein) gegeben und zur Berechnung seiner trigonometrischen Tafeln angewandt.

Man kann aus diesem Satze wiederum den Lehrsatz des Pythagoras neu beweisen. Zu diesem Zwecke hat man nämlich nur nöthig, das eingeschriebene Viereck *ABCD* als Rechteck vorauszusetzen,

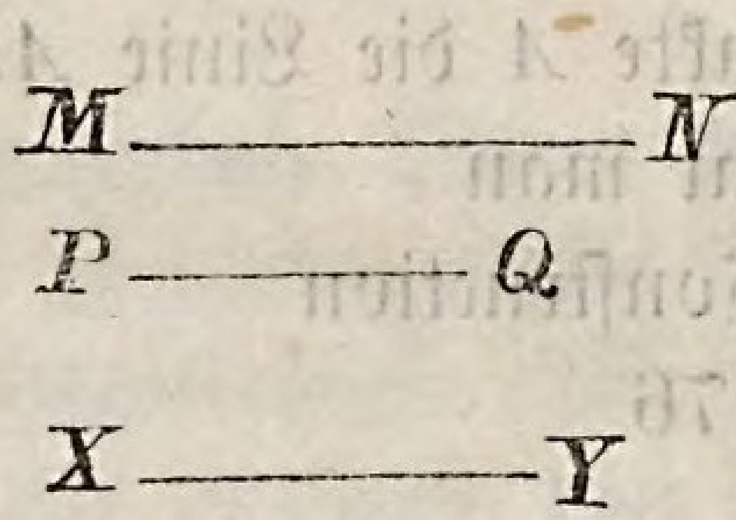
womit sowohl die gegenüberliegenden Seiten als auch die Diagonalen desselben beziehungsweise gleich groß werden.

§. 247.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu finden.

Oder: Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 161.



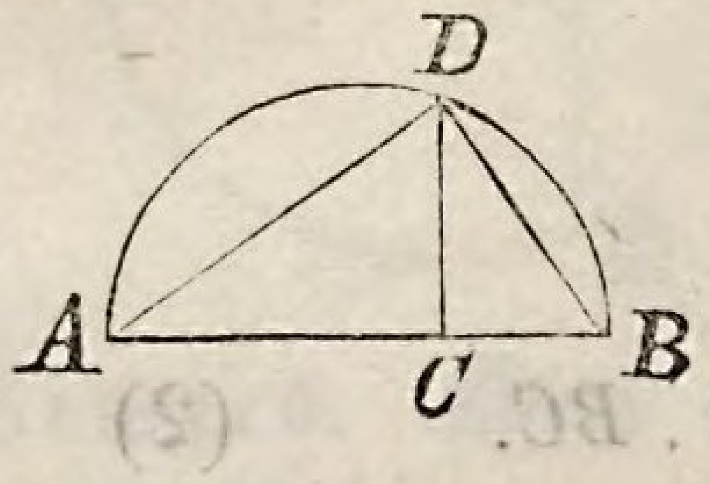
Gegeben:
MN, *PQ*.

Gesucht:
XY, so daß $MN : XY = XY : PQ$
oder $\square\, XY = \boxed{}\, MN \,.\, PQ$.

Da die mittlere Proportionale entweder Tangente (§. 242, 244) oder halbe Sehne (§. 243, 245) sein kann, so sind zwei Auflösungen möglich.

Erste Construction. Man trage die beiden gegebenen geraden Linien $AB = MN$ und $AC = PQ$ aus einerlei Punkte *A* auf einander ab, construire über der größeren derselben, *AB*, als Durchmesser, einen Halbkreis, errichte in dem Punkte *C* ein Perpendikel *CD*, welches diesen Halbkreis in *D* trifft, und ziehe *AD*. Alsdann ist *AD* die gesuchte mittlere Proportionale zu *AB* und *AC*.

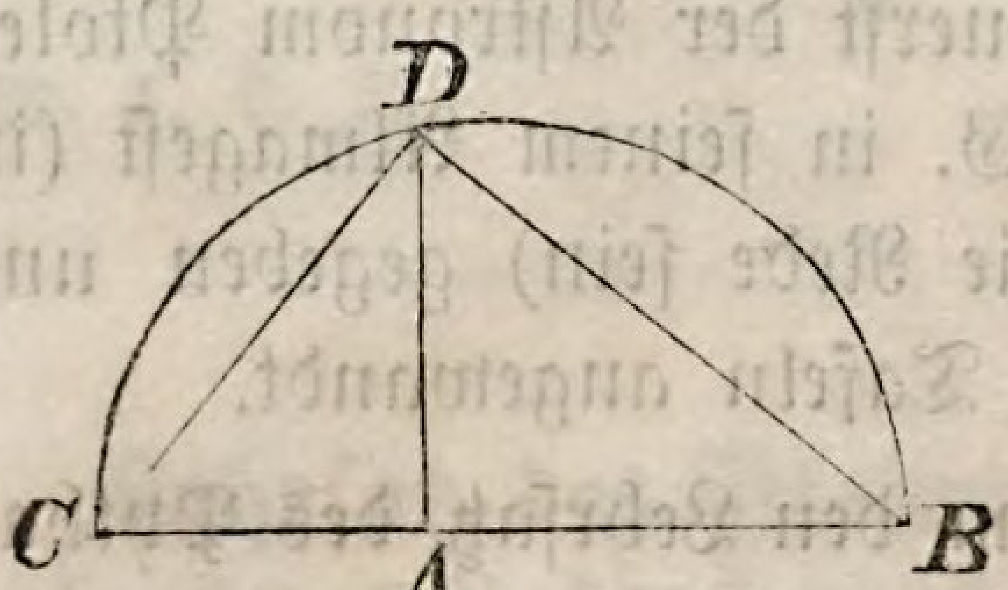
Fig. 162.



Zum Beweise ziehe man *BD*, und wende die §§. 68 und 244 an.

Zweite Construction. Man trage die beiden gegebenen geraden Linien $AB = MN$ und $AC = PQ$ aus einerlei Punkte *A* nach verschiedenen Seiten auf einer geraden Linie ab, construire über *CB* als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte in dem Punkte *A* ein Perpendikel *AD*, welches diesen Halbkreis in *D* trifft. Alsdann ist *AD* die gesuchte mittlere Proportionale zu *AB* und *AC*.

Fig. 163.



Zum Beweise ziehe man BD und CD, und wende die §§. 68 und 245 an.

Anmerkung. Die Aufgabe: Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, ist schon im §. 129 zur Auflösung gekommen, und es ist nicht schwer zu erkennen, daß die hier gegebene Erste Construction mit der obigen Auflösung dieser Aufgabe im Wesentlichen zusammenfällt.

§. 248.

Erklärung. Eine Linie heißt nach stetiger Proportion getheilt, wenn der größere Abschnitt derselben mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitte ist.

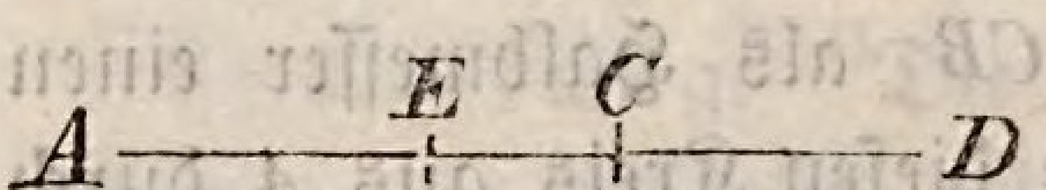
Oder: Wenn das Quadrat über dem größeren Abschnitte gleich dem Rechteck aus der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitte ist.

Diese Theilung, welche sich schon bei Euklides findet, wurde im Mittelalter mit besonderer Vorliebe behandelt, wo man sie die Sectio aurea oder den güldenen Schnitt nannte. In neuester Zeit hat in ihr ein bekannter Ästhetiker einen Kanon des Schönen, d. h. eine Grundregel für die Herstellung schöner Verhältnisse nachzuweisen versucht.

§. 249.

Lehrsatz. Wenn eine Linie nach stetiger Proportion getheilt ist, und man den kleineren Abschnitt derselben auf dem größeren abträgt, so wird der letztere gleichfalls nach stetiger Proportion getheilt.

Fig. 164.



Voraussetzung:

$$AD : AC = AC : CD$$
$$AE = CD.$$

Folgerung:

$$AC : AE = AE : EC.$$

Beweis. Aus der Proportion

$$AD : AC = AC : CD$$

folgt nach §. 150 (10) der Arithmetik

$$(AD - AC) : AC = (AC - CD) : CD.$$

Aber in Folge der Voraussetzung ist

$$AD - AC = AE, \quad AC - CD = EC, \quad CD = AE,$$

und durch die Substitution dieser Werthe verwandelt sich die vorige Proportion in

$$AE : AC = EC : AE$$

oder durch Vertauschung der äußeren Glieder mit den inneren

$$AC : AE = AE : EC$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Man kann auch umgekehrt sagen: Wenn eine nach stetiger Proportion getheilte Linie um ihren größeren Abschnitt verlängert wird, so entsteht wieder eine nach stetiger Proportion getheilte Linie. Es lassen sich demnach aus einer gegebenen nach stetiger Proportion getheilten Linie unzählige andere Linien von derselben Beschaffenheit ableiten, sowohl durch Abtragen des kleineren Abschnitts auf dem größeren, als auch durch Verlängern um den größeren Abschnitt.

§. 250.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie nach stetiger Proportion zu theilen.

Fig. 165.



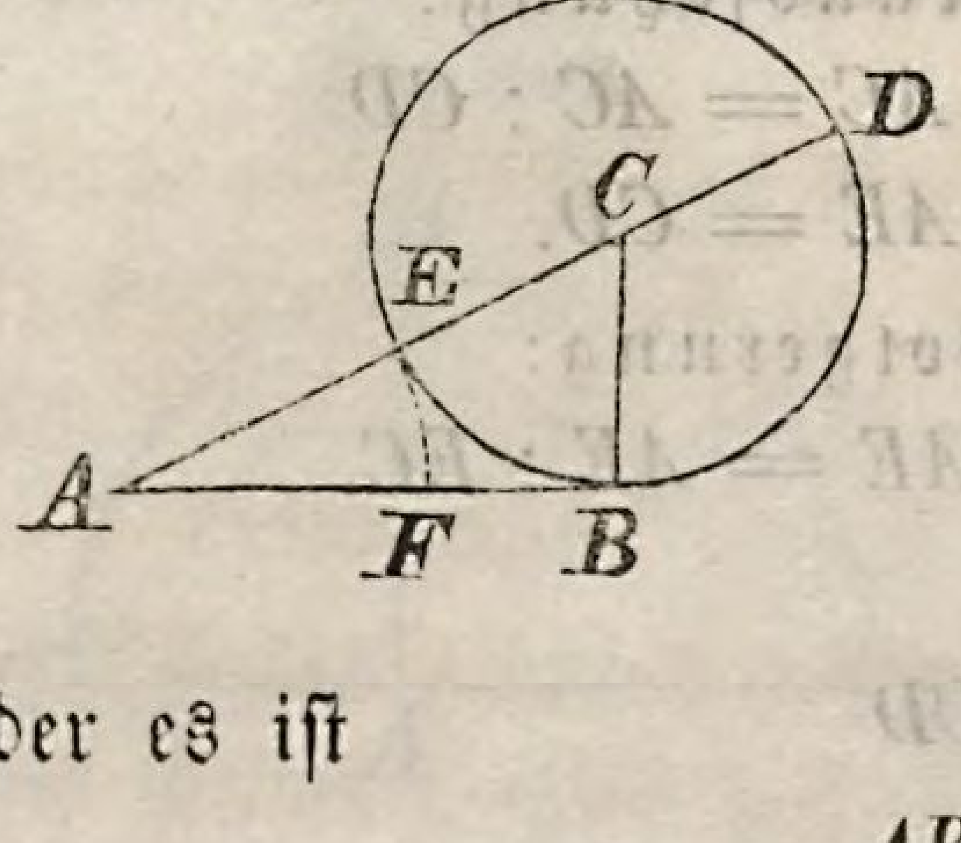
Gegeben: Linie AB.

Gesucht: Punkt X, so daß $AB : AX = AX : XB$.

Da die mittlere Proportionale entweder Tangente (§. 242) oder halbe Sehne (§. 243) sein kann, so sind zwei Auflösungen möglich.

Erste Construction. Man errichte in einem Endpunkte B der gegebenen Linie AB ein Perpendikel $BC = \frac{1}{2} AB$, construire aus C als Mittelpunkt mit CB als Halbmesser einen Kreis, schneide diesen Kreis aus A durch die Secante AD, und trage AE aus A auf der gegebenen Linie AB ab, bis F. Alsdann ist F der gesuchte Theilpunkt, oder es ist

Fig. 166.



$$AB : AF = AF : FB.$$

Beweis. Nach §. 242 ist

$$AD : AB = AB : AE$$

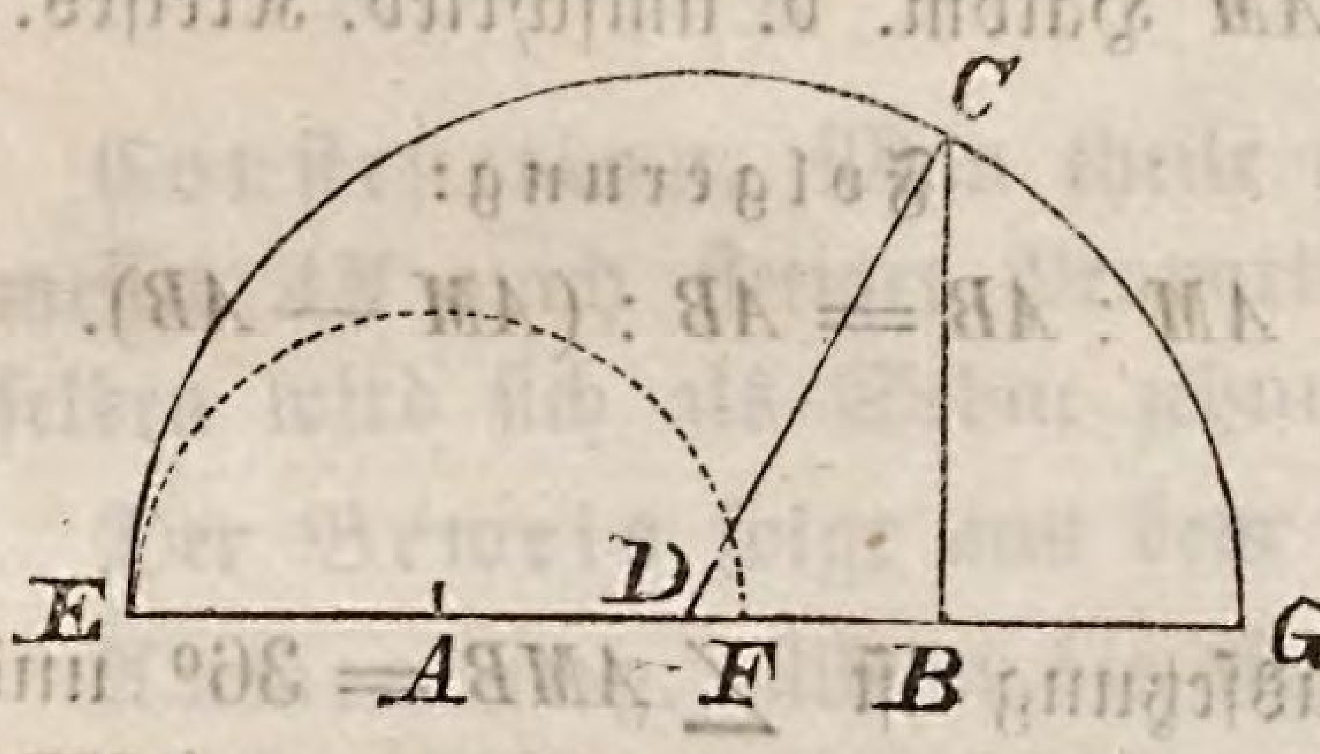
oder auch, da nach der Construction $AB = ED$ ist,

$$AD : ED = ED : AE$$

d. h. die Linie AD ist im Punkte E nach stetiger Proportion getheilt und die Linie AB ist dem größeren Abschnitte derselben gleich. Wenn man also AE auf AB abträgt, so muß nach dem vorigen §. auch AB nach stetiger Proportion getheilt werden, w. z. b. w.

Zweite Construction. Man errichte in einem Endpunkte B der gegebenen Linie AB ein Perpendikel $BC = AB$, verbinde C mit der Mitte D von AB durch die gerade Linie CD, construire aus D als Mittelpunkt mit DC als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von AB in E schneidet, und trage AE aus A auf der gegebenen Linie AB ab, bis F. Alsdann ist F der gesuchte Theilpunkt, oder es ist

Fig. 167.



$$AB : AF = AF : FB.$$

Beweis. Man vollende den Halbkreis bis G. Nach §. 243 ist

$$EB : BC = BC : BG$$

oder auch, da nach der Construction $BC = AB$ und $BG = AE$ ist

$$EB : AB = AB : AE$$

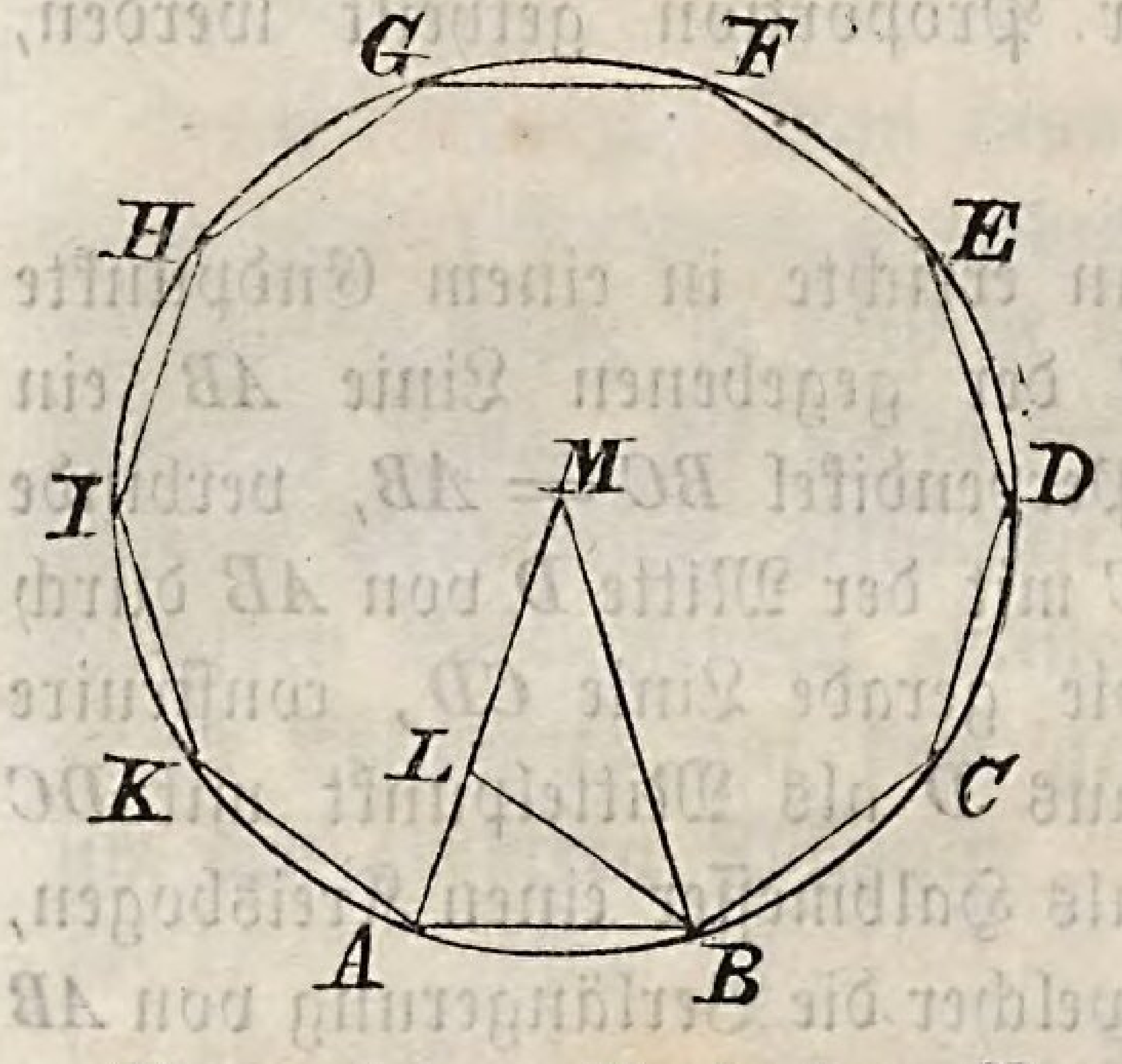
d. h. die Linie EB ist im Punkte A nach stetiger Proportion getheilt und die Linie AB ist der größere Abschnitt derselben. Wenn man also AE auf AB abträgt, so muß nach dem vorigen §. auch AB nach stetiger Proportion getheilt werden, w. z. b. w.

Anmerkung. Die vorstehenden beiden Constructionen lösen zugleich die Aufgabe: Eine gegebene gerade Linie so zu verlängern, daß sie der größere Abschnitt der nach stetiger Proportion getheilten neuen Linie wird. In beiden Figuren ist AE die gesuchte Verlängerung von AB, und der Punkt F fällt für diesen Zweck als unnöthig hinweg.

§. 251.

Lehrsatz. Wenn man die Seite eines regelmäßigen Zehnecks auf dem Halbmesser des dem Zehneck umschriebenen Kreises abträgt, so wird dieser Halbmesser nach stetiger Proportion getheilt, und die Seite des Zehnecks ist der größere Abschnitt desselben.

Fig. 168.



Voraussetzung:
AB Seite eines regelm. Zehnecks,
AM Halbm. d. umschrieb. Kreises.

Folgerung:
$AM : AB = AB : (AM - AB)$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $\angle AMB = 36^\circ$ und mithin $\angle MAB = \angle MBA = 72^\circ$. Wenn man ferner $\angle MBA$ durch die Linie *BL* in zwei gleiche Theile theilt, so wird $\angle ABL = \angle MBL = 36^\circ$ und $\angle ALB = 72^\circ$, folglich

1) $\triangle ALB$ gleichschenkelig, d. i. $AB = LB$
2) $\triangle MBL$ gleichschenkelig, d. i. $LB = LM$.

Daraus folgt

$$AB = LM.$$

Ferner ist nach §. 212

$$AL : LM = AB : BM$$

folglich auch, wenn man hierin die Werthe $AB = LM$ und $BM = AM$ substituirt,

$$AL : LM = LM : AM$$

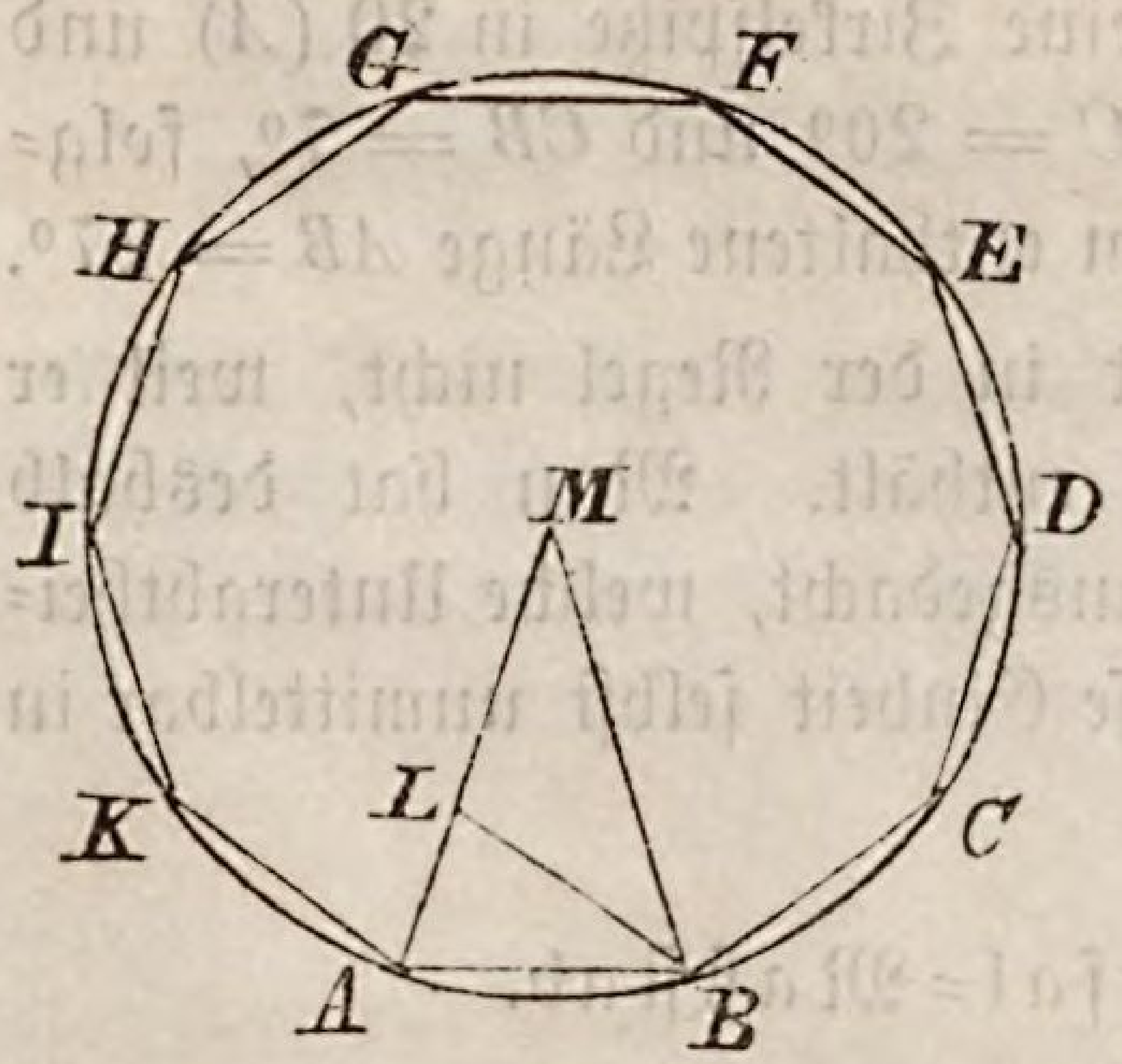
d. h. der Halbmesser *AM* wird im Punkte *L* nach stetiger Proportion getheilt und der größere Abschnitt *LM* desselben ist der Seite des Zehnecks gleich, w. z. b. w.

Substituirt man in die letzte Proportion die Werthe $LM = AB$ und $AL = AM - AB$, und lies't die Proportion in umgekehrter Ordnung der Glieder, so erhält man die oben angezeigte Proportion

$$AM : AB = AB : (AM - AB).$$

§. 252.

Aufgabe. Einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben.



Gegeben:
AM als Halbmesser.
Gesucht:
AB als Seite des eingeschr. regelm. Zehnecks.

Construction. Man theile nach §. 250 den gegebenen Halbmesser *AM* nach stetiger Proportion. Der größere Abschnitt desselben wird sich als Sehne zehnmal im Kreise abtragen lassen.

Der Beweis folgt aus dem vorigen §.

Anmerkung. Wenn die Aufgabe vorgelegt wäre: Über einer gegebenen Seite ein regelmäßiges Zehneck zu construiren, so würde man umgekehrt nach dem in der Anmerkung zu §. 250 angezeigten Verfahren den Halbmesser des umschriebenen Kreises zu suchen haben.

Achter Abschnitt.

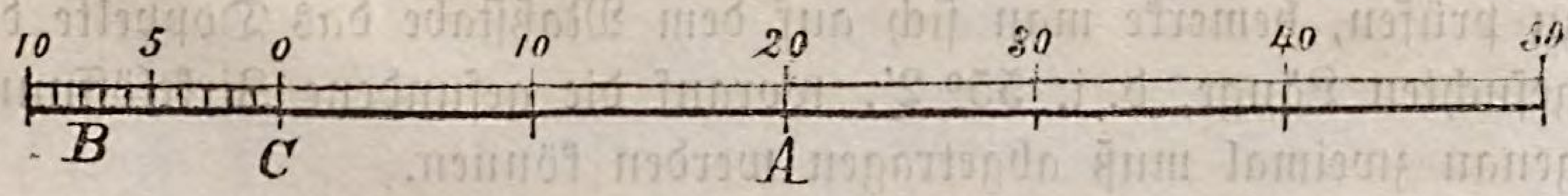
Inhaltsberechnung der Figuren.

§. 253.

Aufgabe. Einen verjüngten Maßstab zu zeichnen.

Auflösung. Ein verjüngter Maßstab hat im einfachsten Falle die folgende Gestalt.

Fig. 169.



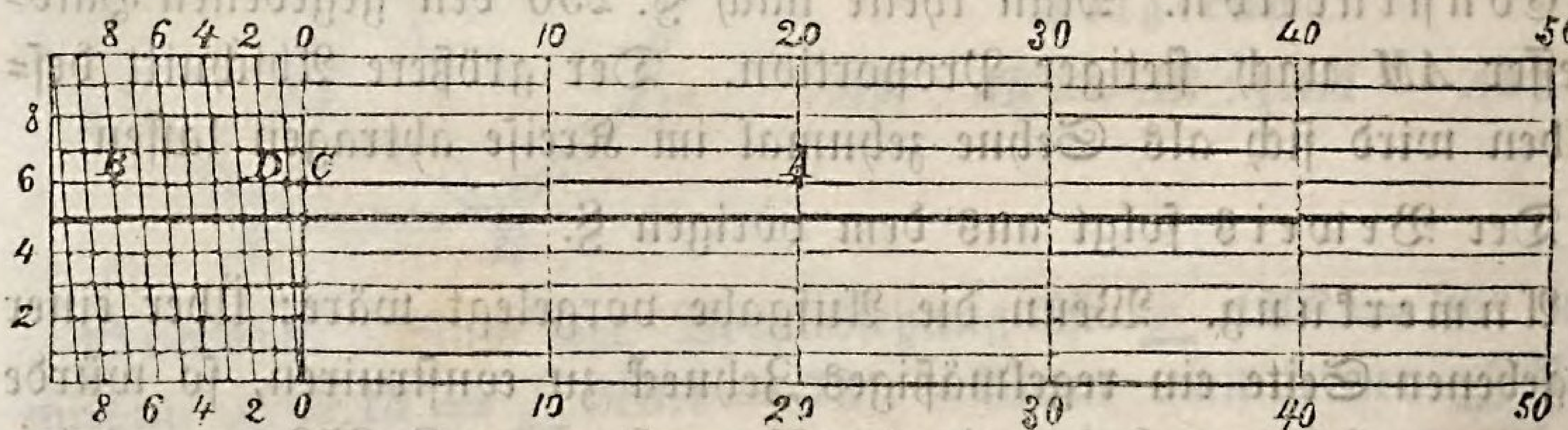
Als Längen-Einheit wird hier gewöhnlich eine Ruthe (°), seltener ein Fuß (′) oder ein Zoll (″) verstanden.

Will man auf diesem Maßstabe z. B. eine Länge von 27° in den Zirkel fassen, so stelle man die eine Zirkelspitze in 20 (*A*) und die andere in 7 (*B*). Alsdann ist $AC = 20°$ und $CB = 7°$, folglich die zwischen den beiden Zirkelspitzen enthaltene Länge $AB = 27°$.

Dieser verjüngte Maßstab genügt in der Regel nicht, weil er keine Unterabtheilungen der Einheit enthält. Man hat deshalb die beiden folgenden Einrichtungen ausgedacht, welche Unterabtheilungen der Einheit liefern, ohne diese Einheit selbst unmittelbar in gleiche Theile zu zerlegen.

1) Der Transversal-Maßstab.

Fig. 170.



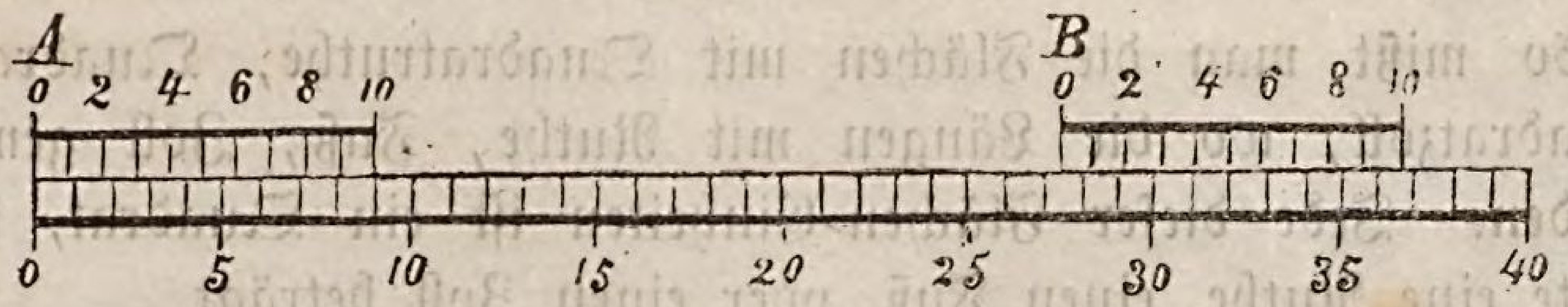
Dieser Maßstab zerlegt jede Ruthe in 10 gleiche Theile oder Fuß (Decimalfuß). Seine Einrichtung ist aus Fig. 170 leicht zu erkennen. Zu der einfachen Linie, welche in Fig. 169 dargestellt ist, sind hier 10 Parallelen in unter sich gleichen, übrigens beliebig großen Abständen gezogen worden; diese Parallelen werden von den Perpendikeln 0 — 0, 10 — 10, 20 — 20, ꝛc. und außerdem von den Transversalen 0 — 1, 1 — 2, 2 — 3, ꝛc. durchschnitten.

Will man auf diesem Maßstabe z. B. eine Länge von 27° 6′ in den Zirkel fassen, so stelle man in der 6ten Parallele die eine Zirkelspitze in das Perpendikel 20 — 20 (*A*) und die andere in die Transversale 7 — 8 (*B*). Alsdann ist $AC = 20°$, $DB = 7°$ und $CD = 6'$ (nach §. 210), folglich die zwischen den beiden Zirkelspitzen enthaltene Länge $AB = 27°\,6'$.

Um das erhaltene Maß und zugleich die Güte des Maßstabes zu prüfen, bemerke man sich auf dem Maßstabe das Doppelte der gesuchten Länge, d. i. 55° 2′, worauf die gefundene Zirkelöffnung genau zweimal muß abgetragen werden können.

2) Der Nonius oder Vernier.

Fig. 171.



Dieser Maßstab zerlegt gleichfalls jede Ruthe in 10 gleiche Theile oder Fuß. Zu dem Ende hat man eine Länge von 9 Einheiten des Maßstabes in 10 gleiche Theile getheilt, und diese 10 Theile auf einem Schieber abgetragen, welcher längs dem Maßstabe beliebig verschoben werden kann. Dieser Schieber ist in Fig. 171 zweimal gezeichnet, in *A* und *B*. Jeder Theil des Schiebers enthält $\frac{9}{10}$ Einheiten des Maßstabes.

Will man auf diesem Maßstabe z. B. eine Länge von 27° 4′ fassen, so bringe man den Nonius von *A* nach *B* in eine solche Lage, daß der Punkt 0 des Nonius zwischen 27 und 28 des Maßstabes, und zugleich der Theilstrich 4 des Nonius genau mit einem Theilstriche (hier 31) des Maßstabes zusammenfällt. Alsdann ist $AB = 27^0\ 4'$.

Anmerkung. Der Transversal-Maßstab ist seit dem berühmten Astronomen Tycho de Brahe im Gebrauch, welcher ihn im Jahre 1573 zu Leipzig, wo er studirte, von seinem Lehrer kennen lernte. Der Erfinder ist nicht bekannt; in Frankreich nennt man als solchen den Mathematiker Desargues, der jedoch später lebte.

Der Nonius rührt in seiner ersten Idee von Nuñez, lat. Nonius, her, welcher 1577 als Professor zu Coimbra starb und durch mathematische und astronomische Schriften sich einen Namen gemacht hat. Seine heutige Einrichtung mit dem beweglichen Schieber verdankt man aber dem sonst nicht weiter bekannten Vernier, in einer kleinen Schrift, welche 1631 zu Brüssel erschien.

Der Nonius wird vorzugsweise zu den Kreistheilungen der Winkel-Instrumente gebraucht, wo der Transversal-Maßstab nicht anwendbar ist.

§. 254.

Erklärung. Eine Fläche messen heißt: Die Anzahl von Einheiten und Theilen der Einheit angeben, welche gesetzt werden muß, um eine der ersten gleiche Fläche hervorzubringen.

Als Einheit der Flächenmessung wird ein Quadrat angenommen, dessen Seite gleich der gegebenen Längen-Einheit ist.

So mißt man die Flächen mit Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll, wo die Längen mit Ruthe, Fuß, Zoll gemessen werden. Jede dieser Flächen-Einheiten ist ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe, einen Fuß, oder einen Zoll beträgt.

Man schreibt Quadratruthe $\square^{\circ}$, Quadratfuß $\square'$, Quadratzoll $\square''$.

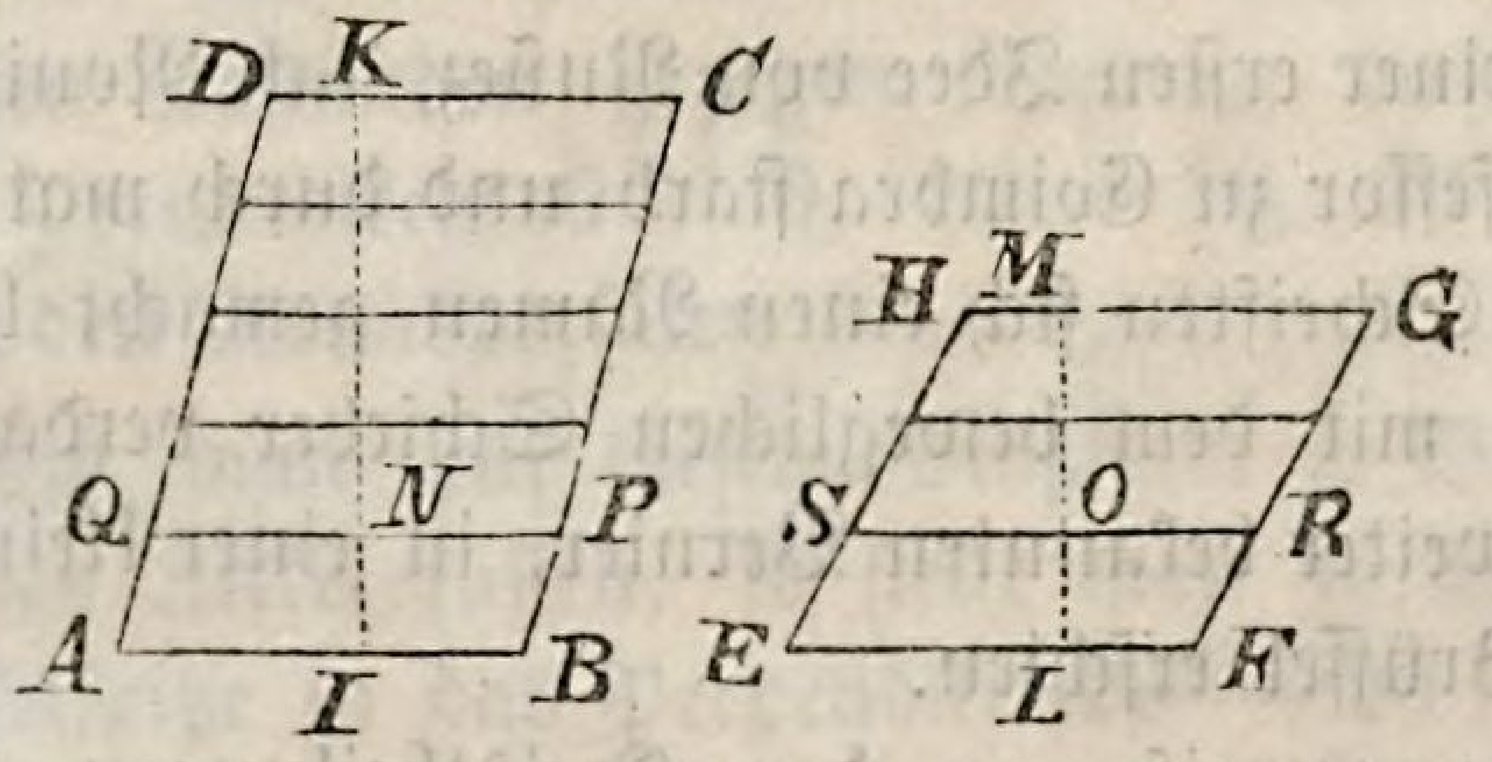
Die Messung einer Fläche hat man sich immer so zu denken, daß die gegebene Flächen-Einheit auf der zu messenden Fläche abgetragen wird, so oft es angeht, und das Resultat dieses Abtragens durch eine Zahl ausgedrückt wird. Diese unmittelbare Messung ist aber fast niemals ausführbar; vielmehr ist der Zweck der hier folgenden Sätze dahin gerichtet, den Inhalt einer zu messenden Fläche durch Rechnung aus gemessenen Linien abzuleiten. Deshalb werden hier auch die obigen Maßstäbe, insbesondere der Transversal-Maßstab, gebraucht.

Verhältnisse unter Flächen.

§. 255.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Fig. 172.



Voraussetzung:

$AB = EF.$

Folgerung:

$ABCD : EFGH = IK : LM.$

Beweis. Um das Verhältniß $IK : LM$ der beiden Höhen darzustellen, muß man nach §. 200 diese beiden Höhen durch einerlei Maß messen. Es seien nun 1) die Höhen IK und LM commensurabel. Alsdann läßt sich nach §. 199 ein gemeinschaftliches Maß angeben, welches auf IK und LM genau abgetragen werden kann. Ist z. B. $IN = LO$ dieses gemeinschaftliche Maß, und ist dasselbe n mal in IK (in der Figur 5 mal) und r mal in

LM (in der Figur 3 mal) enthalten, so hat man nach §. 200

$$IK : LM = n : r. \qquad (1)$$

Zieht man ferner durch alle Theilpunkte der Höhen *IK* und *LM* Parallelen zu den Grundlinien *AB* und *EF* der Parallelogramme, so wird jedes dieser Parallelogramme in eben so viel kleinere Parallelogramme zerlegt, wie seine Höhe Theile enthält. Überdies sind, nach §. 115, nicht nur die so entstandenen Theile eines jeden Parallelogramm unter sich, sondern auch jeder Theil des einen mit jedem Theile des andern Parallelogramm, gleich groß. Man kann mithin das Parallelogramm *ABPQ* = *EFRS* wie ein gemeinschaftliches Maß der beiden Parallelogramme *ABCD* und *EFGH* ansehen, welches *n* mal in *ABCD* und *r* mal in *EFGH* enthalten ist. Also hat man, mit Anwendung des §. 200 auf Flächen,

$$ABCD : EFGH = n : r. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) endlich folgt

$$ABCD : EFGH = IK : LM$$

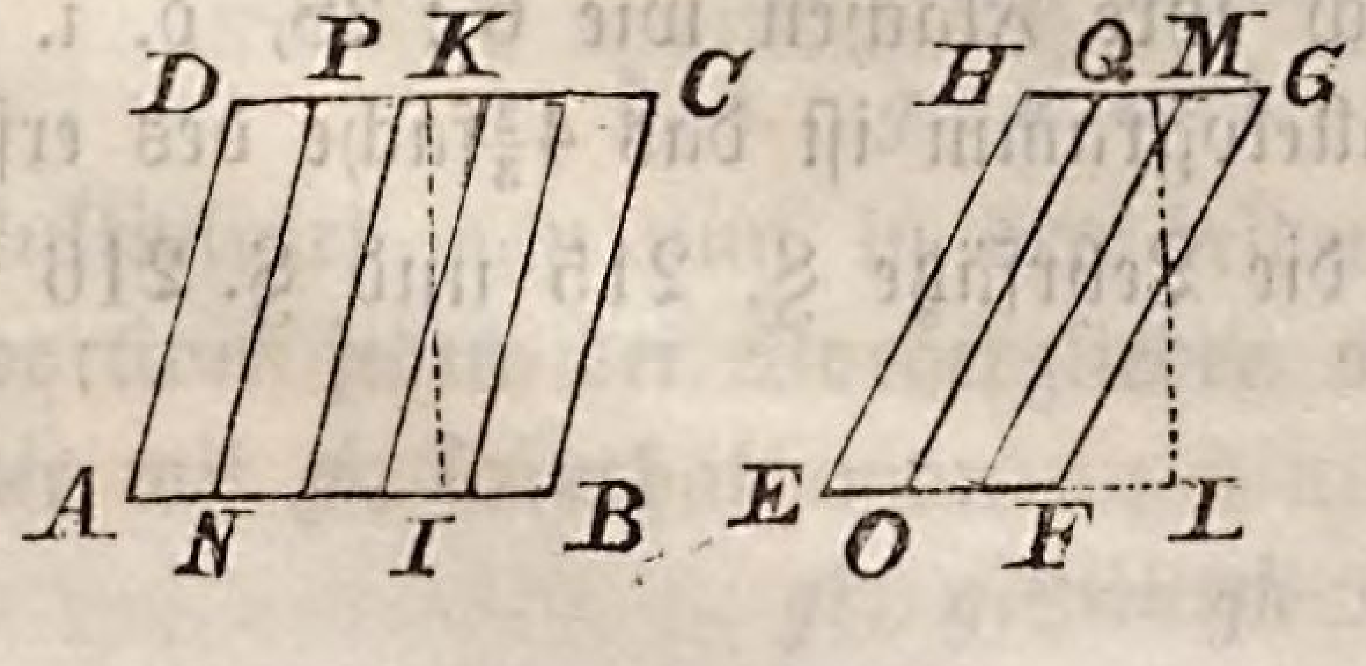
w. z. b. w.

Es seien 2) die Höhen *IK* und *LM* incommensurabel. Alsdann wird jedes Maß von *IK*, welches man angeben mag, nicht genau in *LM* abgetragen werden können, sondern es wird hier ein Rest bleiben, welcher kleiner als das angenommene Maß ist. Wenn man diesen Rest nicht berücksichtigt, so gelten wieder die vorigen Schlüsse. Da man es aber in seiner Gewalt hat, das willkürliche Maß und folglich auch diesen Rest so klein werden zu lassen, wie man will, so gilt hier wieder vollkommen genau die vorige Proportion.

§. 256.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Fig. 173.



Voraussetzung:
IK = *LM*.

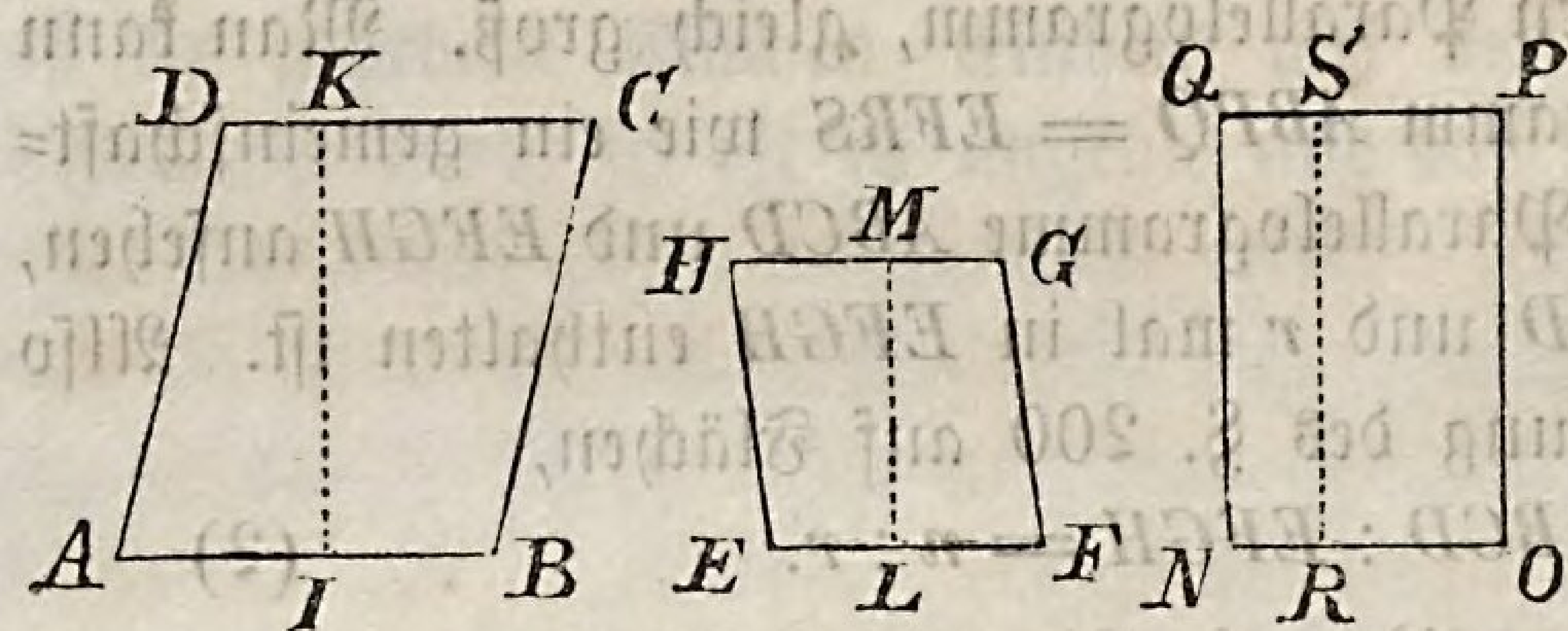
Folgerung:
ABCD : *EFGH* = *AB* : *EF*.

Der Beweis kann, nach Anleitung der Figur, ganz nach dem Vorbilde des vorigen Beweises geführt werden.

§. 257.

Lehrsatz. Die Flächen jeder zwei Parallelogramme verhalten sich zu einander wie die Producte der Zahlen, welche die Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen ausdrücken.

Fig. 174.



Voraussetzung:

$AB : EF = g : g'$

$IK : LM = h : h'$.

Folgerung:

$ABCD : EFGH = gh : g'h'$.

Beweis. Man construire ein drittes Parallelogramm, $NOPQ$, dessen Grundlinie $NO = EF$ und dessen Höhe $RS = IK$ ist. Alsdann hat man nach den beiden vorhergegangenen Lehrsätzen

$$ABCD : NOPQ = AB : NO$$
$$NOPQ : EFGH = RS : LM,$$

mithin auch

$$ABCD : NOPQ = g : g'$$
$$NOPQ : EFGH = h : h'.$$

Wenn man auf die beiden Verhältnisse $g : g'$ und $h : h'$ den Lehrsatz §. 149 der Arithmetik anwendet, so erhält man hieraus ferner

$$ABCD : NOPQ = gh : g'h$$
$$NOPQ : EFGH = g'h : g'h'$$

folglich

$$ABCD : EFGH = gh : g'h'$$

w. z. b. w.

Beispiel. Wenn die Grundlinien zweier Parallelogramme in dem Verhältniß 2 : 7 und die Höhen derselben in dem Verhältniß 3 : 4 stehen, so verhalten sich ihre Flächen wie 6 : 28, d. i. wie 3 : 14, oder das zweite Parallelogramm ist das $4\frac{2}{3}$fache des ersten.

Aus diesem Satze können die Lehrsätze §. 215 und §. 216 neu bewiesen werden.

§. 258.

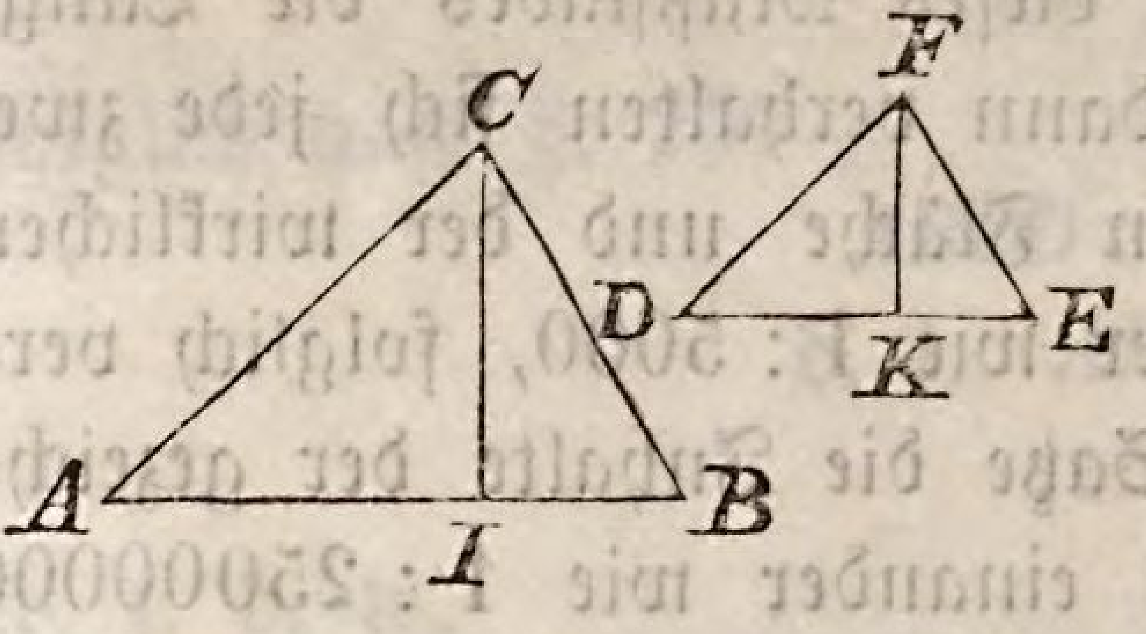
Zusatz. Die Flächen jeder zwei Dreiecke verhalten sich zu einander wie die Producte der Zahlen, welche die Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen ausdrücken.

Denn Dreiecke können immer wie die Hälften von Parallelogrammen angesehen werden, welche mit ihnen gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

§. 259.

Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten ausdrücken.

Fig. 175.



Voraussetzung:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$
$$AB : DE = g : g'.$$

Folgerung:

$$ABC : DEF = g^2 : g'^2.$$

Beweis. Man construire zu den beiden gleichliegenden Seiten AB und DE, als Grundlinien, die zugehörigen Höhen CI und FK, und nehme an, es verhalte sich

$$CI : FK = h : h'.$$

Alsdann hat man nach dem vorhergehenden §.

$$ABC : DEF = gh : g'h'. \quad (1)$$

Aber wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DEF ist

$$AB : DE = AC : DF$$

und wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ACI und DFK ist ferner

$$AC : DF = CI : FK,$$

folglich ist auch

$$AB : DE = CI : FK$$

d. i. $g : g' = h : h'$.

Multiplicirt man nun in den beiden Verhältnissen dieser letzten Proportion jedes der Vorderglieder mit g und jedes der Hinterglieder mit g', so erhält man

$$g^2 : g'^2 = gh : g'h' \quad (2)$$

und aus (1) und (2) endlich folgt

$$ABC : DEF = g^2 : g'^2$$

w. z. b. w.

§. 260.

Zusatz. Die Flächen ähnlicher Polygone verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten ausdrücken.

Denn nach §. 225 werden ähnliche Polygone durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt, und auf jedes Paar dieser ähnlichen Dreiecke kann man den vorigen Lehrsatz anwenden.

Beispiel. Gesetzt man habe irgend eine Fläche, z. B. den Grundriß einer Stadt oder eines Landes, nach verjüngtem Maßstabe gezeichnet, so daß 50 Ruthen dieses Maßstabes die Länge von 1 Decimalzoll einnehmen. Alsdann verhalten sich jede zwei gleichliegende Seiten der gezeichneten Fläche und der wirklichen Fläche zu einander wie $1'' : 50^0$ oder wie $1 : 5000$, folglich verhalten sich nach dem vorstehenden Satze die Inhalte der gezeichneten und der wirklichen Fläche zu einander wie $1 : 25000000$ oder man muß die Zeichnung 25000000 mal an einander legen, um eine der wirklichen Fläche inhaltsgleiche Figur hervorzubringen.

Anmerkung. Da alle Quadrate ähnliche Figuren sind, so verhalten sich nach diesem Satze auch die Flächen je zweier Quadrate zu einander wie die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten ausdrücken. Folglich kann man statt der Sätze §. 259 und §. 260 auch sagen:

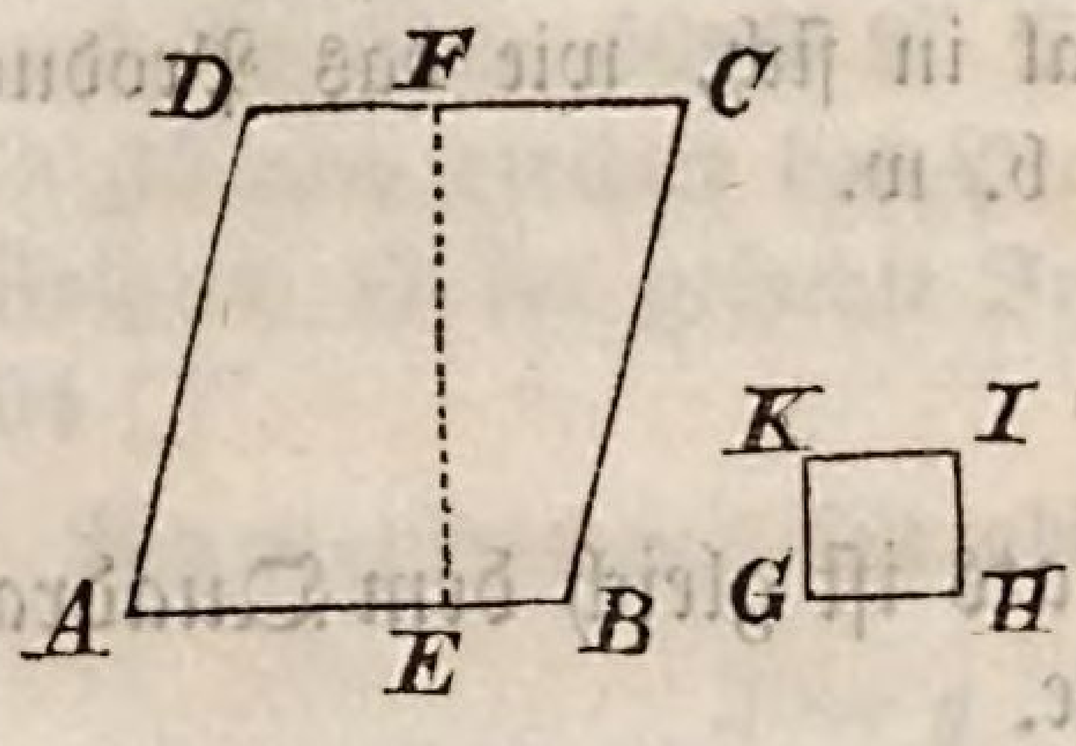
Die Flächen ähnlicher Dreiecke, oder ähnlicher Polygone, verhalten sich zu einander wie die Flächen der Quadrate, welche über gleichliegenden Seiten derselben construirt werden können.

Inhaltsberechnung der geradlinigen Figuren.

§. 261.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Parallelogramm wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben, in Zahlen ausgedrückt, mit einander multiplicirt.

Fig. 176.



Voraussetzung:
$AB = g$
$EF = h.$

Folgerung:
$J = g \,.\, h.$

J bedeutet Inhalt.

Beweis. Es sei $GHIK$ dasjenige Quadrat, welches als Flächen-Einheit angesehen wird. Alsdann ist die Seite GH dieses Quadrats diejenige Längen-Einheit, mit welcher gemessen die Grundlinie AB die Zahl g und die Höhe EF die Zahl h liefert. Es ist also

$$AB : GH = g : 1$$
$$EF : GK = h : 1$$

folglich nach §. 257

$$ABCD : GHIK = gh : 1$$
d. i. $ABCD = gh \,.\, GHIK,$
oder $J = gh$

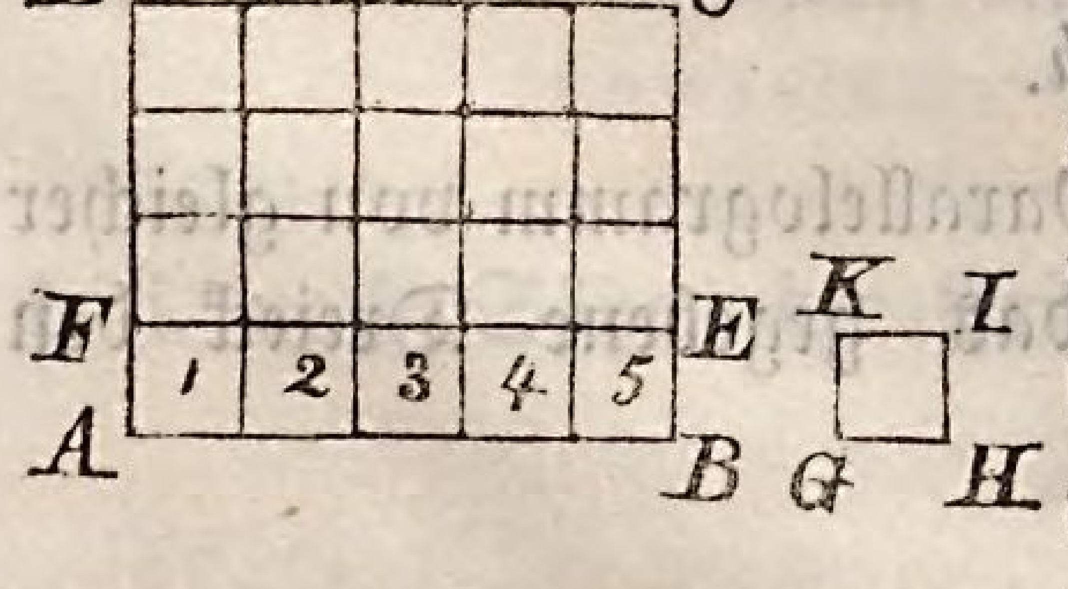
w. z. b. w.

Beispiel. Ein Parallelogramm habe 17′ Grundlinie und 9′ Höhe. Alsdann ist sein Inhalt = 153 □′.

Anmerkung. Man beweist diesen Satz häufig viel anschaulicher, wenn auch weniger streng, auf folgende Weise.

Man denke sich für das hier gegebene Parallelogramm ein Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe an die Stelle gesetzt, welches nach §. 115 denselben Inhalt hat. In diesem Rechteck $ABCD$, Fig. 177, kann man die gegebene Flächen-Einheit $GHIK$ zunächst längs der Grundlinie AB so viel mal abtragen, wie die Längen-Einheit in dieser Grundlinie enthalten ist, d. i. g mal (in der Figur 5 mal). Die so erhaltene Quadraten-Reihe $ABEF$ kann man ferner in dem Rechteck $ABCD$ so viel mal über einander abtragen, wie die Längen-Einheit in der Höhe des Rechtecks enthalten ist, d. i.

Fig. 177.



h mal (in der Figur 4 mal). Folglich enthält das Rechteck $ABCD$ die Flächen-Einheit $GHIK$ so viel mal in sich, wie das Product gh anzeigt; oder es ist $J = gh$, w. z. b. w.

§. 262.

Zusatz. Der Inhalt eines Quadrats ist gleich dem Quadrat oder der zweiten Potenz seiner Seite.

Oder wenn a die Seitenlänge des Quadrats, durch eine Zahl ausgedrückt, bedeutet, so ist

$$J = a^2.$$

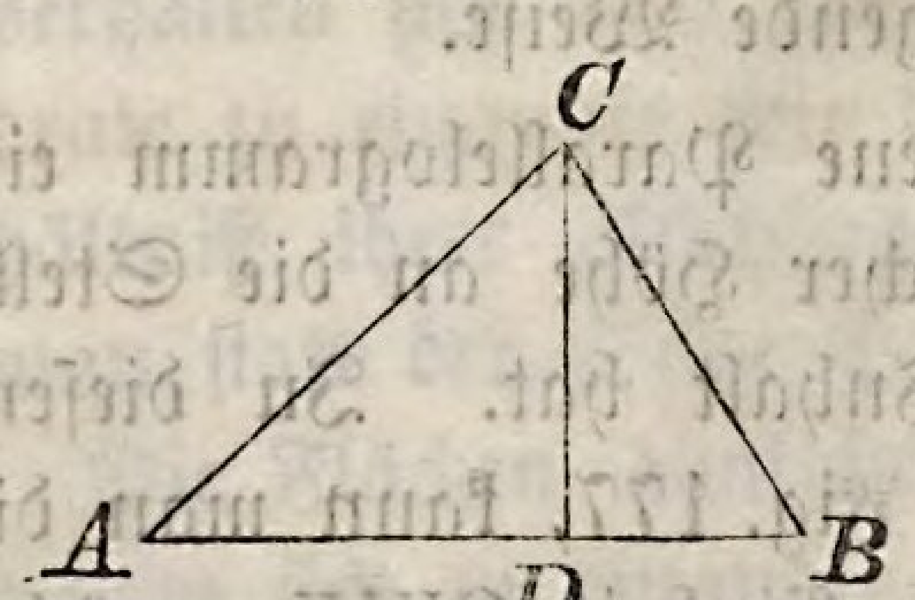
Daher schreibt sich der gemeinschaftliche Gebrauch des Worts Quadrat in der Arithmetik und der Geometrie.

Man kann hieraus ferner schließen: Wenn wie bei dem Decimalmaß $1^\circ = 10'$ und $1' = 10''$ ist, so muß $1 \square^\circ = 100 \square'$ und $1 \square' = 100 \square''$ sein. Ebenso wenn wie bei dem hannoverschen Werkmaß $1^\circ = 16'$ und $1' = 12''$ ist, so muß $1 \square^\circ = 256 \square'$ und $1 \square' = 144 \square''$ sein.

§. 263.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einander multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt.

Fig. 178.



Voraussetzung:
$AB = g$
$CD = h.$

Folgerung:
$$J = \frac{gh}{2}.$$

Beweis. Ein Parallelogramm von der Grundlinie g und der Höhe h hat nach §. 261 den Inhalt gh.

Das Dreieck ist aber die Hälfte eines Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe, folglich hat das gegebene Dreieck den Inhalt

$$J = \frac{gh}{2}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Die Grundlinie eines Dreiecks betrage 94° 7′ 2″ und die Höhe 36° 3′ 9″ Decimalmaß. Multiplicirt man 94,72 . 36,39 und dividirt das Product durch 2, so erhält man 1723,4304. Folglich ist der gesuchte Inhalt des Dreiecks = 1723 □° 43 □′ 04 □″.

Anmerkung. Die obige Gleichung kann man auch schreiben

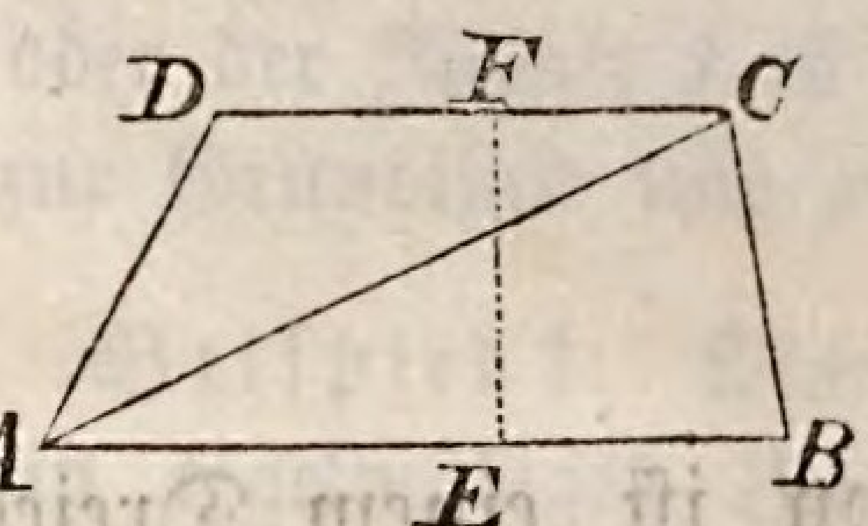
$$J = g \cdot \frac{h}{2} \quad \text{oder} \quad J = \frac{g}{2} \cdot h$$

d. h. der Inhalt des Dreiecks wird auch gefunden, indem man die Grundlinie mit der Hälfte der Höhe, oder indem man die Hälfte der Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

§. 264.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Trapez wird gefunden, wenn man die Summe der beiden parallelen Seiten mit der Höhe multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.

Fig. 179.



Voraussetzung:

$AB = a$

$CD = b$

$EF = h.$

Folgerung:

$$J = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale AC. Nach dem vorigen §. ist

$$ABC = \frac{ah}{2}$$

$$ADC = \frac{bh}{2}$$

und aus der Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$J = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}$$

d. i. nach Sätzen der Arithmetik

$$J = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

w. z. b. w.

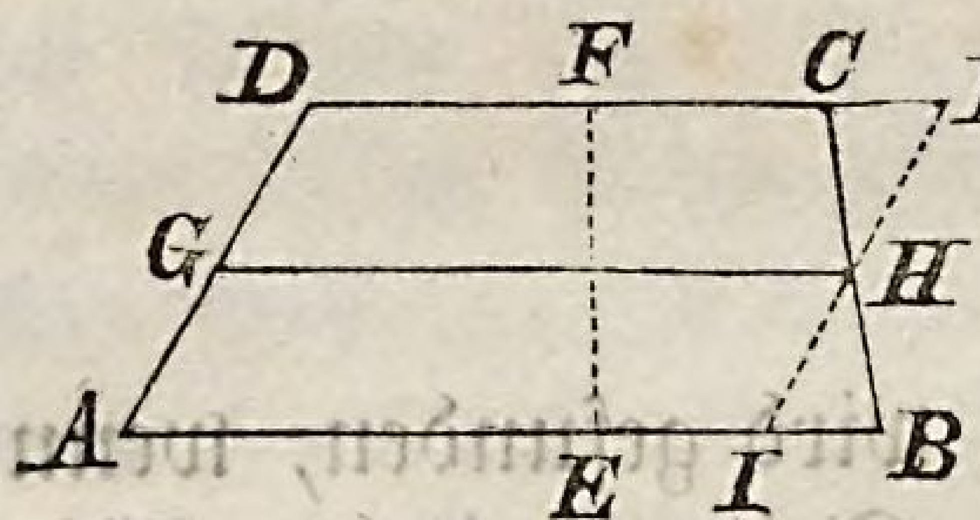
Beispiel. Es sei $a = 46^\circ\, 9'$, $b = 31^\circ\, 5'$, $h = 14^\circ\, 4'$. Der Inhalt wird = 564 □° 48 □'.

Anmerkung. Die obige Gleichung kann man auch schreiben

$$J = (a + b) \,.\, \frac{h}{2} \quad \text{oder} \quad J = \frac{a + b}{2} \,.\, h$$

d. h. der Inhalt des Trapez wird auch gefunden, indem man die Summe der beiden parallelen Seiten mit der Hälfte der Höhe, oder indem man die halbe Summe („das arithmetische Mittel") der beiden parallelen Seiten mit der Höhe multiplicirt.

Fig. 180.



Wenn man unter der Mittellinie des Trapez eine Linie $GH = m$ versteht, welche die Mitten G und H der nicht parallelen Seiten mit einander verbindet, so kann man auch sagen: Der Inhalt des Trapez wird gefunden, wenn man die Mittellinie mit der Höhe multiplicirt; oder

$$J = m \,.\, h.$$

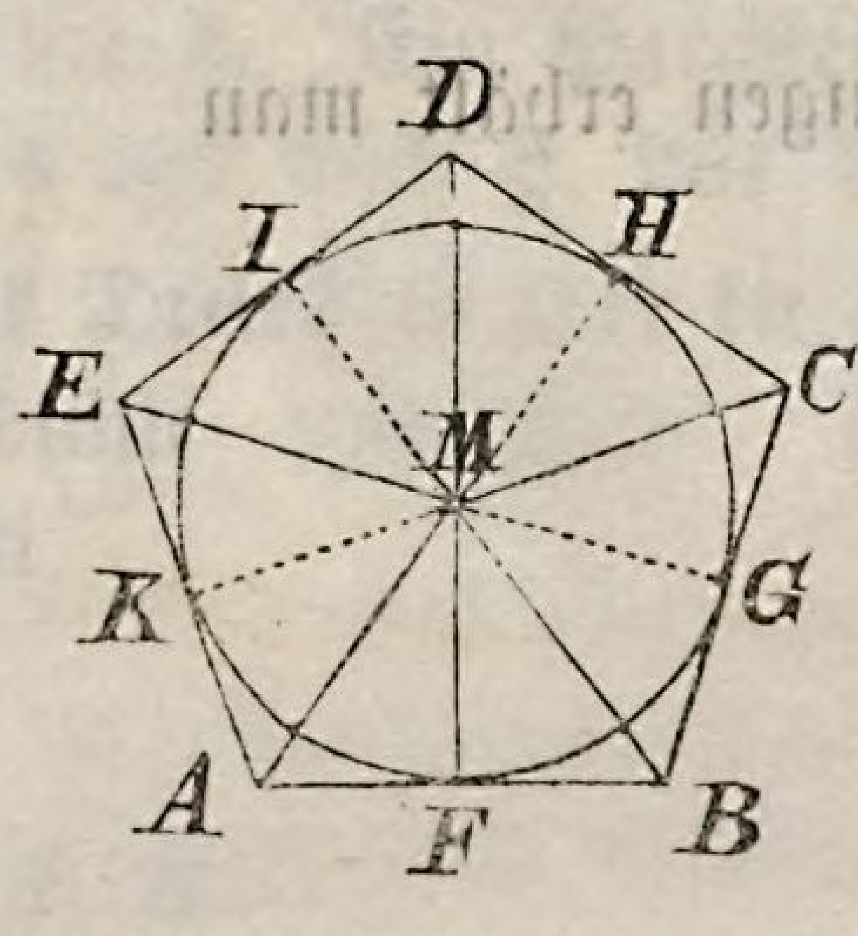
Um dies zu beweisen, verwandele man das Trapez $ABCD$ in das Parallelogramm $AIKD$ (§. 122).

§. 265.

Lehrsatz. Ein regelmäßiges Polygon ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Umfang des Polygon und dessen Höhe der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ist.

Oder: der Inhalt eines regelmäßigen Polygon wird gefunden, wenn man den Umfang desselben mit dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.

Fig. 181.



Voraussetzung:

$$AB + BC + CD + DE + EA = u$$
$$MF = r.$$

Folgerung:

$$J = \frac{u \,.\, r}{2}.$$

Beweis. Man ziehe aus dem Mittelpunkte M des eingeschriebenen Kreises Linien nach allen Eckpunkten A, B, C, 2c. des Polygon und wende auf jedes der dadurch entstehenden Dreiecke MAB, MBC, 2c. den Lehrsatz §. 263 an. So erhält man

$$MAB = \frac{AB \cdot r}{2}$$

$$MBC = \frac{BC \cdot r}{2}$$

$$MCD = \frac{CD \cdot r}{2}$$

$$MDE = \frac{DE \cdot r}{2}$$

$$MEA = \frac{EA \cdot r}{2}$$

und wenn man alle diese Gleichungen addirt, so folgt

$$J = \frac{(AB + BC + CD + DE + EA) \cdot r}{2}$$

$$\text{d. i.} \quad J = \frac{u \cdot r}{2}$$

oder der Inhalt J ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, welches u zur Grundlinie und r zur Höhe hat, w. z. b. w.

Beispiel 1. Man construire nach einem verjüngten Maßstabe ein regelmäßiges Zehneck, dessen Seite = 12° 7′ lang ist, messe den Halbmesser seines eingeschriebenen Kreises, und berechne den Inhalt.

Antw. $J =$

Beispiel 2. Man construire ein regelmäßiges Achteck, in welchem der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = 29° 4′ lang ist, messe seine Seite, und berechne den Inhalt.

Antw. $J =$

§. 266.

Aufgabe. Den Inhalt eines beliebigen unregelmäßigen Polygon zu berechnen.

Fig. 182.

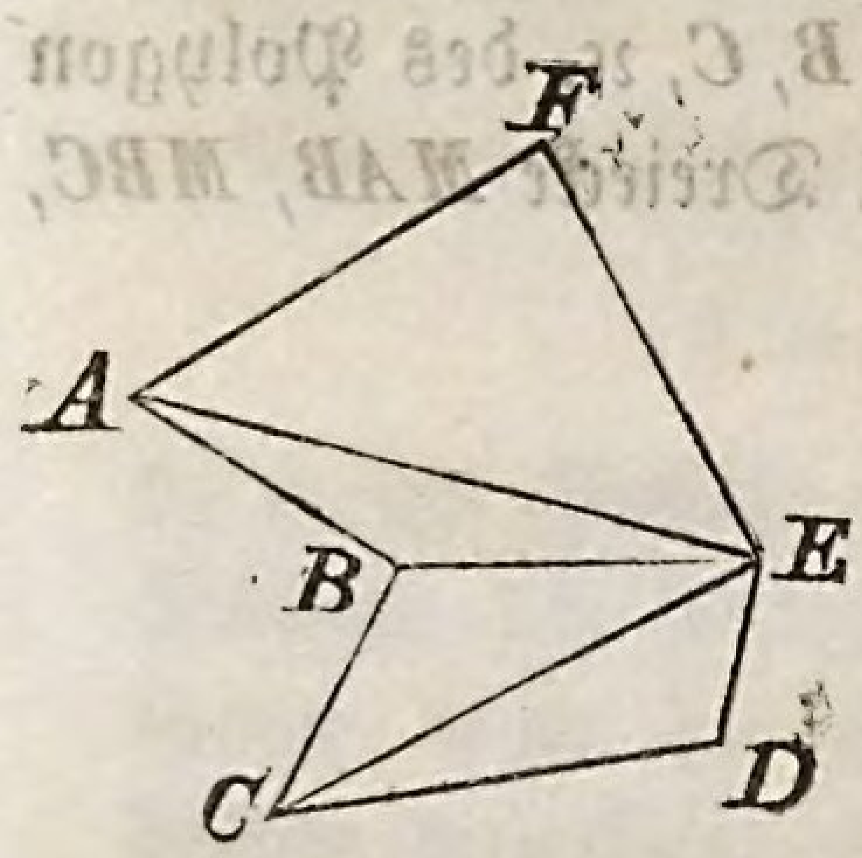
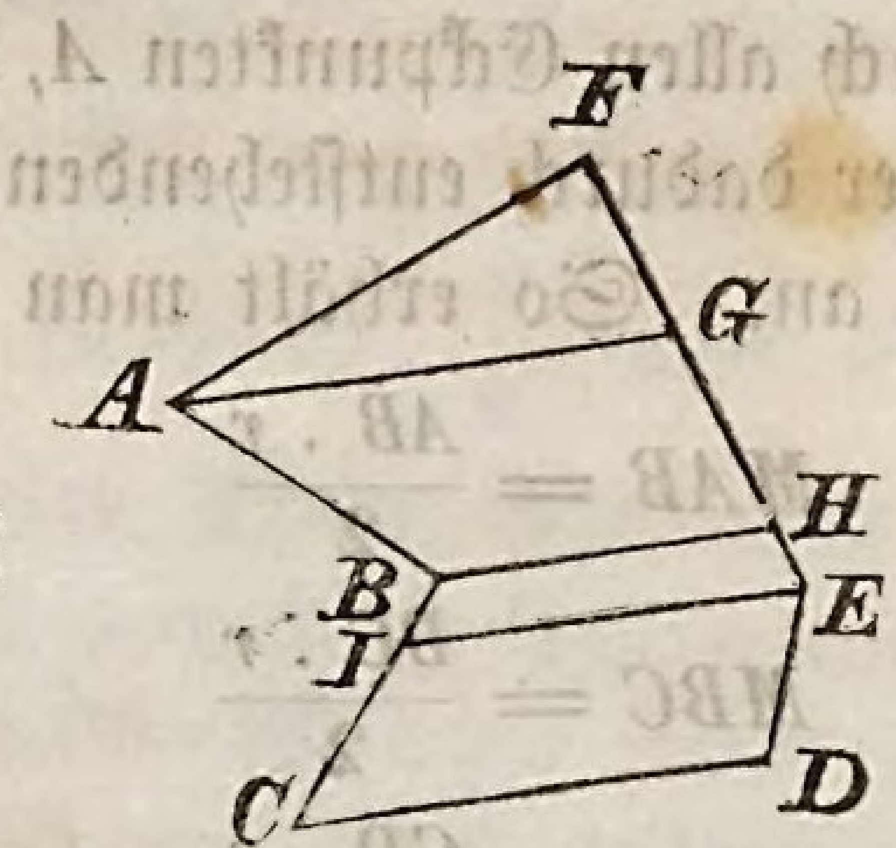


Fig. 183.



Gegeben: Polygon *ABCDEF*.

Gesucht: Der Inhalt.

Erste Methode. Man zerlege das gegebene Polygon, Fig. 182, durch Diagonalen *AE*, *BE*, *CE* in Dreiecke, und berechne die Inhalte dieser Dreiecke nach §. 263.

Zweite Methode. Man zerlege das gegebene Polygon, Fig. 183, durch Parallelen *AG*, *BH*, *EI* (welche hier parallel der Seite *CD* gelegt sind) in Trapeze und Dreiecke, und berechne deren Inhalte nach §§. 263 und 264.

Beispiel. Es sei gegeben $AB = 19^{\circ}\,4'$, $BC = 15^{\circ}\,9'$, $CD = 21^{\circ}\,2'$, $DE = 10^{\circ}\,7'$, $EF = 30^{\circ}\,0'$, $FA = 24^{\circ}\,7'$, $AE = 31^{\circ}\,6'$, $BE = 23^{\circ}\,3'$, $CE = 28^{\circ}\,5'$. Man construire aus diesen Angaben nach einem verjüngten Maßstabe das Polygon, und berechne seinen Inhalt sowohl nach der ersten als auch nach der zweiten Methode.

Antw. $J =$

Rectification des Kreises.

§. 267.

Erklärung. Unter der Rectification des Kreises versteht man die Berechnung der Länge der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gegeben ist.

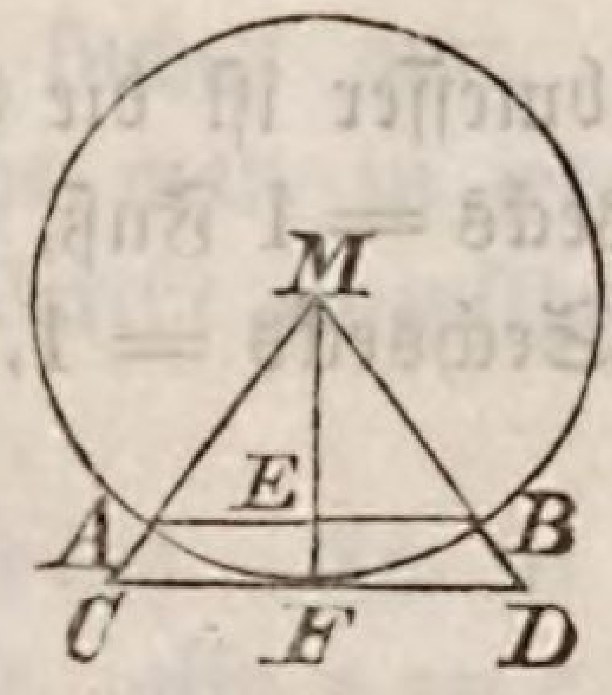
Das Wort Rectification bedeutet ursprünglich die Verwandlung der Kreisperipherie in eine gerade Linie. Man kann sich von solcher Verwandlung ein deutliches Bild machen, wenn man sich die Peripherie des Kreises durch einen biegsamen Faden dargestellt denkt und diesen darauf in eine gerade Linie ausspannt. Diese Verwandlung läßt sich indessen durch keine geometrische Construction genau ausführen, und man muß sich deshalb damit begnügen, die Länge einer gegebenen Kreisperipherie durch Rechnung zu finden.

Dahin führen die beiden folgenden Hülfs-Aufgaben.

§. 268.

Aufgabe. Aus der Seitenlänge eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygon die Seitenlänge des demselben Kreise umschriebenen regelmäßigen Polygon von gleicher Seitenzahl zu finden.

Fig. 184.



Gegeben:
$AB = s$
$MA = MB = r.$

Gesucht:
$CD = S.$

Auflösung. Nach §. 210 ist

$$ME : MF = EB : FD$$

und daraus auch

$$ME : MF = AB : CD. \qquad (1)$$

Setzt man in dieser Proportion statt der Linien die ihre Länge ausdrückenden Zahlen an die Stelle, so hat man zunächst nach der Voraussetzung $AB = s$ und $CD = S$. Ferner ist nach dem Lehrsatz des Pythagoras, in Zahlen ausgedrückt,

$$ME^2 + EB^2 = MB^2$$

$$\text{d. i. } ME^2 + \frac{s^2}{4} = r^2$$

$$\text{und daraus } ME^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$$

$$ME = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Endlich ist $MF = r$. Durch Substitution aller dieser Werthe verwandelt sich die Proportion (1) in folgende

$$\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} : r = s : S \qquad (2)$$

und hieraus folgt nach §. 151 der Arithmetik

$$S = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

was zu suchen war. Diese Formel bildet eine Rechnungsregel,

in welche man in jedem besonderen Falle für r und s die gegebenen Werthe einzusetzen hat, um den gesuchten Werth von S zu finden.

Beispiel. Es sei s die Seite eines regelmäßigen Sechsecks im Kreise, also $s = r$. Alsdann findet man, durch Substitution dieses Werthes von s in die vorige Formel, für die Seite des demselben Kreise umschriebenen regelmäßigen Sechsecks den Werth

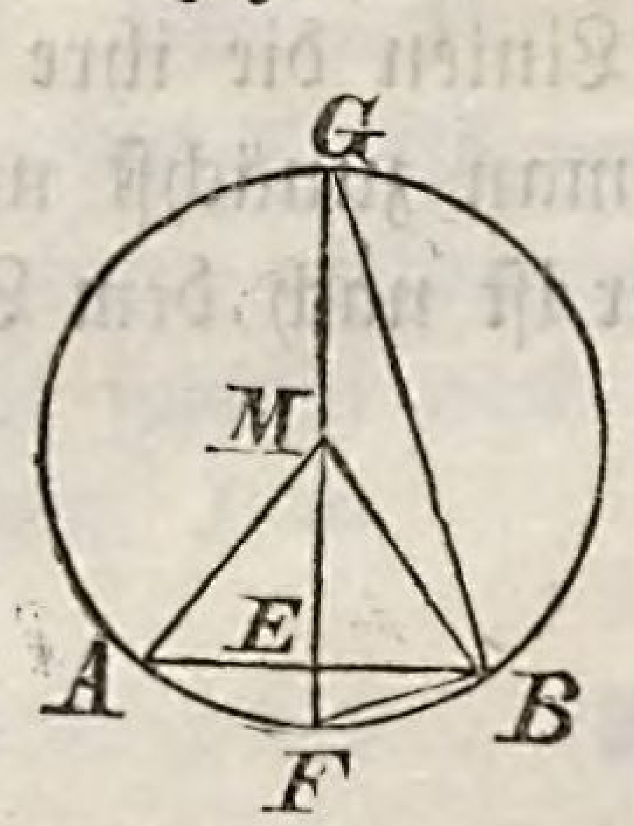
$$S = r \, . \, 1{,}154700.$$

So z. B. in einem Kreise von 1 Fuß Halbmesser ist die Seitenlänge des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks = 1 Fuß, und die Seitenlänge des umschriebenen regelmäßigen Sechsecks = 1,154700 Fuß.

§. 269.

Aufgabe. Aus der Seitenlänge eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygon die Seitenlänge des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygon von doppelter Seitenzahl zu finden.

Fig. 185.



Gegeben:
$AB = s$
$MA = MB = r.$

Gesucht:
$FB = s'.$

Auflösung. Man verlängere FM bis G, und ziehe BG. Alsdann ist nach dem Lehrsatz des Thales $\angle GBF = R$, folglich nach §. 244

$$FG : FB = FB : FE. \qquad (1)$$

Setzt man in dieser Proportion für die Linien die ihre Länge ausdrückenden Zahlen, so hat man zunächst, in Folge der Voraussetzung, $FG = 2r$ und $FB = s'$. Ferner ist nach dem vorigen §.

$$ME = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

und daraus

$$FE = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die Proportion (1) in folgende

$$2r : s' = s' : \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right) \qquad (2)$$

und hieraus folgt nach §. 153 der Arithmetik

$$s' = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

was zu suchen war. Diese Formel bildet eine Rechnungsregel, in welche man in jedem besonderen Falle für r und s die gegebenen Werthe einzusetzen hat, um den gesuchten Werth von s' zu finden.

Beispiel. Es sei s die Seite eines regelmäßigen Sechsecks im Kreise, also $s = r$. Alsdann findet man, durch Substitution dieses Werthes von s in die vorige Formel, für die Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks den Werth

$$s' = r \,.\, 0{,}517638.$$

So z. B. in einem Kreise von 1 Fuß Halbmesser ist die Seitenlänge des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks = 1 Fuß, und die Seitenlänge des eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks = 0,517638 Fuß.

§. 270.

Aufgabe. Die Länge der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gegeben ist, näherungsweise zu berechnen.

Auflösung Man construire in dem gegebenen Kreise ein eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck, dessen Umfang aus §. 194 bekannt ist, und zugleich ein umschriebenes regelmäßiges Sechseck, dessen Umfang man nach §. 268 berechnen kann. Zwischen diesen beiden Umfängen wird die gesuchte Kreisperipherie enthalten sein.

Alsdann construire man in demselben Kreise ein eingeschriebenes regelmäßiges Zwölfeck, dessen Umfang man nach §. 269 findet, und zugleich ein umschriebenes regelmäßiges Zwölfeck, dessen Umfang man wieder nach §. 268 berechnen kann. Zwischen diesen beiden Umfängen wird wieder die gesuchte Kreisperipherie enthalten sein.

Ferner construire man ebenso ein eingeschriebenes und ein umschriebenes regelmäßiges 24eck, und berechne die Umfänge beider,

welche gleichfalls die gesuchte Kreisperipherie noch zwischen sich enthalten.

Wenn man auf diese Weise fortfährt, sowohl eingeschriebene als auch umschriebene regelmäßige Polygone mit stets verdoppelter Seitenzahl zu construiren und die Umfänge derselben zu berechnen, so werden diese Umfänge beständig die gesuchte Kreisperipherie zwischen sich enthalten. Zugleich werden aber auch die Umfänge der beiden Polygone dieser Kreisperipherie fortwährend näher und näher kommen, so daß man es mithin durch hinreichende Fortsetzung dieses Verfahrens in seiner Gewalt hat, die Länge der gesuchten Kreisperipherie angenähert so genau zu bestimmen wie man will.

Das Verfahren wird von selbst seinen Abschluß finden, wenn die beiden Umfänge, welche die gesuchte Kreisperipherie zwischen sich enthalten, einander so nahe gerückt sind, daß die ihre Länge ausdrückenden Zahlen in so viel Decimalstellen, wie man bestimmen will, zusammenfallen. Denn alsdann hat man auch die Länge der gesuchten Kreisperipherie auf eben so viel Decimalstellen genau.

Die folgende Tabelle stellt eine solche Rechnung dar. Es bedeutet darin r den Halbmesser des gegebenen Kreises, und statt der Umfänge enthält sie nur die halben Umfänge der betreffenden Polygone.

Berechnung der halben Kreisperipherie
für einen Halbmesser $= r$.

Anzahl der Seiten	Halber Umfang des eingeschriebenen Polygon	Halber Umfang des umschriebenen Polygon
6	$r \,.\, 3$	$r \,.\, 3{,}464101$
12	$r \,.\, 3{,}105828$	$r \,.\, 3{,}215390$
24	$r \,.\, 3{,}132628$	$r \,.\, 3{,}150660$
48	$r \,.\, 3{,}139350$	$r \,.\, 3{,}146086$
96	$r \,.\, 3{,}141031$	$r \,.\, 3{,}142714$

Die beiden letzten Umfänge stimmen auf zwei Decimalstellen mit einander überein, folglich hat man auf zwei Decimalstellen genau für die Länge der halben Kreisperipherie den Werth

$$r \,.\, 3{,}14 \ldots .$$

Wollte man das Resultat auf drei oder mehr Decimalstellen genau haben, so müßte man die vorige Rechnung weiter fortsetzen.

Anmerkung. Der Erste, welcher diese Rechnung geführt hat, war Archimedes, der größte Mathematiker des Alterthums, welcher im Jahr 212 vor C. G. bei der Eroberung von Syracus durch die Römer umkam, nachdem er diese seine Vaterstadt mehrere Jahre hindurch durch Erbauung künstlicher Kriegsmaschinen gegen die Belagerer vertheidigt hatte. Archimedes führte die Mathematik um ein Bedeutendes über die Elemente des Euklides hinaus, wovon jedoch hier nichts weiter berichtet werden kann, weil seine Untersuchungen fast nur den höheren Theilen der Mathematik angehören. In der Stereometrie wird sein Name noch einmal genannt werden.

Die obige Rechnung, von Archimedes geführt, muß man um so mehr bewundern, da dem Archimedes der Gebrauch unserer Ziffern und namentlich unserer Decimalbrüche gänzlich fehlte. Archimedes fand, indem er wie oben seine Rechnung mit dem 96eck abschloß, daß die Länge der Kreisperipherie zwischen dem $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$fachen des Durchmessers enthalten sei, eine Bestimmung, welche mit der obigen sehr nahe zusammenfällt.

§. 271.

Erklärung. Unter der Zahl π versteht man denjenigen Factor, mit welchem man den Durchmesser eines Kreises multipliciren muß, um die Peripherie desselben zu finden.

Diese Zahl ist, wie man leicht erkennt, einerlei mit demjenigen Factor, mit welchem man den Halbmesser des Kreises multipliciren muß, um die halbe Kreisperipherie zu finden; man hat also aus dem vorigen §. auf zwei Decimalstellen genau

$$\pi = 3{,}14 \ldots .$$

Genauer fand Ludolph von Cöln 1596

$$\pi = 3{,}1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ 7950 \ldots .$$

und nach ihm nennt man diese Zahl auch wohl die Cölnische Zahl.

Gegenwärtig hat man die Zahl π durch die Hülfsmittel der höheren Mathematik auf 250 Decimalstellen berechnet, von denen jedoch niemals ein ernstlicher Gebrauch zu machen ist.

Für oberflächliche Rechnungen kann die Zahl des Archimedes $\pi = 3\frac{1}{7}$ schon ausreichend sein.

Der Logarithmus von π im Briggischen System ist

log. $\pi = 0{,}49715$ auf fünf Decimalstellen,

log. $\pi = 0{,}4971499$ auf sieben Decimalstellen.

Anmerkung. Die Zahl π ist eine irrationale Zahl, sie kann also weder durch einen geschlossenen noch durch einen periodischen Decimalbruch genau dargestellt werden. Dies hat zuerst Legendre bewiesen, der Beweis kann jedoch hier nicht gegeben werden.

§. 272.

Zusatz. Die Länge der Peripherie eines Kreises wird gefunden, wenn man den Durchmesser dieses Kreises mit der Zahl π multiplicirt.

Es bezeichne p der Peripherie eines Kreises und r den Halbmesser desselben. Alsdann ist $2r$ der Durchmesser dieses Kreises, folglich

$$p = 2r\pi.$$

Umgekehrt wird der Durchmesser eines Kreises gefunden, wenn man die Peripherie dieses Kreises durch die Zahl π dividirt. Oder

$$2r = \frac{p}{\pi}.$$

Beispiel 1. Der Zeiger einer Uhr hat 5 Zoll Länge. Wie lang ist der Weg, welchen die Spitze dieses Zeigers bei jeder Umdrehung zurücklegt?

Antw. 31,4 . . . Zoll.

Beispiel 2. Der Umfang des Erd-Äquator hält 5400 geographische Meilen. Wie lang ist der Durchmesser des Äquator?

Antw. 1718,874 oder sehr nahe $1718\frac{7}{8}$ Meilen.

Quadratur des Kreises.

§. 273.

Erklärung. Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises, dessen Halbmesser gegeben ist.

Das Wort Quadratur bedeutet ursprünglich die Verwandlung der Kreisfläche in ein Quadrat. Diese Verwandlung hat sich aber durch keine geometrische Construction ausführen lassen, so oft auch von den Zeiten der Griechen bis auf die Gegenwart die Versuche zur Auffindung einer solchen Construction sich wiederholt haben. Man muß sich deshalb damit begnügen, den Inhalt einer gegebenen Kreisfläche durch Rechnung zu finden, woraus sodann die Seite eines Quadrats, welches dem gegebenen Kreise inhaltsgleich ist, leicht gefolgert werden kann.

Der folgende Lehrsatz zeigt, wie die Quadratur des Kreises mit der Rectification desselben zusammenhängt, so daß die Auflösung der einen dieser beiden Aufgaben unmittelbar die der anderen nach sich zieht.

§. 274.

Lehrsatz. Die Kreisfläche ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie des Kreises und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

Oder: Wenn p die Peripherie und r den Halbmesser des Kreises bedeutet, so ist

$$J = \frac{p \cdot r}{2}.$$

Beweis. Man denke sich dem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Polygon von beliebiger Seitenzahl umschrieben, und nenne u den Umfang und J' den Inhalt dieses Polygon. Alsdann hat man aus §. 265

$$J' = \frac{u \cdot r}{2}.$$

Wenn man nun die Seitenzahl des Polygon, durch wiederholte Verdoppelung derselben, größer und größer werden läßt, so kommt der Umfang u desselben nach §. 270 immer näher der Kreisperipherie

p, und zugleich kommt sein Inhalt J' immer näher dem Inhalt J der Kreisfläche. Folglich ist auch

$$J = \frac{p \cdot r}{2}$$

d. h. der Inhalt J ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, welches p zur Grundlinie und r zur Höhe hat, w. z. b. w.

Anmerkung. Kürzer kann man diesen Beweis ausdrücken wie folgt.

Der Kreis kann wie ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten angesehen werden. Folglich darf man auf den Kreis unmittelbar den Lehrsatz §. 265 anwenden, woraus sogleich die gesuchte Formel sich ergiebt.

§. 275.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man das Quadrat seines Halbmessers mit der Zahl π multiplicirt.

Oder: Wenn r den Halbmesser eines Kreises bedeutet, so ist

$$J = r^2\pi.$$

Beweis. Man setze in die Formel des vorigen §.

$$J = \frac{p \cdot r}{2}$$

für p seinen Werth aus §. 272, nämlich

$$p = 2r\pi.$$

Alsdann erhält man

$$J = \frac{2r\pi \cdot r}{2} = r^2\pi$$

w. z. b. w.

Beispiele. 1) Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser 44° 7' Decimalmaß beträgt?

Antw.

2) Wie lang ist die Seite eines Quadrats, welches einem Kreise von 17' Halbmesser inhaltsgleich ist?

Antw.

3) Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises von 698 Quadratmeilen Inhalt?

Antw.

§. 276.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Oder: Wenn J und J' die Inhalte zweier Kreise bedeuten, deren Halbmesser r und r' sind, so ist

$$J : J' = r^2 : r'^2.$$

Beweis. Nach dem vorigen §. ist

$$J = r^2\pi \ , \ J' = r'^2\pi.$$

Daraus folgt durch Division

$$J : J' = r^2\pi : r'^2\pi$$

und hieraus mit Anwendung von §. 149 der Arithmetik

$$J : J' = r^2 : r'^2$$

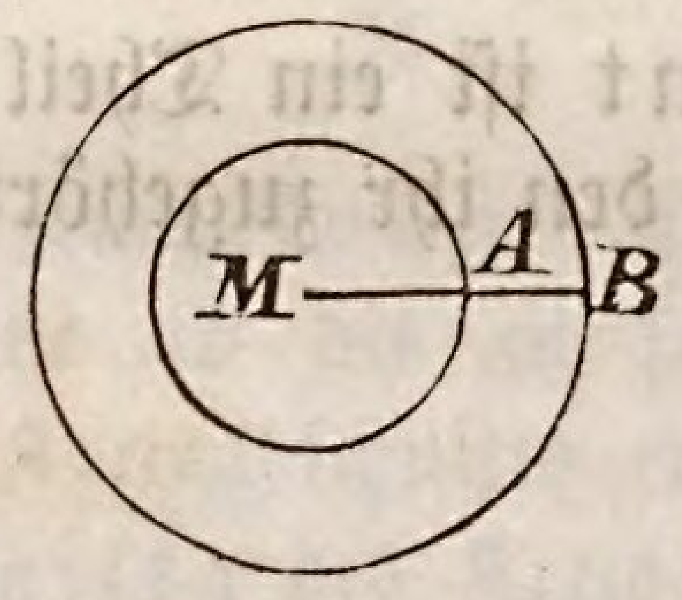
w. z. b. w.

Anmerkung. Es ist auch hier wie im §. 260 einerlei, ob man unter den Quadraten der Halbmesser die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß der Halbmesser ausdrücken, oder die Flächen der Quadrate, welche über den Halbmessern als Seiten construirt werden können, verstehen will.

§. 277.

Erklärung. Unter einem Kreisringe versteht man die zwischen zwei concentrischen Kreisen enthaltene Fläche.

Fig. 186.



Ein Kreisring ist demnach immer der Differenz der Flächen der beiden Kreise gleich, welche ihn bilden. Oder wenn $MA = r$ und $MB = R$ die Halbmesser dieser beiden Kreise sind, so ist

$$J = R^2\pi - r^2\pi$$

oder einfacher

$$J = (R^2 - r^2)\pi.$$

§. 278.

Lehrsatz. Ein Kreisring ist einem Trapez gleich, dessen parallele Seiten die Peripherien der beiden gegebenen concentrischen Kreise sind, und dessen Höhe die Differenz der Halbmesser dieser beiden Kreise ist.

Oder: Wenn p und P die Peripherien der beiden gegebenen Kreise und d die Differenz ihrer Halbmesser bedeuten, so ist

$$J = \frac{(P + p)\,d}{2}.$$

Beweis. Man nenne r und R die Halbmesser der beiden gegebenen Kreise. Alsdann hat man aus dem vorigen §.

$$J = (R^2 - r^2)\pi$$

welchen Ausdruck man auch umwandeln kann in

$$J = (R + r)\,(R - r)\pi. \qquad (1)$$

Nun ist nach §. 272

$$2R\pi = P\ ,\ 2r\pi = p,$$

woraus durch Addition folgt

$$2(R + r)\pi = P + p$$

und weiter

$$(R + r)\pi = \frac{P + p}{2}. \qquad (2)$$

Ferner ist nach der Voraussetzung

$$R - r = d. \qquad (3)$$

Substituirt man die Werthe (2) und (3) in (1), so folgt

$$J = \frac{(P + p)\,d}{2}$$

w. z. b. w.

§. 279.

Erklärung. Ein Kreisausschnitt oder Sector ist ein Theil der Kreisfläche, welcher durch zwei Halbmesser und den zwischen ihnen liegenden Kreisbogen begränzt wird.

Ein Kreisabschnitt oder Segment ist ein Theil der Kreisfläche, welcher durch eine Sehne und den ihr zugehörigen Kreisbogen begränzt wird.

§. 280.

Lehrsatz. Ein Kreisausschnitt ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Bogen des Kreisausschnitts und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

Fig. 187.



Voraussetzung:

$MA = r$

$AB = b.$

Folgerung:

$$J = \frac{b \cdot r}{2}.$$

Beweis. Der Kreisausschnitt verhält sich zur ganzen Kreisfläche wie der Bogen des Kreisausschnitts zur Kreisperipherie. Nennt man also p die Kreisperipherie, so hat man, mit Zuziehung von §. 274, zur Bestimmung von J die Proportion

$$p : b = \frac{p \cdot r}{2} : J$$

woraus nach §. 151 der Arithmetik folgt

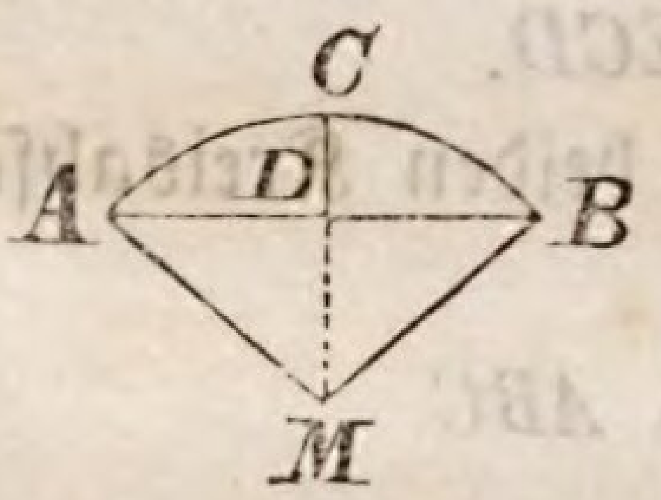
$$J = \frac{b \cdot r}{2}$$

w. z. b. w.

§. 281.

Zusatz. Der Inhalt eines Kreisabschnitts wird gefunden, wenn man von dem Inhalt des zugehörigen Kreisausschnitts den Inhalt des Dreiecks subtrahirt, welches durch die Sehne des Kreisabschnitts und die beiden Halbmesser des Kreisausschnitts gebildet wird.

Fig. 188.



Oder es ist

$$ABC = MACB - MAB,$$

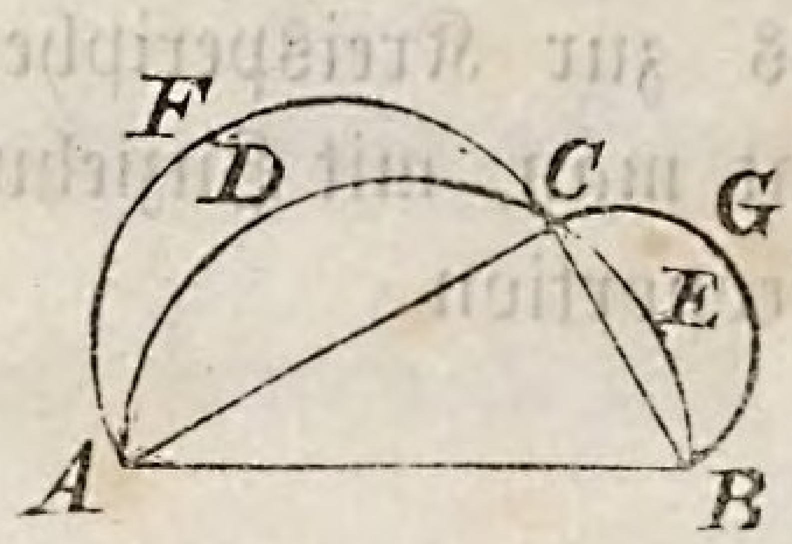
wo man sodann $MACB$ nach §. 280 und MAB nach §. 263 zu berechnen hat, um ABC zu finden.

Anmerkung. Das Perpendikel CD, auf der Mitte D der Sehne AB bis zu seinem Durchschnittspunkte C mit dem Bogen des Kreisabschnitts errichtet, nennt man auch den Pfeil oder die Sagitta des Kreisabschnitts. Wenn diese Linie gegeben ist, so kann man zur Berechnung des Dreiecks MAB als Grundlinie die Sehne AB, und als Höhe den um den Pfeil verminderten Halbmesser, d. i. die Linie MD, ansehen.

§. 282.

Lehrsatz des Hippokrates. Wenn über den drei Seiten eines gegebenen rechtwinkeligen Dreiecks, als Durchmessern, Halbkreise construirt werden, so ist die Summe der beiden über den Katheten entstehenden Mondstücke (lunulae) inhaltsgleich dem gegebenen Dreiecke.

Fig. 189.



Voraussetzung:

$\angle ACB = \mathfrak{R}$.

Folgerung:

☾ $ADCF$ + ☾ $BECG = \triangle ABC$.

Beweis. Nach §. 275 ist der Inhalt des Kreises, welcher AB zum Durchmesser hat, $= (\frac{1}{2} AB)^2\pi$ d. i. $= \frac{1}{4} AB^2\pi$. Folglich hat man für die Fläche des über AB construirten Halbkreises

$$ABECD = \frac{1}{8} AB^2\pi.$$

Ebenso erhält man für die Flächen der über AC und BC construirten beiden Halbkreise

$$ACF = \frac{1}{8} AC^2\pi$$
$$BCG = \frac{1}{8} BC^2\pi.$$

Nun ist nach dem Lehrsatze des Pythagoras

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

folglich auch, wenn man diese Gleichung mit $\frac{1}{8}\pi$ multiplicirt,

$$\frac{1}{8} AC^2\pi + \frac{1}{8} BC^2\pi = \frac{1}{8} AB^2\pi$$

d. i. $ACF + BCG = ABECD$.

Subtrahirt man von dieser Gleichung die beiden Kreisabschnitte ACD und BCE, so hat man endlich

☾ $ADCF$ + ☾ $BECG = \triangle ABC$

w. z. b. w.

Anmerkung. Diesen Satz verdankt man dem griechischen Mathematiker Hippokrates von Chios, welcher um 450 vor C. G. lebte (nicht zu verwechseln mit dem berühmten Arzt Hippokrates von Kos, der nahe zu derselben Zeit lebte). Hippokrates fand diesen Satz bei seinen Bemühungen, die Quadratur des Kreises durch Construction zu lösen, und gab damit das erste Beispiel, um eine durch krumme Linien begränzte Fläche in eine geradlinige Figur zu verwandeln. Auch ist Hippokrates der erste gewesen, welcher Elemente der Geometrie geschrieben hat, die indessen durch spätere Werke, besonders durch die Elemente des Euklides verdrängt und so vergessen worden sind.

Berichtigungen.

Seite 53, Zeile 1 v. o., statt $\frac{21ac^2 - 8ab^2 + 3abc}{14bc}$ lies $\frac{21ac^2 - 8ab^2 + 3abc}{14b^2c^2}$.
" 76, " 7 v. u., statt 10 Uhr $20\frac{5}{22}$ Min. lies 10 Uhr $40\frac{5}{11}$ Min.
" 77, " 7 v. o., statt §. 138 lies §. 133.
" 128, " 4 v u., statt $\frac{\sqrt[3]{26}}{8}$ lies $\frac{\sqrt[3]{26}}{2}$.
" 131, " 1 v. u., statt $(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ lies $(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}}$.
" 151, " 6 v. u., statt 57 lies 37.
" 161, " 3 v. o., statt 1145,6474 lies 1155,6474.
" 174, " 1 v. o., statt $\sqrt[2]{-8}$ lies $\sqrt[3]{-8}$.
" 208, " 9 v. u., statt $\log^{2\frac{1}{3}} \frac{9}{49} = -3$ lies $\log^{2\frac{1}{3}} \frac{9}{49} = -2$.
" 210, " 2 v. o., statt 0,500897 lies 12,71814.
" " " 11 v. o., statt 1,792020 lies 1,762733.
" 232, " 13 v. o., statt Wechselwinkel *IGH* lies Wechselwinkel *IHG*.
" 233, " 2 v. u., statt $\angle BGH$ lies $\angle AGE$.
" 234, " 9 v. o., statt $\angle AGK$ lies $\angle AGH$.
" 249, " 13 v. u., statt $\angle CAD = \angle CBD$ lies $\angle ACD = \angle BCD$.
" 284, " 6 v. u., statt *EBCD* lies *EBCF*.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wittstein, Theodor,

Arithmetik und Planimetrie

Hannover 1856

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.62
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739782-4